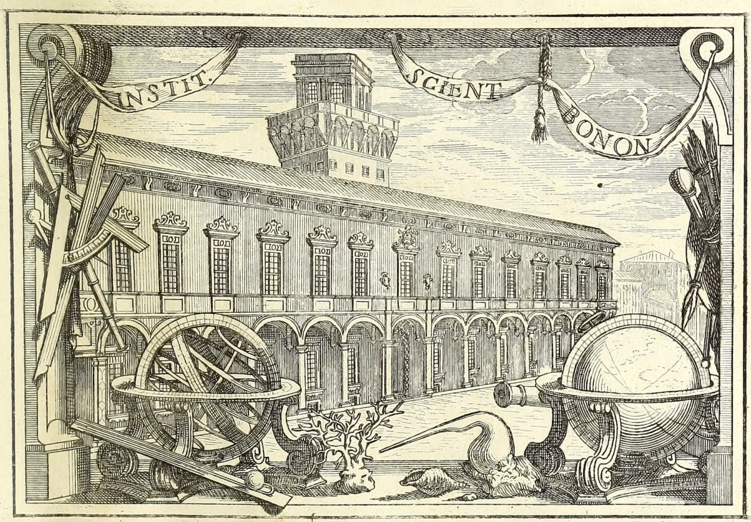
WANDSWORTH
LS 1603 B

S. 1103. B. 9.

DE BONONIENSI SCIENTIARUM ET ARTIUM INSTITUTO ATQUE ACADEMIA

COMMENTARII.

TOMI QUINTI PARS ALTERA.



BONONIÆ

Typis Lælii a Vulpe Inſtituti Scientiarum Typographi. MDCCLXVII.

SUPERIORUM PERMISSU.

ACADEMICORUM QUORUMDAM
OPUSCULA
VARIA.

PRÆFATIO.

AD primam quinti hujus tomi partem cum præfarer, multos deceſſiſſe docui, qui ſuam ſtrenue in Inſtituto navabant operam; in his Jacobum Bartholomæum Beccarium, qui idem fuerat & chymicæ profeſſor, & Inſtituti Præſes. Poſt non multo deceſſit etiam Hercules Lellius, qui quamvis careret titulo, re tamen profeſſor videbatur; quippe cujus opera, in quamplurimis Inſtituti rebus adminiſtrandis, excolendiſque diſciplinis omnibus, tanti fuit, ut profeſſor vix ullus par illi poni poſſit. Nunc qui duobus hiſce ſucceſſerint, quæque inde mutationes ſecutæ, dicendum eſt paucis. Nam qui ipſi fuerint, qua virtute, quo ingenio, in ſuperioribus tomis, inque hoc etiam, ſatis dictum; tam ſæpe utriuſque facta eſt mentio.

Sed ſunt nonnulli, qui hujus generis libros feſtinanter volvunt, & locos, quos ſibi minus utiles eſſe arbitrantur, tranſiliunt; quos fieri poteſt, ut quæ vel de Beccario relata ſunt, fugerint, vel de Lellio. Horum cauſa non gravabor ea quaſi curſim repetere, quæ commemorata ſunt alibi, ac ſeparatim de utroque referre pauca, antequam, quis eis ſucceſſerit, quæque illorum obitum conſecuta ſint, dicam.

Beccario primum illuſtre fuit non tam Academicum Profeſſoremque Inſtituti eſſe, quam Academiam ipſam, atque adeo Inſtitutum univerſum, quod vere dici poteſt, condidiſſe;

diſſe; nam ut pecuniam alii, auctoritatem, opes ad id contulerint, qui tamen plus ſtudii, laboriſque, & ſcientiæ, quam Beccarius, contulerit, nominare fortaſſe poſſumus neminem. Fuit certe ex antiquioribus, iiſque, qui hortante præſertim, & in id maxime incumbente Morgagno, ſimul cum Manfrediis, Victorioque Stancario Academiam, vel antequam Inſtituto adjungeretur, ad recentiora ſtudia converterunt. Qua re factum deinde eſt, ut iiſdem ſtudiis favere jam plures in hac urbe cæperint; nam pleriſque antea minus probabantur. Ea Beccarius adeo cupide complexus eſt, ut cum eſſet ad philoſophiam publice tradendam conſtitutus, quamvis natura timidior eſſet, maximæque prudentiæ loco poneret rumores vereri, tenere ſe tamen non potuerit, quin omnem phyſicam, ut tum erat recentiorum opinio, ad mechanica principia revocaret, ſeque Carteſii & Mallebranchii admiratorem eſſe profiteretur. Excitatis ad hunc modum civibus haud difficile Senatui fuit, cum Inſtitutum poſtea conderet, eos habere Profeſſores, qui in rem eſſent, exſpectationique reſponderent.

In Profeſſoribus Beccarius primum numeratus eſt; eique phyſicæ demonſtrandæ munus ſumma omnium voluntate eſt delatum. Ad id ille adjumenta attulit non vulgaria; nam præter quam quod erat mire induſtrius, & laboris patiens, geometriam quoque attigerat, medicinæ, quam exercebat, apprime ſciens, rei anatomicæ peritiſſimus, in naturali hiſtoria verſatus, & chymicæ uſque adeo ſtudioſus ac diligens, ut eam deinde viſus ſit facultatibus aliis omnibus anteponere; ac ſi quid vel latine ſcribendum eſſet, vel italice; utraque pariter valebat lingua. Quod ſi qui mirantur, potuiſſe unum, eumque non magno admodum natu, tam multa conſequi, ii quo magis mirentur, ſciant velim, potuiſſe jam tum illum artificia quoque poetarum ſcienter exponere, ac de cujuſque elegantia judicare rectiſſime.

Cum phyſici munere annos aliquot functus eſſet, placuit Senatui provinciam ei commutare. Phyſicæ Galeatium præpoſuit, quo nemo erat, judicio omnium, neque dignior, neque aptior; Beccario commiſit, quod ille ſemper optaverat, rem chymicam. Provinciam hanc retinuit deinde, quoad vixit; nam quamvis, Bazano mortuo, Inſtituti Præſes poſtea ſit factus, par tamen viſus eſt utrique muneri, ut & Profeſſoribus aliis præeſſet, & eſſet Profeſſor ipſe.

Mul-

Multa exſtant, quæ hujus ingenium doctrinamque teſtantur; nam quamvis difficile ſit, his præſertim temporibus, novi afferre aliquid, ac perdiſcere volenti, quæ antea per alios inventa fuerint, tempus vix ſuppetat addendi quidpiam; multa tamen Beccarius conatus eſt, neque pauca perfecit; quæ quoniam in commentariis noſtris relata ſunt fere omnia, ſatis hic erit proferre nonnulla. De phoſphoris, quæ res tum phyſicos maxime ſollicitos habere cæperat, volumen ſcripſit, plurimoſque, qui adhuc ignorabantur, aperuit; eoſque in multa genera diſpertivit ſubtilitate tanta, ut appareret, quam eſſet ordinis cupidus, in eoque dialecticæ arti indulgeret ſupra modum. Exiſtimabant per id tempus phyſici plerique omnes, fluida quæque corpora inteſtino neſcio quo motu cieri, eoque eſſe fluida. Opinionem hanc Beccarius ſuſtulit experimentis luculentiſſimis. Cum ſe totum chymicæ tradidiſſet, ea ſpectabat maxime, quæ ad victum pertinerent; vixque eo deduci ſe umquam patiebatur, ubi minimum eſſet utilitatis.

Jura præſertim, quæ ægris dantur, examinavit, ac multa comperit, quæ cognoviſſe valde erat e re medica. Frumenti principia perquirens, horum unum invenit plane mirabile, minimeque a planta ulla exſpectandum; ut quod animalem naturam teſtari videtur apertiſſime. E lacte poſt magnos labores ſales tandem eduxit, quos fruſtra quæſiverat Boerahavius; ac licet Macquerus ſales & ipſe quoſdam e lacte duxiſſe dicatur, Beccarius tamen aliud genus invenit. Meteorologicas quoque condidit ephemerides, quo in labore ad quadraginta annos perſeveravit, nullum intermittens diem quin pondus aeris, caloris gradus, ventorum mutationes, aliaſque cæli inconſtantias ad ſubtilitatem ſummam notaret; ſperabatque, ſi quotidianum illud ſtudium ad multos annos produceretur, fieri tandem poſſe, ut in tanta illa tamque multiplici rerum varietate lex quæpiam conſtans ſe proderet. In quo apparuit, quam diligenti ſimul, & quam magno eſſet animo.

Diem obiit annos natus plus octoginta. Mortuo honor tantus eſt habitus, quantus, noſtra quidem memoria, litteratorum hominum nemini, ſi ipſum & Molinellium excipias: quo intelligi poteſt, quam multis carus fuerit. Laudes ejus ornatiſſima oratione perſecutus eſt Flaminius Scarſellius, orator excellens.

Bec-

Beccarii obitum hæ mutationes conſecutæ. Inſtituti Præſes factus eſt Franciſcus Maria Zanottus; is ergo a ſecretis eſſe deſiit, quo in munere ei ſucceſſit Sebaſtianus Canterzanus, philoſophus doctiſſimus, inſtructiſſimus a geometria, italicis latiniſque excultus litteris. Res chymica Vincentio Putio commiſſa eſt, qui fuerat Beccarii in illo munere adjutor, ſeque parem muneri oſtenderat. Honores hoſce tanto ſtudio Senatus decrevit, ut qui obtinuerunt ne petendi quidem tempus habuerint.

Venio ad Lellium. In hoc apparuit, quantum vel ſine diſciplina ingenium valeat. Ab adoleſcente armis illis condendis ſe dederat, quibus plumbeæ glandes accenſi pulveris vi exploduntur; in eaque arte, quamvis præceptore uteretur mediocri, per ſe ipſe tamen tam multa excogitavit, vel ad uſum, vel ad ornatum, ut jam cum ſummis in illo artificii genere compararetur. Joannis Petri Zanotti hortatu ad delineandi ſtudium ſe convertit, in quo ſtatim non æquales modo, ſed multos etiam majores natu ſuperavit; primuſque ex omnibus perſuaderi ſibi a Zanotto ſivit, iis maxime anatomes ſtudium neceſſarium eſſe, qui ſtatus hominum, nudorum præſertim, poſituſque varios exprimere delineando velint; quod ſtudium, jam inde a Carracciorum temporibus intermiſſum, plane novum, ac riſu dignum pleriſque videbatur. In hoc ſtudium cum Lellius incumberet, alioſque ad id perducere niteretur, dici non poteſt, in quantas incurrerit offenſiones. Hic enimvero intelligi potuit, quam ſint interdum rumores contemnendi; nam quod antea omnes irridebant, id poſtea unius hominis conſtantia factum eſt, ut decreto publico, probantibus omnibus, confirmaretur. Exercebat ſe interim Lellius in depingendis tabulis, ſtatuiſque faciendis, quarum aliquot tanta arte perfecit, ut viſus ſit ad veterum græcorum excellentiam quam proxime accedere.

Neque minus valebat in rebus aliis; videbatur enim natus ad omnia, quæcumque ingenium induſtriamque requirerent. Itaque & in cudendis numiſmatis, & in tornandis corporibus, & in vitris elaborandis mira erat dexteritate & ſcientia. Hic præterire non debeo, quod in nobiliſſima Benedicti XIV. Pontificis Maximi imagine præſtitit; fuit id enim ante oculos civium, magnamque ei laudem comparavit. Tali modo res acta. Benedictus XIV. imaginem ſuam fieri Romæ juſſerat

mi-

mirabili illo muſæo opere, quo illius urbis artifices uſque adeo excellunt, ut ſuperare omnes merito credantur; eamque egregia ſane arte perfectam ad Inſtitutum miſerat, ut in nobiliſſima parte ædium poneretur. Accidit in itinere, ut commotis diſiectiſque lapillis quamplurimis vitium fecerit non mediocre. Bononiam ſic corrupta cum perveniſſet, dici non poteſt, quam graviter cives tulerint, labem tantam in tam pulchra imagine inſediſſe; dolebantque magnificentiſſimum Benedicti munus, & ornamentum Inſtituti maximum interiiſſe; neque ſpes erat inveniri poſſe quemquam, qui illam ad pulchritudinem priſtinam revocaret, romanorumque artificum imitaretur excellentiam. Adhibitus in conſilium Lellius, cum omnia per diligentiam ſummam conſideraviſſet, ſpem abjici noluit. Re ipſe, ut Senatoribus placuit, ſuſcepta, brevi tempore imaginem ſic refecit, ut labes appareret jam nulla; nemoque poſtea fuit, qui artificum romanorum deſideraret induſtriam. Imago deinde, quæ Pontificis voluntas fuerat, in maxime illuſtri loco poſita.

Erat etiam ad quævis phyſicorum molimina aptiſſimus; quo factum eſt, ut nemo fere in Academia fuerit, quin, ſi experimentum quodpiam vellet capere, illius opera uteretur. Præſto ipſe erat omnibus, neque manum tantum, ſed conſilium etiam præbebat, docebatque quo quidque modo peragendum eſſet, & de ſuo fere ſemper addebat aliquid. Jam enim illum & librorum optimorum lectio, & doctorum hominum, qui ad ipſum concurrebant, conſuetudo doctum fecerant.

Hunc etiam illuſtris legatio nobilitavit. Aſſervabantur Romæ lentes quamplurimæ, quas Campanus olim, egregius vitrorum artifex, reliquerat, ſimulque inſtrumenta, quibus ille ad lentes ſuas novo quodam artificio formandas utebatur. Cum hæc Pontifex Maximus vellet cuncta emere, & ad Inſtitutum mittere, legandus eo erat, qui illud quidquid erat lentium inſtrumentorumque cognoſceret, confectaque emptione Bononiam deportaret. Laboris & diligentiæ res erat, &, propter occultos inſtrumentorum uſus, intelligentiæ non mediocris. Nemo ad id aptior neque Senatui, neque Pontifici viſus eſt, quam Lellius. Is ergo Romam profectus. Ibi cum omnia opinione celerius confeciſſet, Bononiam rediens lentes pulcherrimas, & inſtrumenta exquiſitiſſima in Inſtituti ædes intulit. Ac tum primum officina vitrorum in Inſtituto exſtitit; cujus cuſto-

ſto-

ſtodia, non minus Pontificis, quam Senatus, voluntate, Lellio eſt credita. Eumdem officinæ quoque alteri præeſſe voluerunt, in qua inſtrumenta repoſita ſunt nobiliſſima, quæ olim Marſilius e Germania advexerat, tornandis mira arte corporibus utilia.

Sed nihil illuſtrius conclavi illo, quod is in Inſtituti ædibus ad anatomes ſtudium inſtruxit. Partes humani corporis neſcio quas, animi cauſa, e cera finxerat mirabili prorſus arte. Nemo non opus magnis laudibus extulit. Quare cum Senatui tum Pontifici Maximo injecta voluntas eſt, ut & partes reliquas eodem opere perſequeretur, eiſque conclave proprium in Inſtituto ornaret ad anatomen demonſtrandam. Perfecit omnia egregie Lellius; eique conclave illud traditum; neque creditum eſt, Profeſſoris ullius in ea quidem facultate opus eſſe, illo vivo. Sic Lellii opera Anatome in Inſtitutum invecta.

Eo mortuo provincia anatomica Aloyſio Galvano Galeatii genero eſt tradita, eique profeſſoris titulus datus; mandatumque, ut in anatome exponenda ea potiſſimum declaret, quæ chirurgis utilia eſſe cenſentur, & pictoribus. Quare illud tandem effectum eſt, quo Lellius cogitatione omni ferebatur, ut anatomes ſtudium publice inſtitueretur pictorum cauſa. Quod haud ſcimus, an uſquam alibi ſit factum. Erat autem Galvanus non ad id ſolum, ſed ad omnia, quæcumque anatomen poſtulant, aptiſſimus, quippe qui & medicinæ ſcientia præſtabat, & philoſophus erat apprime doctus, induſtrius, diſertus, diligens, ſocero dignus: quæ dixi, ne hominem veriſſimis, juſtiſſimiſque fraudarem laudibus. Sed jam ad propoſitum veniamus, & Academicorum Opuſcula, quibus altera hujus tomi pars conficitur, proferamus.

ACA-

ACADEMICORUM QUORUMDAM OPUSCULA VARIA.

PETRI PAULLI MOLINELLII.

Obſervationes aliquot medicæ.

OBSERVATIO PRIMA.

De oſſis hyoidis luxatione.

De oſſis hyoidis luxatione primus, quod ego ſciam, Valſalva docuit; poſt hunc, ſi clarum atque eruditum in primis virum Joannem Franciſcum Scardona excipias, a quo nuperrime, quod doctiſſimus Beccarius jampridem fecerat, inter anginæ cauſas recenſita eſt, neminem quemquam fuiſſe legimus, qui meminerit ex iis certe, qui ſuperioribus proxime annis integros de re chirurgica, atque adeo de oſſium morbis libros ediderunt; ſive quod locum, ubi luxationem illam in egregio de aure humana tractatu Valſalva commemorat, qui ſecuti ſunt rerum iſtarum ſcriptores non viderint, ſive, quod veriſimilius eſt, novum morbi genus maluerint non proponere, quam unius ſe authoritati obſervationem, quæ unica eſſet, proponentis committere. Rei certe levitas in cauſa eſſe non potuit, ut prætermitterent: ſi quidem oſſis hyoidis luxatio hominem in præſens vitæ diſcrimen adducit, quod aliarum partium luxationes faciunt omnino paucæ, fortaſſis nulla. Itaque conſilium eſt mihi oſtendere luxari os hyoide, neque illa ratione tantum, quæ Valſalvæ ſe obtulit, ſed alia etiam; ſimulque artificium, quo reſtitui facile

 poſſit

poſſit, ſi luxetur, id quod ſibi reticendum eſſe Valſalva duxit, breviter explicare.

Componitur os hyoide ex particulis fere ſeptem, baſi videlicet, duobus proceſſibus, cartilagineis appendicibus, ſi Veſlingium ſequimur, quem in oſſe hyoide demonſtrando ſequi Valſalva ipſe conſueverat, omnino quatuor. Proceſſus, qui & majora cornua appellantur, cum baſi, ad cujus latera ſiti ſunt, cartilaginea ſubſtantia connectit. Tum vero juncturæ huic, tum poſteriori proceſſuum extremitati appendix cartilaginea adnaſcitur utrinque una; hæque oſſeam naturam, procedente ætate, accipiunt pene omnes, non ſecus atque illa, quæ baſim, ut modo dictum eſt, proceſſibus nectit cartilaginea ſubſtantia; ſed hæc aliquanto quidem maturius. Poſteriores appendices capitula etiam dicuntur, priores minora cornua. In proceſſus, & appendices, & pharyngis baſim, fibræ muſculum hyopharyngæum novum a Valſalva dictum conſtituentes inſeruntur; pleræque tamen in eas, quas priori loco poſuimus, appendices.

Non igitur luxari os hyoide poterit, ut humerus, ut digitorum phalanges, ut alia oſſa, quorum articulos cavitas excipit, e qua excidunt cum luxantur. Ad oſſium pubis, ad cartilaginum naſi, ad coccygis præſertim luxationem noſtra hæc accedere propius videtur. Ex aliquot enim particulis conſtat coccyx, cartilaginea ſubſtantia, fere, ut in oſſe hyoide, ſimul connexis. Ac tum luxari coccyx a chirurgis dicitur, cum ita torquetur diſtrahiturque, ut manu opus ſit, qua in ſedem ſuam reponatur. Quod cum in os hyoide, ac nominatim in cartilagineas ejus appendices convenire ex obſervatione quadam Valſalva conjecerit, mirum non eſt, ſi ad eandem rem deſignandam, aut ſatis ſimilem, eodem vocabulo uſus ſit.

Sed jam obſervationem illam expono, uti in ſupra-memorato legitur Valſalvæ Libro „ Putabat bononienſis Mulier, „ quæ craſſiorem bolum deglutiverat carnis non bene manſæ, „ multiſque impoſuerat, ſe divexari a bolo in faucibus hærente: quem ut inde deturbaret, varia manuum, & medicamentorum auxilia tentavit; ſed incaſſum. Jamque elapſum „ triduum erat abſque eo quod ullum cibum, vel potum aſſumere potuiſſet, cum denique a me opem quæſivit. Ego vero omnibus perpenſis, cum in aliqua ex appendicibus cartilagineis oſſis hyoidis luxationem ſuſpicarer, partem, ut anatomica indicabat cognitio, ita digitis contrectavi, & illico

„ per

„ per unam vel alteram contrectationem omnia in priſtinum ſta-
„ tum reducta ſunt ſic, ut immediate abſque ullo deglutiendi
„ incommodo juſculum ſumere, & cibum, Mulier modo deſpe-
„ rata potuerit. „ Hactenus Valſalvæ obſervatio.

Cur autem ex ea conjecturam fecerit luxationis alicujus ex appendicibus oſſis hyoidis, & quam recte fecerit, proclive eſt intelligere. Tanta enim, tamque diuturna faucium moleſtia, ex qua triduum ſublata cibos aſſumendi facultas eſſet, intelligi profecto non poterat, niſi ſi pars faucium aliqua ex iis, quæ deglutitioni inſerviunt, læſa poneretur, neque pars alia poni commodius poſſe videbatur, quam quæ nexum cum pharinge haberet ejuſmodi, ut hoc præter modum diſtracto, diſtrahi illam quoque, ac lædi inſigniter oporteret, eo tamen læſionis modo, quem una vel altera contrectatio potis eſſet plane celeriterque removere. Porro hæc in appendices cartilagineas oſſis hyoidis egregie cadere univerſa quis neget? quas ſcilicet muſculi hyopharingæi major pars pharingi nectat: quibus nimium diſtractis vitiatiſque deglutitionem vitiari neceſſe ſit: quæ cartilagineam naturam ad eas videlicet ſubeundas alterationes, quæ luxationem efficiant, quam volumus, longe aptiſſimam diutius retineant, quam vel ipſa, quæ baſim proceſſibus jungunt, cartilaginea ligamenta. Cartilagines enim, quod flexibilitatem habent cum quadam rigiditate conjunctam, ſuntque præterea quibuſdam in locis ſatis graciles, diſtrahi ſe, ac torqueri ſinunt; neque rumpuntur tamen; manentque tortæ ſic uſque eo, atque diſtractæ, (in quo luxatio illa ſita eſt) dum oppoſita vis accedat, cui ſe haud multum difficiles præbent, ſi retorquere illas conetur, & in priorem ſtatum reducere. Id exemplo ſuo cartilagines oſſis coccygis (ut de aliis ſileam) tum in vivo homine, tum in cadavere vehementer preſſæ apertum faciunt. Ac fruſtra quidem in aliis faucium partibus ac noxis, ſi maxime de adultis ſermo ſit, conditiones tales, niſi ego admodum fallor, Valſalva quæſiviſſet. Scite igitur, & recte impeditæ in memorata muliere deglutitionis cauſam in luxationem alicujus rejecit ex cartilagineis appendicibus oſſis hyoidis.

Non illud hic tamen diſſimulavero futuros forte non paucos, qui enumerata fuiſſe deſiderent, quæ ad bolum deprimendum auxilia ante uſurpaverit mulier, quam ſe Valſalvæ curandam tradiderit; neque minus explicatum velint, quo in colli

loco, & quemadmodum fuerint habitæ, quæ ſalutem pulcherrime, & pene inſperato attulerint contrectationes. Nam cum extranea corpora in œſophago ad plures maneant aliquando dies, neque loco ſe moveant, niſi apto, & ſatis profunde demiſſo organo urgeantur, deturbenturque, nihil eſſe dicent cauſæ, quamobrem huic quoque mulieri idem eveniſſe non ſuſpicemur; contrectationeſque illas, ſi quid profecerint, ad id ſolum, ut hærentem adhuc in œſophago bolum excuterent tandem, inque ventriculum dejicerent, profeciſſe.

Atque id etiam avebunt ſcire, utrum ex eo cibos aſſumere non potuerit mulier, quod deglutire non poſſet, an potius quod deglutitos jam, & fauces elapſos, non poſſet ingerere. Impedita enim deglutitio luxationis, at boli conjecturam ſublata ingerendi facultas confirmaſſet. Sed plane his deſideriis omnibus ſatis Valſalvæ ingenuitas facit, & ſingularis peritia, qui exiſtentis in œſophago boli, ſi ulla fuiſſent indicia, nequaquam reticuiſſet; neque ſe, perpenſis omnibus, de luxatione appendicum oſſis hyoidis ſuſpicatum in eo caſu fuiſſe ſcripſiſſet. Nunc ad obſervationem venio, quam habui ipſe paucos ante annos, quæque ſermoni huic occaſionem dedit.

Chirurgus annos agens vigintiquinque, habitu corporis gracilis, cum neſcio quid e manibus eripere niteretur robuſtioris juvenis, manum hic illius collo iniecit, atque in mutua illa concertatione virium ad priorem & dexteram partem vehementer preſſit. Nihil poſtea ſolidi, nihil liquidi deglutire Chirurgus potuit. Elapſa hora de me auxilium quærit. Perſtabat enim ea, quam modo dicebam, deglutiendi difficultas inter ſummos aſſiduoſque deglutiendi ſtimulos, atque conatus, etiamſi nihil in os quidquam ſumeret ad deglutiendum. Eaque afflictatio ſic opprimebat intrepidum ceteroquin hominem, ut jam multo frigidoque ſudore perfunderetur, & pulſus exiles fierent, nec diu ſe vitam, niſi anguſtiæ vis remiſiſſet, omnino trahere poſſe affirmaret. Haud multum tamen loquendi reſpirandique turbatam facultatem dixiſſem. Larynx utique deformata nonnihil atque incompoſita viſa eſt. Tumor etiam aliquis hanc inter, & muſculum ſterno-maſtoideum dexterum apparuit; ab eoque loco, ſi tangeretur, dolebat non leviter. Hæc videnti mihi, diligenterque animo perpendenti ſe ſe objecit, quam ſupra expoſuimus, Valſalvæ obſervatio, & conjectura. Sed duo faciebant, ut hærerem in conſilio capiendo

non

non parum, ſilentium Valſalvæ videlicet de modo, quo contrectationes illas ſuas executus fuerat; tum vero etiam noxæ differentia plane evidens = ſi quidem in muliere, de qua Valſalva loquitur, deglutitus bovillæ carnis bolus interiores oſſis hyoidis parietes comprimendo in priorem illud partem promoverat: ſecus in eo caſu, qui erat præ manibus, a preſſione extrinſecus habita, in poſteriorem partem os propulſum fuiſſe conſtabat. Hæſitationem demum omnem ſuſtulit inſtituta luxationis oſſis coccygis cum hac noſtra comparatio.

Quemadmodum enim coccygem in priorem partem, itemque in poſteriorem diſtrahi luxarique ea, quam innuimus, ratione in confeſſo eſt, neque aliter in propriam ſedem reſtitui, quam alte immiſſo in anum digito, promotoque oſſe verſus inteſtinum rectum, vel in oppoſitam plagam, prout alterutrius generis luxatio fuerit: ſic cogitavi os hyoide modo in priorem, modo in poſteriorem partem pro cauſarum diverſitate propelli luxarique ipſum quoque; atque ut ſimilis erat morbi ratio, ita curationem eſſe debere non abſimilem. Itaque miniſtro ad caput continendum propoſito, dexteræ manus indicem alte in fauces demiſi dexteram inter tonſillam, & linguæ baſim: indicemque ſimul, & medium digitum ſiniſtræ manus extrinſecus collo tranſverſim admovi eo in loco, qui ſedi reſponderet oſſis hyoidis. Indice ſubinde, quem in fauces immiſeram, os hyoide ſecundum ejus longitudinem in priorem partem promotum flexumque eſt, preſſionem interea illam moderantibus ac dirigentibus extrinſecus appoſitis collo digitis. Ubi id ſemel factum fuit, continuo æger aquæ portiunculam ingerere cœpit, & melius eſſe. Bis iteratum idem ac tertio ſalutem attulit; ut jam libere, quæcumque vellet, poſſet ingerere, & compoſita appareret larynx, & ſedata eſſent omnia.

Jam vero obſervatio hæc probabiliorem (arbitror) reddit Valſalvæ de oſſis hyoidis luxatione opinionem. Præterea luxationis hujuſmodi duo eſſe genera luculenter oſtendit. Artificium denique, quo utrumque curetur, aperte docet; quod enim ad unum genus valet, expoſito, nihil eſt facilius, quam in altero quod valeat pervidere.

Sed erit, cui ſic curatus morbus luxatio non videatur, ſed contorſio muſcularis alicujus fibræ, ſeu aliud quidpiam. Minime hic repetam, quæ ad Valſalvæ conjecturam probandam ſu-

ſuperius allata ſunt, & nobis æque favent omnia, ne dicam magis. Mihi enim ſatis fuerit, ſi minus ſuaſero, quod volveram, morbum certe periculo, & moleſtia pleniſſimum, tum curationem, quæ huic adhibeatur, expeditam omnino, & facilem in aliquo lumine collocaſſe.

Hæc poſtquam ſcripſiſſem, atque in Academia anno 1756 expoſuiſſem, vir mihi in Noſocomio, quod vocant = S. Mariæ de Vita = ſe obtulit annos natus duo & quinquaginta, mediocri ſtatura, atque habitu, cujus dexteræ ſuperiorique anterioris colli regionis parti cum manum quis, qua lapidem diſtringebat, iratus impegiſſet, tanta preſſionem illam, quanta in eo, de quo antea diximus, juvene deglutiendi difficultas conſecuta eſt, anxietas plane non tanta. Nihil difficultate poſt horas minimum tres remittente Noſocomium petiit. Eadem, quæ juveni, curatio adhibita eſt, eodemque omnino exitu.

Binæ ergo ſunt obſervationes, quibus illam, quam ſupra poſui, curandi rationem confirmare poſſim. Non dubito autem fieri eam poſſe multo probabiliorem, ſi obſervationes aliæ, eæque multæ acceſſerint. Itaque eos, qui chirurgicam facultatem exercent, & dexteritate atque induſtria ſatis valent, etiam atque etiam monendos cenſeo, ut ſi detur occaſio, & res patiatur, & ratio ſinat, hanc, quam propoſui, curationem experiri ne prætermittant. Mihi ſi non glorioſum, jucundum erit quidem certe, in curanda hominum valetudine ſocios habuiſſe quamplurimos. Vos interim meas haſce obſervationes, quas in uno luxationis genere habui, libenter accipite, ut alias, quas aliis de rebus jam paro, communicare vobiſcum, ne dubitem. Quanti eæ faciendæ ſint, veſtrum erit cognoſcere.

OBSER-

Observatio altera.

De Venefica Æris indole.

Carnes in vaſis æreis ſtanno fere nudatis ex pinguedine toſtas adjecto ſale, & jam tepefactas ſunt qui in magnis, & certiſſimis venenis ponant; magiſque ſi panis fruſta ad vaſorum fundum ſæpius perfricta, ſicque pinguedine illa admodum imbuta, una cum hujuſmodi carnibus comedantur. Digna res viſa eſt, de qua experimentum ſumeretur, non tam ob illuſtrium virorum, qui in ea opinione fuerint, authoritatem, & famam, quam propter non contemnendam, quæ inde (medicam ætiologiam ſileo) in forenſem juriſprudentiam proventura eſſet, utilitatem. De capite enim fortuniſque agitur hominis in judicium vocati, qui ſciens volenſque cuiquam venenum dederit, quod tale re ipſa ſit; non ita, ſi res pro veneno data innoxia fuerit; quod longe gravius humanas leges in eum ſtatuere æquum erat, qui facto quem, non voluntate ſolum, necaſſet. Me autem non pauca inducebant, ut crederem experimentum illud fore ſine periculo; ingens in primis eorum numerus, quibus ea cauſa exitio eſſe deberet, nec tamen eſſet, vel in tanta cauponum, coquorum aliorumque ejuſmodi hominum negligentia. Columbum itaque ſvillo cum adipe, & ſale in vaſis æreis nunc ſtanno vix, nunc ne vix quidem munitis, & quorum unum veſtigia etiam æruginis præſeferret aliqua, excoctum, hominibus minimum duodeviginti ſingulatim edendum dedimus, ſimulque fruſta panis aliquot non exigua, in ebullientem adipem primum conjecta, tum, eo tepefacto, retracta, atque ad vaſis fundum ſemel bis iterumque fricata ſic, ut venefico onuſta ſucco, nedum imbuta, videri poſſent. Jam vero iis, qui certum adeo venenum comeſſent, quamquam & varia ætate, quod in tanto numero accidere neceſſe erat, & corporis habitu atque temperie plane diſſimili, quid iis, inquam, obveniſſe tandem mali putetis? Scilicet omnino nihil. Atqui illud ſcire convenit fuiſſe ex his unum aliquem imbecillo ſtomacho, eumdemque ad vomendum ſatis proclivem; itemque mulieres tres, quarum una dolorem nondum, atque ira-

iracundiam depoſuerat abs recenti injuria ſuſceptam; alia colicis hyſtericiſque cruciatibus, quo tempore menſes profluere inciperent, nunquam aliquot ab hinc annis non erat obnoxia; tertiam ſtomachi angor, a cibo præſertim, frequens exercebat, & multus. Idque a regio, quem anno ante ſuſtinuerat, morbo initium duxiſſe conſtabat.

Ad hæc nemo unus fuit, qui ad vim veneni præcavendam comprimendamve antidotum ullam ſumpſerit; nemo pariter unus, cui pro antidoto fuerit obſonia in conſimilibus vaſis cocta edendi conſuetudo. Sollicite percunctantibus non paucos a capto experimento dies, num detrimenti quidquam perceperint, ſe ab eo ſic male actos affirmarunt ad unum omnes, ut animo eſſent, ſi occaſio ferret, quam paratiſſimo ad iterandum. Res tota in publicas tabulas relata eſt. Noluimus enim teſtimonium illud, quod ad fidem faciendam valere apud judices plurimum debet, in cauſa de propinato veneno, quæ graviſſima ſit videlicet, ab iis deſiderari.

Neque minus nolui non eam, qualiſcumque eſſet, obſervationem vobiſcum, Sodales ornatiſſimi, doctiſſimique, communicare, atque aliis adjungere obſervationibus, quas notare ac referre in ordinem decrevi ad doctrinam medicam, quantum per me fieri poteſt, augendam, & locupletandam. Veſtrum erit laborem ac ſtudium hoc meum benigno animo excipere. Nihil mihi accidere gratius poterit, quam ſi illa protulero, quæ vobis grata eſſe ſentiam; præſertim ſi judicium veſtrum, cui mirum quantum tribuo, acceſſerit, quo, quæ ipſe cogitavero, & mihi fiant, & aliis probabiliora.

OBSERVATIO TERTIA.

De rupto patellæ tendine.

PAtellæ tendini tranſverſim aliquando findi cum Achillis tendine, aliiſque totius coporis robuſtiſſimis tendinibus commune eſt. De quodam certe memini proceræ ſtaturæ, & maxime lacertoſo homine, qui ſcalam præceps deſcendens inflexo concidit genu, cum maxime unco eniteretur, ne id accideret, in quo cavum proxime infra cutem duos ſupra patellam tranſverſos digitos deprehenſum eſt, dicti modo tendinis latitudinem æquans, quod diductius percipiebatur flexa tibia, anguſtius extenſa. Primum quæ dolorem, tumoremque coercerent, impoſita ſunt; tum glutinantia, ac topica. Ea vero ſemper adhibita deligatio, qua & crus extenſum, & extrema diſſecti tendinis, quam fieri maxime poſſet, adducta detinerentur. Tamen ab ea curatione ad duos, & amplius menſes producta eatenus non convaluit, ut libere ambulare poſſet. Quin perſæpe, cum id faceret per acclivia præſertim loca, etiamſi fulcro uteretur, pronus corruebat.

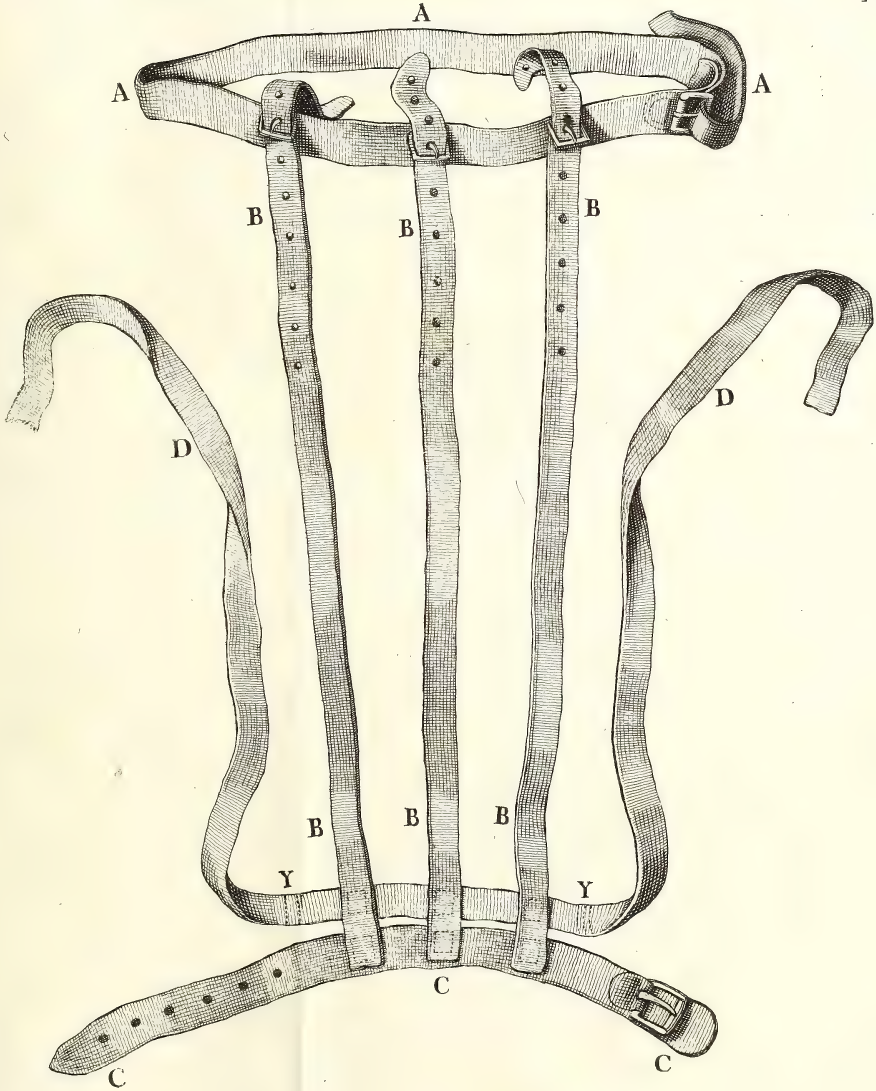
Nihil hic proficientibus, quæ ad genu continendum efficacia ſunt, ne vinctura quidem illa, quæ Muſchembroechium Authorem habet, & nonnullis ex orichalco laminis ad latera invicem articulatis componitur; id ex eo fieri in animum induxi, quod hujuſmodi artificia tendinis, ac muſculorum, a quibus is proficiſcitur, vices rite non implerent. Nam cum ex muſculis quatuor, qui in illum tendinem deſinunt, tres originem ducant a femore, alter ab oſſe ilio; tendo autem patellæ inſeratur, quæ mobilis ipſa ſit, & ligamento prædita, quod ſumma tibia finitur; ſintque cum eæ origines, tum hic finis quædam quaſi fixa puncta, quæ muſculorum deductique inde tendinis in patellæ, tibiæque motibus actionem obfirment, ac regant, nullum profecto erit vincturæ genus huic caſui accommodatum, quod a ſuperiori parte femori, aut oſſi ilio, aut certe loco, qui alterutrum ſuppleat, ab inferiori ſummæ tibiæ firmiter non alligetur.

Itaque vincturam excogitavi conflatam potiſſimum ex faſciis duabus, quarum altera AA (vide Tab.) ventri,

altera C C C genu ac tibiæ infra affectum tendinem circumducitur, & munitam utramque fibula. Faſcias habenæ B B B nectunt tres, ex quibus alia interiorem, exteriorem alia, tertia priorem femoris regionem reſpicit; ſuntque omnes ſtabiliter inferiori faſciæ, ſuperiori autem fibulis, aliove artificio ſic adnexæ, ut remitti pro re nata, intendique poſſint. Ut faſciæ, ſic habenæ molli ex corio ſunt. Quæ vero ad continendas magis, firmandaſque habenas paulo arctior faſcia adiecta eſt D D media ejus pars V V conſimili ex corio conſtet, ex zona lino texta vel ſerico extrema D D.

Vinctura homini haud mediocri ſubſidio fuit, neque huic modo, ſed aliis poſtea in ſimilem ambulandi difficultatem implicitis. Eam vero libentius propono, quod locum hunc, vel noviſſimi ampliſſimique rei chirurgicæ ſcriptores intactum reliquerunt. Neque ſpes abeſt, quin tale artificium eos juvet, quibus laxatus is tendo, quacumque demum de cauſſa, fuerit. Quid ni illos etiam, in quibus diſrupta patella ipſa nullo modo reduci poteſt?

PAUL-


A
A
A
B
B
B
D
D
B
B
B
Y
Y
C
C
C

PAULLI FRISII CLER. REGUL. S. PAULLI.

De inæqualitatibus motus Terræ, & Lunæ circa axem ex Aſtronomorum hypotheſibus.

I.

De Libratione Lunæ.

LUnam æquali tempore circa Terram, & circa ſe ipſam volvi manifeſtum inde eſt quod eædem fere lunares maculæ toto menſe ſynodico obvertantur Terræ, quodque ſecluſo diurno motu, ob ſolam vim projectionis, gravitatemque, parallelæ ſibi invicem manerent diametri Lunæ omnes, & tota Lunæ ſuperficies revolutionibus ſingulis conſpiceretur. Quod vero non ſemper maculæ omnino eædem nec ſine exiguis librationibus obvertantur Terræ, partim oritur ex motu diurno Terræ ipſius, (libet enim hunc etiam in præſens ſupponere) partim ex paralleliſmo lunaris axis, & partim etiam ex quo Luna circa axem angulos, & circa Terram areas deſcribat tempori proportionales. Fit enim ob motum Terræ, ut non omnino eadem Lunæ facies & mane, & veſpere videri poſſit: & ob paralleliſmum lunaris axis fit, ut pro vario loco nodorum lunaris orbitæ, & latitudine Lunæ varia modo quædam boreales maculæ, modo aliæ meridionales in conſpectum prodeant: ſicuti ob æquabilem motum Lunæ circa axem, & inæquabilem circa Terram fit, ut pro vario loco Lunæ in ſua orbita aliæ maculæ tum ab ortu, tum ab occaſu detegantur alternis vicibus. Primam atque alteram librationis ſpeciem detexit Galilæus: tertiam propoſuit Ricciolus cum Lunam in circulo excentrico circa Terram moveri voluit, & facie eadem ſemper ipſius circuli centrum reſpicere. Newtonus vero cum ellipticas orbitas circularibus ſubſtituiſſet, in literis ad Mercatorem datis, & in Propoſ. XVII. lib. III. animadvertit eamdem Lunæ faciem ad ſuperiorem focum ellipſeos converti ſemper, circa quem focum deſcripti anguli, ut etiam Sethus Wardus invenerat, ſunt proportiona-

les temporibus quam proxime. Uniuſcujuſque librationis limites ante omnia calculo definire, & cum aſtronomicis obſervationibus conferre oportet.

Sint igitur (*Fig.* 1.) C, & M Terra, & Luna, & ſit ſpectator aliquis in Q, & inde ad Lunæ ſuperficiem ducatur tangens QO: tum ſi ſpectator, ob motum diurnum Terræ, ex Q in K tranſeat, ducatur tangens alia KHX. Erunt O, & H limites lunaris ſuperficiei e Terra viſæ, & librationis diurnæ angulus OMH æqualis erit angulo QXK, adeoque, cum fiet maximus, æquabitur diametro Terræ e Luna viſæ. Eſt autem apparens Lunæ diameter 36′ $16\frac{1}{2}$″, & veræ diametri Lunæ, & Terræ ſunt inter ſe ut 100 : 365 circiter, ſive ut 20 : 73. Diurna igitur Lunæ libratio ſub Æquatore ad $2\frac{1}{5}$° aſcendet, & inde pergendo ad Polos minuetur in ſimplici ratione coſinus latitudinis, & in latitudine 45° arcus OH fiet circiter $1\frac{1}{2}$°, & ſinus verſus LO ad radium MO ſe habebit circiter ut 1 : 1000. Major erit alia libratio, quæ ex paralleliſmo lunaris axis, & varia latitudine Lunæ orietur. Si enim ſpectator aliquis ſit in K (*Fig.* 2.) & ſint M, N loca maximæ, & minimæ latitudinis, & axis Lunæ ſibi utrobique parallelus maneat, ducanturque ex K binæ tangentes KO, KF, atque in loco N ducatur tangens alia *o*Z*k*, quæ ſit tangenti ΘK parallela; librationis angulus *o*NF æqualis erit angulo *k*ZK, ſive angulo ZKO, vel denique differentiæ maximæ, & minimæ latitudinis ipſius Lunæ. Quare cum inclinatio lunaris orbitæ ad Eclipticam ſit circiter 5° $8\frac{1}{2}$′, maxima latitudinis libratio fiet per arcum $10\frac{1}{4}$° circiter: cujus ſinus verſus cum ſit ſexdecim partium milleſimarum radii, maculæ extremæ Borealis, ſive Auſtralis marginis eo ſpatio intra Lunam progredi videbuntur, quod ad Lunæ radium ſe habeat ut 2 : 125.

Porro ſi Luna in orbita MNM (*Fig.* 3.) ita revolveretur, ut eamdem diametrum AB ſemper obverteret centro L, quæ erat Riccioli hypotheſis, a perihelio, aut aphelio M ad quadraturas N tranſeundo, diametrum ipſam AB a radio CN retraheret angulo CNL, qui, poſita excentricitate CL partium 0.055 diſtantiæ mediæ Lunæ a Terra, eſt circiter $3\frac{1}{5}$°. At ſi diameter eadem AB circa Lunæ centrum deſcribat angulos proportionales temporibus, & Luna ellipſim MNM circa Terram in foco C poſitam deſcribat; ducta in loco N

recta

recta rNR, quæ ſit parallela diametro AB in loco M, angulus RNB proportionalis erit areæ MCN, & ad angulum rectum ſe habebit ut area MCN ad quartam areæ ellipticæ partem MLN, & angulus LNB ſe habebit ad rectum angulum, ut triangulum CNL ad aream MLN, ſive ut $\frac{1}{2} . CL . LN : \frac{1}{8} . \frac{314}{50} . LN . LM = 4 . 50 . 55 : 314000 = 11 : 314$. Erit igitur angulus $LNB = \frac{11 . 90^{\circ}}{314} = 3\frac{1}{6}^{\circ}$, & totus angulus CNB, vel, ducta ad vectorem radium CN perpendiculari TN, angulus TNa erit $= 6\frac{1}{3}^{\circ}$, & ſumma duorum angulorum hujuſmodi in binis quadraturis oppoſitis, ſeu totus librationis angulus erit $= 12\frac{2}{3}^{\circ}$: cujus anguli coſinus cum ſit 0.975, ſpatium, quod orientales, ſive occidentales maculæ in extremo margine primum ſedentes intra Lunæ diſcum conficient, ſe habebit ad Lunæ radium ut $25 : 1000$, ſive ut $1 : 40$.

Neque Grimaldi obſervationes librationem majorem Lunæ in longum, latumque adjudicant. Minimam enim diſtantiam centri Tychonis a limbo Lunæ Auſtrali invenit ipſe 22, aut 24 earum partium, quarum radius 100 complectebatur, maximam 38, aut 40. Unde cum poſito ſinu toto 100, ſinubus verſis 22, 24, & 38, 40 reſpondeant arcus 47°, 48½°, & 58½°, 60°; maximæ, & minimæ diſtantiæ differentia, ſeu tota libratio in latum, & quæ obſervatione, & quæ calculo definitur, convenient inter ſe invicem, quantum ſaltem in hujus generis obſervationibus ſufficiat. Minimam pariter diſtantiam maculæ Grimaldæ a limbo orientali Lunæ, & maris criſium a limbo occidentali, 3, aut 4 earumdem partium Grimaldus deprehendit, maximam vero diſtantiam ſemel 14, plerumque 12, aut 11. Quare cum ſinubus verſis 3, 4, & 11, 12 reſpondeant arcus 14°, 16°, & 27°, 28½°; ea Lunæ libratio in longum ex obſervationibus colligetur, quæ ſupputatam jam librationis periodicæ, & diurnæ ſummam non ſuperet. Hevelii, & Bullialdi obſervationes, quas omnes ſimul Ricciolus Lib. 3. Aſtron. Refor. copioſe retulit, licet parum cum aliis Grimaldi congruant, quod omnium incertitudini poteſt tribui, & difficultati notandi maculas, ubi tranſverſim prope limbum videntur, non tamen majorem Lunæ librationem exhibent, quam quæ ſuperius ſtatuta eſt. Cum enim Grimaldæ maculæ, & maris criſium confinia limbo lunari

nari proxima quandoque Hevelio, & Bullialdo viſa ſint, maximam tamen diſtantiam partium $5\frac{1}{2}$ Bullialdus, Hevelius 6 eſſe cenſuit.

Galilæus cum non eamdem penitus Lunæ faciem obverti Terræ agnoviſſet, & diurnæ, ac periodicæ librationis, quæ fit in latum, attigiſſet rationem, & cauſſam phyſicam, easdem etiam Grimaldæ maculæ, & maris criſium obſervationes præoccupavit, quibus diu poſtmodum Grimaldus, Hevelius, Bullialdus, & Ricciolius incubuerunt. Ita enim obſervationes ſuas deſcripſit Galilæus Dial. I. §. ILX. *Sono nella Luna due macchie particolari, una delle quali, quando la Luna è nel Meridiano, guarda verſo Maeſtro, e l' altra gli è quaſi diametralmente oppoſta; e la prima è viſibile anco ſenza il Teleſcopio, ma non già l' altra. E' la Maeſtrale una macchietta ovata, diviſa dalle altre grandiſſime, l' oppoſta è minore, e parimente ſeparata dalle grandiſſime, e ſituata in campo aſſai chiaro, in amendue queſte ſi oſſervano molto manifeſtamente le variazioni già dette, e veggonſi contrariamente l' una dall' altra, ora vicine al limbo del diſco Lunare, e ora allontanate, con differenza tale, che l' intervallo tra la maeſtrale, e la circonferenza del diſco è più che il doppio maggiore una volta che l' altra: e quanto all' altra macchia (perchè l' è più vicina alla circonferenza) tal mutazione importa più che il triplo da una volta all' altra. Di quì è manifeſto, la Luna, come allettata da virtù magnetica, coſtantemente riguardare con una ſua faccia il globo terreſtre, ne da quello divertir mai.* Quibus etiam poſterioribus verbis viſus eſt Galilæus Newtoni hypotheſim de cauſſa obverſionis ejuſdem ſemper hemiſphærii Lunæ ad Terram anteceſſiſſe.

Newtonus in Propoſ. XXXVIII. Lib. III. ſtatuit Lunam initio fluidam, attractione Terræ, ſphæroidis oblongæ formam induiſſe, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum Terræ, & pedibus 186 ſuperaret diametros alias perpendiculares. Propoſitioni corollarium illud adjecit Newtonus. *Inde autem fit ut eadem ſemper Lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium, eſſent longe tardiſſimæ: adeo ut facies illa, quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum reſpicere; neque ſtatim abinde*

re-

retrahi, & in terram converti. Newtoni conjecturam Daniel Bernoullius cap. III. de fluxu, & refluxu maris §. v., & vi. longius etiam perduxit. Cenſuit enim quod ſi excluſo diurno motu major Lunæ axis aliquantulum aberrare inciperet ab ea linea, quæ centra Terræ, & Lunæ conjungit, primo quidem vis omnis Terræ nimis parva eſſet, & prorſus impar retrahendo axi in locum priſtinum. At continuato poſtmodum motu periodico, contendit lunaris axis, & lineæ centrorum obliquitatem eouſque augeri poſſe, ut vis Terræ retrahendo ad lineam ipſam lunari axi ſufficiat. Unde non aliam librationem Lunæ eſſe voluit Daniel Bernoullius, quam quæ oritur ex varia Lunæ a Terra diſtantia, & ex varia motus periodici velocitate. Inde etiam illud commodi haberi authores alii obſervarunt, quod fluidæ partes Lunæ ob Terræ vim enormi æſtu agerentur, quo ad pedes 93 aſſurgerent, & ſolidas partes obruerent, niſi omnium ſuperficies ad ſphæroidis oblongæ, & maxima diametro Terram ſemper reſpicientis formam initio ſe compoſuiſſet.

At primo cum Lunæ maria non circa diſci nobis obverſi medium, ubi vis perturbatrix eſt maxima, ſed non longe ab extremo limbo conſiſtant, & ſint parvæ extenſionis ſingula, minime communicantia inter ſe invicem, & pluribus inſulis interſperſa; ii tanti æſtus in Luna haberi nequaquam poſſent, etiamſi Luna, aut non omnis primitus fuiſſet fluida, aut eam dumtaxat formam induiſſet, quam mutua attractio partium, & motus diurni ratio poſtularet. Deinde ſi ob parvitatem virium perturbatricium oſcillationes lunaris axis eſſent longe tardiſſimæ, non poſſet ipſe ita deflecti a parallelifmo, ut conſtanter dirigatur ad alterum focum orbitæ, & Luna eodem tempore circa ſe ipſam, & circa Terram revolvatur. Qui enim axis alicubi cum radio vectore orbitæ coincidit, ſecluſo diurno motu antea impreſſo, oſcillationibus longe tardiſſimis non niſi paululum poſt emenſum quadrantem evadet radio vectori perpendicularis, & continuato deinde motu alter ipſius axis vertex centro accedet propius, ac fient contrario ſenſu oſcillationes, eæque compenſabunt ſe ſe invicem, ac demum parallelifmum axis reſtituent. Quod ſi vero oſcillationes ex attractione Terræ ortæ majores eſſent; & lunari axi retrahendo ad vectorem orbitæ radium ſufficerent; motus omnis oſcillatorius deberet omnino fieri circa axem radio vecto-

ri,

ri, & plano lunaris orbitæ perpendicularem: cum tamen diurni motus Lunæ axis inclinetur ad axem Eclipticæ 2°, ad Eclipticæ planum 88°, ad planum lunaris orbitæ 82° 51½′. Itaque hemiſphærii lunaris obverſi nobis phœnomenon ex quantitate motus diurni pendet: motus autem diurni eadem ratio in Luna eſſe poteſt, quæ in Terra, & Jove, & Planetis aliis, nimirum ipſa vis projectionis, quæ motus periodici cauſſa eſt. Sunt quippe inter ſe nexa, atque affinia phœnomena, motus periodicus Planetarum, inclinatio orbium, & diurni, ac periodici motus proportio: & quidem motus periodicus pendet ex quantitate vis impreſſæ: orbium poſitio pendet ex directione ejuſdem vis: proportio autem velocitatis periodici, & diurni motus pendet ex varia a centro diſtantia, in qua vis ipſa impreſſa eſt, ut ex notiſſimis Mechanicæ theorematis conſequitur.

II.

De Figura Lunæ.

Si homogenea, & fluida eſſet Luna, ratione diurni motus oblatæ, ratione terreſtrium virium oblongæ ſphæroidis formam acquireret, compoſitis autem centrifugis partium ſingularum, & perturbatricibus Terræ viribus ea eſſet figura Lunæ, quæ gigni poſſet ellipſi circa minorem axem ſic revoluta, ut vertex majoris axis ellipſim aliam deſcribat, & ſint bini axes, atque axis tertius, qui binos ſecat ad rectos angulos, inter ſe in ratione reciproca virium in verticibus ſingulis agentium: quod idem in Terra etiam contingeret, ſi mutuæ attractioni partium, ac vi centrifugæ vis perturbatrix Lunæ accederet. Hujus theorematis demonſtrationem exhibebimus in eo opere, cui modo incumbimus, & quo univerſam gravitatis theoriam, aut theoriæ ſaltem elementa præcipua complectemur. Modo ut inveniamus ſemiaxium lunarium differentiam, & quæ ex motu diurno Lunæ, & quæ ex attractione Terræ ortum duceret, ſint a, & r radii mediocres Terræ, & Lunæ, t, & T periodica tempora circa axes, & gravitas ſub Æquatore Lunæ ſe habeat ad vim centrifugam ut $g : c$. Quia quantitates materiæ in Terra, & Luna ſunt inter ſe ut 73 : 1, quemadmodum inferius ex phœnomenis præceſſionis æquinoctiorum, & nutationis terreſtris axis eruemus, vis acceleratrix

in

in ſuperficie Lunæ ad vim acceleratricem in ſuperficie Terræ ſe habebit ut $\frac{1}{r^2} : \frac{73}{a^2}$. Sit gravitas ſub æquatore Terræ ad vim centrifugam pariter ſub æquatore ut G : 1. Quia vis centrifuga ſub æquatore Terræ ſe habet ad vim centrifugam ſub æquatore Lunæ ut $\frac{a}{t^2} : \frac{r}{T^2}$; compoſitis rationibus erit gravitas ſub æquatore Lunæ ad vim centrifugam, ſive erit $g : c = G . a^3 . T^2 : 73 . r^2 . t^2$. Quod ſi fiat igitur ut $\frac{1}{G} : \frac{1}{230}$, quæ in homogeneitatis hypotheſi eſt differentia ſemiaxium Terræ per minorem ſemiaxem diviſa, ita $\frac{c}{g}$ ad quartum, prodibit differentia ſemiaxium Lunæ homogeneæ $= \frac{73 . r^3 . t^2}{230 . a^3 . T^2}$. Eſt autem $t = 23^h\, 56' = 1436'$, $T = 27^d\, 7^h\, 43' = 39343'$, & $a : r = 365 : 100 = 73 : 20$. Unde erit eadem differentia $= \frac{1649676800}{189717984402983} = \frac{1}{115009}$, minor certe quam ut obſervationibus poſſit detegi.

Cum lunarium ſemiaxium differentia, ob tarditatem diurni motus, præ differentia ſemiaxium terreſtrium adeo ſit parva, viciſſim fluxuum altitudo, ob majorem Terræ attrahentis maſſam, in lunaribus maribus eſſet major, ſi aut fluida eſſet Luna omnis, aut Lunæ ſolidæ ſuperficies maribus undique operiretur. Demonſtratum eſt enim a Mac-Laurino Lib. 1. §. LXVIII. de fluxionibus quod ſi gravitas mediocris in ſuperficie alicujus Planetæ vocetur g, & ſit V vis, quæ in mediocri a centro diſtantia, ob actionem Planetæ alterius attrahentis, gravitati in centrum adjicitur, & vis hujuſmodi præ tota gravitate ſit ſatis parva; differentia ſemiaxium ſphæroidis oblongæ, cujus figuram actione ipſa, in eadem fluiditatis, & homogeneitatis hypotheſi, Planeta indueret, ad ſemidiametrum mediocrem ſe habebit ut $15 V : 4 g$. Quare ſi Lunæ diſtantia a Terra vocetur R, & ſit in ſuperficie Lunæ $V = \frac{73 . r}{R^3}$, & $g = \frac{1}{r^2}$; fiet differentia lunarium ſemiaxium $= \frac{15 . 73 . r^3}{4 R^3}$, ac denique cum ſit $R : a = 60 : 1$, & $a : r = 73 : 20$, adeoque $R : r = 219 : 1$, differentia quæſita evadet $= \frac{1}{38369}$, & ſemidifferentia $= \frac{1}{76738}$.

Si mediocris telluris ſemidiameter cum Newtono ſtatuatur pedum Pariſienſium 19615800, erit differentia ſemiaxium ſphæroidis oblongæ, quam Luna fluida, & homogenea, aut Lunæ maria undique affuſa ob attractionem Terræ exhibere poſſent $= \frac{20 \cdot 19615800}{73 \cdot 38369} = 140$, & differentia ſemiaxium ſphæroidis oblatæ, quæ ex motu diurno Lunæ ortum duceret, erit $= 46\frac{3}{4}$.

Newtonus vero differentiam illam dumtaxat conſideravit, quæ fluxui, & refluxui noſtrorum marium eſſet analoga, aliiſque calculis inſtitutis deprehendit Lunæ maria ob vim Terræ attolli oportere pedibus 93. Calculorum ſeries hæc eſt. In Corollario Propoſ. XXXVI. Lib. III. Newtonus ex proportione vis centrifugæ ſub æquatore Terræ ad vim perturbatricem Solis, collegit maria noſtra ob vim Solis attolli pede uno, & digitis $11\frac{1}{30}$. Deinde in Propoſ. XXXVII. ex proportione maximorum, minimorumque æſtuum poſt ſyzigias, & quadraturas Solis, & Lunæ, invenit vim Solis ad Lunæ vim ſe habere ut 1 : 4, 4815, atque inde eruit maria noſtra ob vim Lunæ elevari pedibus $8\frac{3}{5}$, & binis viribus conſpirantibus uſque ad pedes $10\frac{1}{2}$, aut etiam $12\frac{1}{2}$ elevari poſſe, ſi Luna in perigæo ſit poſita, & æſtus ventis ſpirantibus adjuvetur. Id explicandis marium phœnomenis ſatis eſſe cenſuit Newtonus: in iis enim, quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in mari Pacifico, & maris Atlantici, & Æthiopici partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum 6, 9, 12, & 15. In Corollario autem quinto ejuſdem propoſitionis invenit ipſe quantitates materiæ in Terra, & Luna eſſe inter ſe ut 39, 788 : 1, ac denique Propoſitionem XXXVIII. ſic protulit. *Si corpus lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis, & ultimis elevandum eſſet ad vim Lunæ, qua mare noſtrum in partibus & ſub Luna, & Lunæ oppoſitis attollitur ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim; ideſt ut* 39, 788 : 1, *&* 100 : 365, *ſive ut* 1081 : 100. *Unde cum mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes* $8\frac{3}{5}$, *fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes* 93. Singula ſingillatim examinare neceſſe eſt.

In primis maria noſtra ob vim Solis attolli debere pede uno,

uno, & digitis $11\frac{1}{36}$ demonſtratum a Mac Laurino eſt §. 688. Lib. I. de Fluxionibus. At vero ſummam vel differentiam duarum virium Solis, & Lunæ ex diverſorum æſtuum magnitudine perperam æſtimari animadvertit Daniel Bernoullius Cap. VI. de fluxu, & refluxu maris. Etenim motus omnes poſteriores maris prioribus afficiuntur aliquo modo, augenturque, atque inde fit ut mare pluribus diebus agitatum, turbatumque, altius poſt ſyzigias, & quadraturas aſſurgat, quam ferat virium ſolarium, & lunarium proportio. Inſuper circa oras maris, ubi obſervationes æſtuum ſunt habitæ, augetur æſtuum magnitudo ex littorum loco, vadorumque incurſibus, ac reflexionibus, majorque fit quam in libero, apertoque mari eſſe debeat. Unde hoc ipſo quod Newtoniana proportio virium altitudinem littoralis æſtus exhibeat, pro mari aperto, & libero exhibebit majores æſtus, quam vere habeantur. Bernoullius ex intervallo, & duratione æſtuum proportionem virium Solis, & Lunæ accurate deduci poſſe exiſtimavit: proportionem autem mediam conſtituit 2 : 5, quæ parum differt ab alia 147 : 356, quam inferius ex phœnomenis præceſſionis æquinoctiorum, & nutationis terreſtris axis eruemus. Hoc poſito ſi maria noſtra ob vim Solis attollantur pede uno, & digitis $11\frac{1}{36}$, ob vim Lunæ attollentur pedibus $4\frac{2}{3}$ circiter. Quod ſi altitudo noſtrorum fluxuum ob vim Lunæ ad altitudinem fluxuum lunarium ob vim Terræ ſe habeat in ratione compoſita gravitatis acceleratricis Terræ in Lunam ad gravitatem acceleratricem Lunæ in Terram, & diametri Terræ ad Lunæ diametrum, ſive ut 1 : 73, & 365 : 100 conjunctim, adhuc lunarium fluxuum altitudo eſſet pedum 93, ut Newtonus ipſe ſtatuerat.

At vero ſine ulla demonſtratione a Newtono aſſumpta eſt proportio illa fluxuum terreſtrium, & lunarium. Ut accurata proportio fluxuum certo innoteſcat, adeamus ipſum Mac-Laurini theorema, quod antea indicatum eſt. Sint P, & p altitudines illæ, ad quas Lunæ maria ob vim Terræ, & maria noſtra ob vim Lunæ elevarentur. Juxta Mac-Laurini theorema erit $\frac{P}{r} = \frac{15 \cdot 73 \cdot r^3}{4\,R^3}$, & $\frac{p}{a} = \frac{15\,a}{R^3} : \frac{4 \cdot 73}{a^2} = \frac{15\,a^3}{4 \cdot 73 \cdot R^3}$, adeoque erit $P : p = 73^2 \cdot r^4 : a^4$, ſcilicet in ratione non ſimplici,

 ut

ut Newtonus exiſtimaverat, ſed duplicata vis acceleratricis Lunæ in Terram ad vim acceleratricem Terræ in Lunam, & quadruplicata diametri Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim. Si rurſus fiat $a : r = 73 : 20$, erit $p : P = 5329 : 16000 = 1 : 30$ circiter: adeoque ſi mare noſtrum vi Lunæ attollatur pedibus $4\frac{3}{5}$, in hypotheſi Lunæ maribus undique coopertæ, attollentur maria ipſa ob vim Terræ pedibus 140, prorſus ut ſupra a nobis ſtatutum eſt, atque in hypotheſi Lunæ totius fluidæ maxima ipſius diameter ſuperaret diametros omnes perpendiculares. Hoc ipſo gravius evaderet argumentum, quo Newtonus conjecerat eamdem ſemper Lunæ faciem obverti Terræ oportere. At cum tot ſint conjecturæ illius difficultates, & diurnus motus in aliis Planetis pendeat ex ſola vi projectionis, quæ motus etiam periodici cauſſa eſt, ac denique omnis libratio Lunæ pendeat ex varia motus periodici velocitate, & loco nodorum orbitæ circa Terram deſcriptæ; loco hypotheſeos dumtaxat examinabimus, quæ differentiis axium $\frac{1}{115009}$, & $\frac{1}{38369}$, ac binis ſimul viciſſitudines diurni motus Lunæ reſpondeant.

III.

De Figura Terræ.

Si æquatoris terreſtris radius vocetur A, & ſemiaxis diurni motus B, erit $\frac{B^2}{A}$ radius qui meridianum oſculatur in communi æquatoris interſectione, & radius meridianum in polis oſculans erit $\frac{A^2}{B}$, erunt ſcilicet radius ille, ſemiaxis minor, æquatoris radius, atque alter oſculi radius geometrice proportionales. Unde quia radius æquatorem oſculans eſt ipſe æquatoris radius, & minimi arcus ſimiles ſunt radiis oſculatoribus proportionales, erit prior meridianis gradus ad gradum æquatoris ut $B^2 : A^2$, ad ultimum autem gradum in polis ut $B^3 : A^3$, & ob exiguam ſemiaxium differentiam primus idem gradus ſe habebit ad differentiam gradus æquatoris, ut ſemiaxis minor ad duplam differentiam ſemiaxium, atque ad differentiam poſtremi, ac polaris gradus ſe habebit ut idem ſemiaxis minor ad triplam ſemiaxium differentiam. Et quia inſuper in hypotheſi

theſi homogeneitatis eſt $A : B = 231 : 230$, ut a Clairautio nitide demonſtratum eſt, & primus meridiani gradus cum Bouguerio ſtatui poteſt hexapedarum 56753, erit ultimus meridiani gradus 57493, & gradus æquatoris 57247, æquatoris ambitus 20608920, radius 3280108, ſemiaxis minor terræ 3265909, & differentia omnis ſemiaxium 14199. Denique quia totus æquatoris ambitus ſecundis 86164 abſolvitur, erit ſpatium uno ſecundo abſolutum pedum 1435, cujus quadratum per diametrum diviſum dabit ſinum verſum ejuſdem arcus linearum 7, 537: & ſi longitudo penduli ſecundis ſingulis oſcillantis ſub æquatore cum Bouguerio ſtatuatur lin. 439, 21, & ſpatium uno ſecundo perpendiculari lapſu percurſum 2167, 41; erit pondus ad vim centrifugam ſub æquatore ut $2167, 41 : 7, 537 = 287\frac{1}{2} : 1$, & tota gravitas ad vim centrifugam ſe habebit ut $288\frac{1}{2} : 1$.

Porro in Terra ſphæroidica ab æquatore pergendo ad Polos radii oſculatores, & minimi arcus ſimiles augeri debent in duplicata ratione ſinuum latitudinis: adeoque poſita differentia primi, & poſtremi gradus hexapedarum 740, erunt gradus alii ut in tabula ſequenti.

Meridiani gradus,	*Latitudo loci,*		*Incrementa graduum,*	*Gradus toti,*	*Gradus obſervati,*	*Differentiæ.*
Peruvianus	0		0	56753	56753	
Africanus	33°	18′	223	56976	57037	—61
Italicus	43	1	344	57097	56979	+118
Gallicus prior	43	31	351	57104	57048	+56
Alter Gallicus	49	23	426	57179	$57074\frac{1}{2}$	+105
Lapponicus	66	20	621	57374	57422	—48

Pariter ſi ſit φa differentia ſemiaxium Terræ, & ſit T ſinus latitudinis paralleli alicujus circuli, facile admodum oſtendi poteſt æquatoris gradum ad gradum paralleli ſe habere ut $1 : 1 + \frac{\varphi a . T^2}{B} . \sqrt{(1 - T^2)}$: unde in latitudine 43° 32′ prodibit paralleli gradus hexapedarum 41588. Caſſinus, & Caillius in Galliis deprehenderunt eumdem gradum hexapedarum 41618: atque ea determinatio a Bouguerio Sect. VI. §. XXXI. de figura Terræ pluris facta eſt, quod a determinatione meridianæ lineæ non penderet. Ita cum obſervatus meridiani

gra-

gradus in ea latitudine hexapedis 56 minor ſit, paralleli gradus 30 hexapedis major erit, quam juxta hypotheſim terræ ſphæroidicæ, & proportionem terreſtrium axium 230 : 231 eſſe oporteret.

Bouguerius Sect. I. §. V. ingenue faſſus eſt ſe intra limites ſecundorum 3, aut 4 ſuſpectas habere illas obſervationes, quibus fixarum diſtantia a vertice, & altitudines poli in locis ſingulis determinantur: ſuſpicioniſque ſuæ eam rationem protulit quod repetitæ obſervationes 3'', aut 4'' vere inter ſe differrent. Id etiam ex ſectione quinta ipſius Bouguerii manifeſtum eſt ubi fixarum diſtantiæ a vertice iis obſervationibus determinantur, quæ 2'', 3'', & quandoque etiam 4'' differunt inter ſe. Error hujuſmodi ſi pro utroque arcus extremo duplicetur, & per tres gradus, quos prope æquatorem Bouguerius dimenſus eſt, diſtribuatur, unius meridiani gradus menſuram intra 2'' ſuſpectam faciet. Unde cum terreſtres menſuræ hexapedis fere decem pro gradibus ſingulis diſſentirent inter ſe invicem, erroris limites ſtatuit Bouguerius intra $2\frac{1}{2}''$, aut 40 circiter hexapedas. Id ipſum fere ſtatuit Condaminius par. II. §. XXVI. de tribus prioribus meridiani gradibus. Id vero potiori jure de gradu etiam Lapponico dici debet cum binis obſervationibus diſtantia parallelorum Torneæ, & Kittis prodierit 57' 26'', 93, & 57' 30'', 42, ac medio arithmetico ſumpto amplitudo arcus 57' 28'', 67 a Maupertuiſio ſtatuta ſit. Ex illa cæleſtis arcus amplitudine, menſuriſque aliis terreſtribus, quinque nimirum triangulorum combinationibus inter ſe convenientibus meridiani gradus in latitudine 66° 20' Maupertuiſio prodiit hexapedarum 57437, 9, & correctis cum Bouguerio refractionibus 57422. Septem aliæ triangulorum ſeries breviorem gradum exhiberent ſingulæ hexapedis $6\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$, 27, $30\frac{1}{2}$, $32\frac{1}{2}$, 36, $51\frac{1}{2}$, ut apud Maupertuiſium, cap. III. de Figura Terræ, videre eſt. Quare medium ex omnibus ſumendo Lapponicus meridiani terreſtris gradus rotundo numero hexapedarum 57400 definiri poſſet.

Alembertius in præfatione par. III. de Mundi ſyſtemate Aſtronomicæ diligentiæ limites ſecundorum duorum aſſignavit, ac candide fatendum cenſuit hexapedarum 60 differentiam in gradu integro eam eſſe, quæ exiguis obſervationum aſtronomicarum erroribus poſſit tribui Ita cum Lapponicus gradus Americano comparatus non niſi hexapedis 48, aut potius 26

dum-

dumtaxat minor prodeat, quam ferat proportio axium 230: 231, figuram Terræ ſub æquatore, & polari circulo ſatis congruere cenſendum erit cum ſphæroide oblata, in qua ſemiaxes proportionem illam obtineant. Pariter cum paralleli gradus prope Pirenæos montes hexapedis 30 major ſit, & gradus meridiani in eadem latitudine ſit minor hexapedis 56, atque Africanus gradus prope Promontorium Bonæ Spei a Caillio obſervatus hexapedis 61 major ſit, quam ferat proportio eadem; quatuor jam meridiani gradus, & paralleli unum habebimus, qui cum figura ſphæroidica, eademque axium proportione ſatis convenient, ubi quidpiam tribuamus errori menſurarum terreſtrium, ac cæleſtium obſervationum. Si Pariſienſis gradus hexapedarum 57183 cum Maupertuiſio ſtatui poſſet, & ipſe pariter cum proportione illa mire congrueret: quæ ratio fuit ut in diſſertatione de Telluris figura, & magnitudine primum cenſuerim aſſignatam jam a Newtono proportionem terreſtrium axium obſervationibus ſatisfacere. At ultima Pariſienſis gradus correctio, & Italicus etiam gradus magis a proportione illa diſcrepat, quam ut in aliquos obſervationum diligentiſſimarum errores differentia omnis hexapedarum 105, & 118 refundi poſſit.

Ipſe autem clariſſimus Alembertius non ideo a Telluris ſphæroidicæ hypotheſi recedendum eſſe exiſtimavit, aut confingendas alias hypotheſes de diſſimilitudine meridianorum. Animadvertit enim quod cum axis diurni motus Jovis ſit perpendicularis plano orbitæ, meridiani omnes eamdem exhibent axium differentiam: quo jam analogiam Jovis habemus pro meridianorum terreſtrium ſimilitudine. Deinde ad calcem præfationis conjecturæ loco propoſuit num Apennini montis attractio aberrationem aliquam penduli gigneret, qua interjectus arcus cæleſtis major, & gradus terreſtris brevior efficeretur. Neque ad intentum aberratione magna opus eſt. Nam cum aberratio penduli a perpendiculo prope altiſſimos Peruviæ montes Bouguerio $7\frac{1}{2}''$ prodierit, ubi actionem Apennini montis ſubduplam fuiſſe admittamus, eam pariter in Italia menſuram gradus habebimus, quæ cum hypotheſi Terræ ſphæroidicæ, & Newtoniana proportione axium conveniet. Id ipſum de Pariſienſi etiam gradu valere poſſet, ſi in urbe maxima, & interjecto telluris tractu major aliqua materiæ denſitas, ac copia admitti poſſet, quæ in utroque arcus extremo

pen-

pendulum in adverſas partes aliquantulum retraheret. Fortaſſe aliis terreſtrium graduum dimenſionibus undique certius figura Terræ innoteſcet. Interim certum eſt Terram ſub æquatore, ac polari circulo, & in Meridionali Africæ parte, ac prope Pirenæos montes in Galliis, a figura ſphæroidica, & Newtoniana proportione axium non magis recedere, quam ut in errores minimos obſervationum differentia omnis refundi poſſit: Romanum vero, & Pariſienſem gradum non magis inde recedere quam ferant exigui ſimul errores obſervationum, & aliqua terræ exterioris irregularitas.

Corporum pondera, & longitudines pendulorum eodem tempore oſcillantium ab æquatore pergendo ad polos augentur quidem in duplicata ratione ſinuum latitudinis, ſive in ratione ſimplici dimidiorum ſinuum verſorum latitudinis duplicatæ, ut in ſphæroide quavis homogenea augeri debent, magis tamen augentur quam pro eadem terreſtrium axium proportione. Et quidem ſi longitudo penduli ſecundis ſingulis oſcillantis prope æquatorem, & Lutetiæ cum Bouguerio, atque ad Promontorium Bonæ Spei cum Caillio definiatur, & ſint gravitates acceleratrices Pariſiis, Londini, & Pelli in Lapponia ut 100000, 100018, 100137, quemadmodum ex Grahami, & Maupertuiſii obſervationibus colligitur, ac denique longitudinum differentia Pelli, & ſub æquatore ſit lin. 2, 06, differentiæ aliæ invenientur ut in tabula ſequenti.

Locus obſervationis	*Latitudo loci*	*Dimidii iidem ſinus*	*Proportio ſinuum*	*Longitudo penduli*	*Differentia.*
Sub æquatore	0	0	0	439, 21	0
A portobello	9° 34′	2762	0, 07	439, 30	0, 9
A Petit-Goave	18 27	10015	0, 25	439, 47	0, 26
Ad Promontorium	33 18	30142	0, 74	440, 14	0, 93
Pariſiis	48 50	56684	1, 38	440, 67	1, 46
Londini	51 31	61275	1, 50	440, 75	1, 54
Pelli	66 48	84480	2, 06	441, 27	2, 06

Quod ſi fiat pariter ut dimidius ſinus verſus duplæ latitudinis 66° 48′ ad radium, ita 2, 06 ad quartum, prodibit differentia longitudinis penduli in polis, & æquatore lin. 2, 44, & longitudo ipſa polaris penduli erit lin. 441, 65. Quare cum ſit 230 : 231 = 439, 21 : 441, 12, diſſenſus omnis erit 0, 53, ſeu fere dimidiæ lineæ: & ſi in determinanda penduli longi-

gi-

gitudine non niſi error octavæ partis lineæ eſſe poſſit, ut Caillius contendit in Actis Berolinenſibus anni 1754, aliæ quærendæ erunt hypotheſes, in quibus incrementa ponderum cum Newtoniana proportione axium concilientur.

Et quidem corporum pondera ab æquatore pergendo ad polos augeri debent in duplicata ratione ſinuum latitudinis, ſive homogenea, & ſphæroidica ſit tellus, ſive ex ſtratis ſphæroidicis diverſæ denſitatis coaleſcat, ſive etiam ſit ſphæroidica, & nucleum ſphæricum diverſæ denſitatis in centro habeat: quæ & demonſtrata ſunt a Clairautio, & nos novis demonſtrationibus in opere jam indicato exornabimus. Homogeneitatis hypotheſis cum abſoluto incremento ponderum minus accurate reſpondeat, hypotheſis alia ſtratorum ſphæroidicorum nimis ad arbitrium confingeretur, & præceſſionem æquinoctiorum majorem juſto exhiberet, ut mox videbimus. Newtonus in Propoſ. x. Lib. III. cenſuit communem ſupremam terram quaſi duplo graviorem eſſe aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo etiam, aut quadruplo, & quintuplo graviorem: unde veriſimile exiſtimavit quantitatem materiæ in terra quintuplo, aut ſextuplo majorem eſſe, quam ſi tota ex aqua conſtaret. Quod ſi vero conſideremus ſub æquatore ampliſſima, & magis profunda eſſe maria, & circa polum arcticum Europam, Aſiam, Americam ſatis protendi, patebit denſitatem mediam materiæ circa æquatorem redundantis minorem eſſe quam ſi omnis Tellus ex terra ſolida componeretur. Inveni autem quod ſi Tellus ſphæroidicam formam habeat, & terreſtres axes ſint inter ſe ut 230 : 231, ac materiæ exterioris denſitas quinta ſui parte minor ſit denſitate inſcriptæ ſphæræ, obſervationibus ſimul terreſtrium graduum, ut antea vidimus, & auctæ pendulorum longitudinis ſatisfieret.

IV.

De momentis ſphæroidum rotantium, & attractarum.

Si circa axem H*h* (*Fig.* 4.) revolvatur ſphæra aliqua, & vis acceleratrix puncti A in æquatore poſiti unitate exprimatur, & ſit XN radius paralleli alicujus circuli, erit vis acceleratrix puncti $N = \frac{XN}{TA}$, & momentum ipſius puncti $\frac{XN^2}{TA}$,

& momentum peripheriæ radio XN deſcriptæ $= \frac{p.XN^3}{TA}$, ac denique momentum totius areæ circularis $= \frac{p.XN^4}{4TA}$. Momentum vero ſegmenti ſphærici altitudinis Xx erit $= \overline{TN^4 - 2TN^2.TX^2 + TX^4}.\frac{p.Xx}{4TA}$, momentum ſegmenti altitudinis $TX = \overline{TN^4 - \frac{2}{3}TN^2.TX^2 + \frac{1}{5}TX^4}.\frac{p.TX}{4TA}$, momentum hemiſphærii $= \frac{2}{15}p.TA^4$, momentum ſphæræ integræ $= \frac{4}{15}p.TA^4$.

Quod ſi circa axem Hh revolvatur ſphærois circa polos compreſſa, & ſit æquatoris radius TB, radius paralleli alicujus XM; momenta circulorum, qui radiis XN, XM in ſphæra, & ſphæroide deſcribentur, inter ſe erunt ut $XN^4 : XM^4 = TA^4 . TB^4$: quæ ratio cum in ſectionibus omnibus perpendicularibus axi ſit conſtans, erit momentum totius ſphæroidis oblatæ circa axem revolutæ $= \frac{4}{15}p.TB^4$. Quare ſi fiat $TA = a$, $TB = A$, & vis acceleratrix non puncti A, ſed puncti B in æquatore ſphæroidis poſiti ſit $= 1$, erit momentum ſphæræ $= \frac{4pa^5}{15A}$, & momentum ſphæroidis $= \frac{4}{15}pA^3a$.

Si ſphærois eadem compreſſa non circa axem, ſed circa diametrum æquatoris aliquam revolvatur, & proxime accedat ad ſphæram circumſcriptam, rotationis momentum ita invenietur. Ductis planis quibuslibet diametro æquatoris, quæ eſt axis motus, perpendicularibus dividetur ſphærois in totidem ellipſes ſimiles, & ſphæra circumſcripta in totidem circulos, quorum radii æquales erunt ſemiaxibus majoribus ellipſium, & ad minores ſemiaxes ſe habebunt ut $A : a$. Tum ob affinitatem ſphæræ, & ſphæroidis, momentum in ſingulis ellipſibus æquabitur momento in circulis ejuſdem areæ, ſeu quorum radii ad radios circulorum in circumſcripta ſphæra ſimiliter ſectorum ſe habeant ut $\sqrt{Aa} : A$. Igitur momenta ellipſium, & circulorum in ſphæroide, & ſphæra circumſcripta ſimiliter ſectorum inter ſe erunt ut $A^2a^2 : A^4 = a^2 : A^2$, quæ ratio cum in ſectionibus ſingulis ſit conſtans, cumque mo-

men-

mentum ſphæræ circumſcriptæ ſit $= \frac{4}{15} p A^4$, erit momentum ſphæroidis circa æquatoris diametrum revolutæ $= \frac{4}{15} p a^2 A^2$.

Momentum ſphæroidis oblongæ, ad inſcriptam ſphæram accedentis quam proxime, & circa minorem axem revolutæ, eodem modo invenietur $= \frac{4}{15} p a^3 A$: ductis enim totidem planis minori axi normalibus, momenta ſectionum ſingularum, adeoque etiam momenta ſphæroidis totius, & ſphæræ inſcriptæ inter ſe erunt ut $A^2 a^2 : a^4 = A^2 : a^2$. Quod ſi oblonga ſimul, & oblata ſit ſphærois, & ſit ſphæroidis ſemiaxis minor $= a$, major $= A$, & tertius ſemiaxis $= B$, erit momentum totius ſphæroidis ad momentum ſphæroidis oblatæ, ſemiaxibus a, & B inſcriptæ, & circa eumdem minorem axem revolutæ ut $A^2 . B^2 : B^4 = A^2 : B^2$, & cum momentum ſphæroidis ipſius oblatæ ſit $= \frac{4}{15} p B^3 a$, erit momentum ſphæroidis totius $= \frac{4}{15} p B A^2 a$, poſito quod in diſtantia B ab axe motus vis acceleratrix ſit $= 1$. Quod ſi denique vis acceleratrix in diſtantia A ab ipſo axe unitate exprimatur, quæſitum totius ſphæroidis momentum evadet $= \frac{4}{15} p B^2 A a$.

Ut inveniantur etiam momenta attractricium virium in ſphæroidem aliquam agentium, ſit locus attrahentis Planetæ S (*Fig.* 5.) L particula quævis Planetæ attracti, T centrum, Q*q* planum per centrum tranſiens, & perpendiculare rectæ TS, quæ duorum Planetarum centra conjungit. Si Planetæ attrahentis maſſa vocetur S, erit vis qua trahetur centrum T $= \frac{S}{ST^2}$, & vis qua trahetur particula L ſecundum SL $= \frac{S}{SL^2}$, & vis quæ in directione rectæ ST parallela impendetur $= \frac{S . SF}{SL^3}$, ducta ſcilicet ex L in ST perpendiculari LF. Si LM præ ST ſatis parva cenſeri poſſit, recta SL proxime æqualis erit rectæ ST — LM, & negligi poterunt altiores rectæ LM poteſtates, atque erit duarum virium differentia, ſive vis abſoluta, qua punctum L a plano Q*q* diſtrahetur $= S . ST \left(\frac{1}{ST^3 - 3 ST^2 . LM} - \frac{1}{ST^3} \right) = \frac{3 S . LM}{ST^3}$, aut ſi fiat $\frac{3 S}{ST^3} = P$, erit vis omnis perturbatrix $= P . LM$.

D 2 Sit

Sit inſuper (*Fig.* 6.) Pp axis minor ſphæroidis alicujus, PBpb ſectio per axem minorem tranſiens, Qq planum cui recta ST ad perpendiculum inſiſtit, IK ſectio quælibet axi Pp perpendicularis. Si in ſectione hac ipſa accipiantur duæ quælibet particulæ L, l, ut ſit $LX = lX$, erit momentum duarum particularum ad ſphæroidem omnem circa centrum T in contrarias partes rotandam, $P.LM.MT$, & $P.lm.mT$. Agatur per punctum X recta N X n plano Qq parallela, & in planum idem demittatur perpendiculum XY. Erit $LM.MT = LN.MT + NM.MT$, & $lm.mT = ln.mT - mn.mT$, & momentum duarum particularum ſimul ſumptarum ad ſphæroidem rotandam erit $= P.LN.mM - P.MN.\overline{MT + mT} = 2P.LN.XN - 2P.XY.YT$. Sit ſinus anguli STB, quo Planeta attrahens declinat ab æquatore BTb, aut ſinus anguli $pTq = m$, coſinus $= n$. Erit $XY = m.TX$, $TY = n.TX$, $XN = m\ LX$, $LN = n.LX$, & fiet momentum idem $= 2mnP.\overline{LX^2 - TX^2}$.

His poſitis ſi proponatur ſphærois compreſſa, revolutione ellipſeos PBpb circa axem minorem Pp genita, & ſit Ii latitudo annuli, quo ſectio ſphæroidis IK ſectionem ik ſphæræ inſcriptæ ſuperat, & ſphærois ad ſphæram ipſam proxime accedat, ita ut momentum particularum in I, & i proxime idem cenſeri poſſit; elementum momenti circularis annuli habebitur momentum particularum ſingularum per earumdem numerum multiplicando, ſive multiplicando $2mnP.Ii.\overline{LX^2 - TX^2}$ per elementum circularis peripheriæ. Eſt vero ſumma omnium LX^2 ex ſinubus rectis in integro ſemicirculo confectorum $= \frac{1}{4}p.Xi^3$, ſi radius ad peripheriam ſe habeat ut $1:p$, & ſumma totidem TX^2, ſive productum quadrati TX^2 in ſemiperipheriam circuli eſt $= \frac{1}{2}p.Xi.TX^2$. Erit igitur momentum particularum omnium L, l per totum circularem annulum extra ſphæram ſphæroidi inſcriptam diſpoſitarum quam proxime $= 2mn.P.Ii.Xi.p.(\frac{1}{4}Xi^2 - \frac{1}{2}TX^2)$, & ſi fiat $TA = a$, $BA = \varphi a$, $TX = x$, adeoque $Ii = \frac{\varphi a}{a}.Xi$, & $Xi^2 = a^2 - x^2$, evadet momentum annuli circularis $= mnP.\frac{\varphi a}{a}.p\ (a^2 - x^2)\ (\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}x^2) = mnP.\frac{\varphi a}{2a}.p\ (a^4 - 4a^2x^2 + 3x^4)$, ac momentum hemiſphæroidis $= mn$

P.

$P.\frac{\varphi a}{2a}.p\,(a^5 - \frac{4}{3}a^5 + \frac{3}{5}a^5)$, & ſphæroidis totius momentum $= mnP.\frac{\varphi a}{a}.\frac{4}{15}pa^5$.

Quod ſi proponatur ſphærois oblonga, & ſit $IHKh$ (*Fig.* 7.) ſectio elliptica axi Pp perpendicularis in loco X, & ſit ellipſis ſemiaxis major EO, minor RO, qui cum recta Dd, & plano Qq efficiat angulum ROD, ac ſit inſuper differentia ſemiaxium $Ee = \pi$, erit ex conicis $HO = RO + \pi.\frac{LF^2}{RO^2}$, adeoque $HL = \pi.\frac{LF^2}{RO^2}$. Jam vero ſi recta Ll rectam Dd interſecet in puncto C, & producatur LO in L', vires æqualium particularum in l, & L' poſitarum ad ſphæroidem omnem volvendam æquales erunt. Unde cum etiam numerus particularum in HL, hL' idem ſit, momentum earumdem particularum, ſive elementum momenti annuli elliptici, quo ſectio ſphæroidis ſectionem ſphæræ inſcriptæ ſuperat, æquale erit quantitati $2mn.P.\pi.\frac{LF^2}{RO^2}.\overline{LC^2 - TX^2}$ ductæ in elementum peripheriæ circularis: & cum ſit $LF = \frac{LC.Oc - CO.Dc}{RO}$, &, neglecto ambiguo termino $\frac{2LC.Oc.CO.Dc}{RO^2}$, qui in duobus quadrantibus DiO, diO contrario ſigno deſtruitur, ſit $LF^2 = \frac{LC^2.Oc^2 + CO^2.Dc^2}{RO^2}$; elementum ipſius momenti æquabitur elemento circularis peripheriæ ducto in quantitatem $2mnP\pi.\frac{\overline{LC^2.Oc^2 + CO^2.Dc^2}}{RO^4}.\overline{LC^2 - TX^2}$.

Eſt autem ſumma omnium LC^4 per totam ſemiperipheriam $= \frac{3}{16}p.RO$, ſumma omnium $CO^2.LC^2 = \frac{1}{16}p.RO^5$, & ſumma omnium $LC^2.TX^2$, aut $CO.TX^2 = \frac{1}{4}p.RO^3.TX^2$. Quare ſi ſinus anguli DOR ſit $= s$, coſinus $= S$, erit momentum totius annuli elliptici $= mnP\pi p\,(\frac{3}{8}RO^3.S^2 + \frac{1}{8}RO^3.s^2 - \frac{1}{2}RO.TX^2.\overline{S + s^2}) = mnP\pi p\,(\frac{1}{4}RO^3.S^2 + \frac{1}{8}RO^3 - \frac{1}{2}RO.TX^2)$, & ſi differentia ſemiaxium totius ſphæroi-

roidis ſit $= \varphi' a$, & ſit propterea $\pi = \frac{\varphi' a}{a} . \mathrm{RO} = \frac{\varphi' a}{a} . \mathrm{X} i$, erit (*Fig* 6.) momentum particularum omnium in oblongæ ſphæroidis ſectione I K extra ſphæram inſcriptam redundantium $=$ $m n \mathrm{P} . \frac{\varphi' a}{a} . p \left(\frac{1}{4} \overline{a^2 - x^2}^{\,2} . \mathrm{S}^2 + \frac{1}{8} \overline{a^2 - x^2}^{\,2} - \frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) =$ $m n \mathrm{P} . \frac{\varphi' a}{a} . p \left(\overline{\frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{1}{4} x^4} . \mathrm{S}^2 + \frac{1}{8} a^4 - \frac{3}{4} a^2 x^2 + \frac{5}{8} x^4 \right)$; & momentum hemiſphæroidis erit $= m n \mathrm{P} . \frac{\varphi' a}{a} . p \left(\frac{1}{4} a^5 - \frac{1}{6} a^5 + \frac{1}{20} a^5 \right) . \mathrm{S}^2 = m n \mathrm{P} . \frac{\varphi' a}{a} . \frac{2}{15} p a^5 \mathrm{S}^2$, & ſphæroidis totius momentum $= m n \mathrm{P} . \frac{\varphi' a}{a} . \frac{4}{15} p a^5 \mathrm{S}^2$.

Quod ſi oblata ſimul, & oblonga ſit ſphærois, ſcilicet ſi meridianum ſimul, & æquatorem, ſectionemque alteram per polos factam, & meridiani plano normalem habeat ellipticam, & ſit ſphæroidis ſemiaxis minor $= a$, major $= a + \varphi a + \varphi' a$, tertius duobus prioribus normalis $= a + \varphi' a$, & ſphærois accedat proxime ad ſphæram, erit momentum omne $= m n \mathrm{P} . \frac{\overline{\varphi a + \varphi' a . \mathrm{S}^2}}{a} . \frac{4}{15} p a^5$. Ductis enim planis quibuslibet axi minori perpendicularibus, extra circulum in ſphæra inſcripta ſectum, circularis, & ellipticus annulus ſupererunt, quorum momenta, ob ſphæræ, & ſphæroidis totius affinitatem, eodem modo ſupputari poterunt, ac ſingillatim in oblata, & oblonga ſphæroide ſupputarentur. Atque hæ cum formulis a cl. Alembertio traditis §. 352., & 360. de mundi ſyſtemate omnino congruunt. Eſt enim $\mathrm{S}^2 = 1 - s^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ *cos*. 2 D O R. Quod ſi qui attrahitur Planeta majorem ſemper meridianum Planetæ attrahenti obvertat, qui eſſet caſus Lunæ oblongæ reſpectu Terræ, & fiat $\mathrm{S} = 1$, momentum ſphæroidis oblongæ æquale erit momento oblatæ alterius ſphæroidis iiſdem axibus deſcriptæ. Si vero aſpectus omnes Planetæ attracti, attrahentiſque ſibi invicem ſuccedant, qui eſſet caſus Lunæ ipſius reſpectu Solis, & pro S^2 ſubſtituatur valor medius $\frac{1}{2}$, momentum medium ſphæroidis oblongæ momento oblatæ ſphæroidis dimidium erit.

V.

V.

De compoſitione motuum rotationis.

SIt planum aliquod ZHzh (*Fig.* 8.) quod binis viribus ita urgeatur, ut earum una circa axem Zz, altera circa axem alterum Hh ſeorſim rotari poſſit. Sint angulares celeritates rotationum circa axes ipſos C, & 1, atque ex puncto quocumque M ducantur ML, & MN axibus perpendiculares. Erit abſoluta velocitas puncti M circa axem Zz = ML. C, & velocitas circa Hh = MN. Tum ſi in ſectoribus oppoſitis ZTH, zTh duarum velocitatum directiones contrariæ habeantur, quo in loco velocitates duæ ſe mutuo deſtruent, erit ML.C = MN, ſive 1 : C = ML : MN, quæ ratio ML : MN cum in tota recta MTm ſit conſtans, manifeſtum eſt binis viribus ſimul impreſſis, in recta aliqua linea deſtrui motus omnes, eamque ab axibus Zz, Hh rotationum duarum declinare angulis MTZ, MTH, quorum ſinus reciproce proportionales ſint angularibus velocitatibus ſingillatim circa axes ipſos conceptis. Scilicet ſi in recta Tz capiatur recta TX, quæ ſe habeat ad TH ut C : 1, jungaturque HX, ipſique per punctum T, in quo bini axes Hh, Zz ſe interſecant, ducatur parallela MTm; velocitates in recta hujuſmodi ſe deſtruent: erit enim C : 1 = TX : TH = ſin. THX : ſin. TXH = ſin. MTH : ſin. MTZ = MN : ML.

Modo accipiatur in eodem plano punctum aliud quodcumque R, & ad HT, MT, ZT ducantur perpendicula RO, RA, NG, OD, RB, PQ, & ad PQ perpendiculum aliud RV. Erit RO velocitas rotationis puncti R circa axem Hh, & velocitas circa Zz erit $= BR.C = BR.\frac{MN}{ML} = BR.\frac{PO}{PQ} = \overline{PQ \mp PV}.\frac{PO}{PQ} = PO \mp PV.\frac{MN}{ML}$, & differentia, aut ſumma duarum velocitatum erit $= RP + PV.\frac{MN}{ML}$.

Eſt vero ob triangulorum ſimilitudinem $RP = \frac{TM.RA}{TN}$, & $PV = \frac{DT.RP}{TO} = \frac{DT.TM.RA}{TN.TO}$. Inſuper ex Trigonometria eſt $\frac{DT}{TO} = \frac{TN.TL - MN.ML}{TM^2}$. Erit itaque differentia, aut ſumma

dua-

duarum velocitatum $= \frac{TM.RA}{TN} + \frac{TL.MN.RA}{TM.ML} - \frac{MN^2.RA}{TM.TN}$ $= \frac{TL.MN+TN.ML}{TM\ ML}.RA = \frac{\text{ſin.}\ HTZ}{\text{ſin.}\ MTZ}.RA$, ſcilicet ob datos angulos H T Z, M T Z, compoſita omnis velocitas proportionalis erit diſtantiæ a recta M *m*.

Sit denique punctum aliud quodcumque F extra ipſum planum, quod pariter ita impellatur, ut vi una circa axem Z *z*, altera circa H *h* ſingillatim impreſſa rotari poſſit. Sit F R perpendicularis ex eodem puncto demiſſa in planum, & F A, F O perpendiculares aliæ ductæ ad M *m*, H *h*, & ſit inſuper F *f* (*Fig.* 9.) circularis arcus, quem punctum ipſum, rotatione circa H *h* concepta, ſingillatim deſcribere inciperet. Velocitas puncti F ſecundum F K tangentem arcus F *f* reſolvi poterit in duas alias ſecundum F R, F E: & cum tota velocitas circa H *h* diſtantia F O exprimatur, erit velocitas ſecundum F R $= \frac{FO.FR}{FK} =$ R O, eadem ſcilicet qua punctum R circa idem centrum O revolveretur: velocitas vero ſecundum F E erit = F R, directionemque habebit parallelam rectæ R O. Pari ratione velocitas puncti F circa axem Z *z* (*Fig.* 8.) in duas alias reſolvetur, quarum una B R . C æquabit velocitatem puncti R circa axem Z *z*, altera vero erit F R . C, directionemque habebit parallelam rectæ B R. Jam vero velocitates binæ R O, B R . C puncti R circa axes binos H *h*, Z *z* componunt velocitatem $\frac{\text{ſin.}\ HTZ}{\text{ſin.}\ MTZ}.RA$, qua punctum ipſum circa axem tertium M *m* moveri pergit. Binæ igitur velocitates puncti F extra planum Z H *z h* poſiti, eodem cum plano ipſo angulari motu circa axes binos H *h*, Z *z* abrepti, æquivalebunt tribus velocitatibus, velocitati ſcilicet compoſitæ puncti R, atque inſuper duabus aliis F R, F R . C, quarum directiones parallelæ ſint rectis R O, B R.

Erunt autem velocitates F R, & F R . C inter ſe ut 1 : C = M L : M N = P Q : P O. At quia, ob angulos P Q T, P O T rectos, circulus diametro P T deſcriptus tranſit per puncta Q, O; anguli etiam P Q O, P T O eidem chordæ P O inſiſtentes æquales erunt inter ſe: ductaque adeo recta C A ipſi P Q parallela, ut ſint æquales anguli Q P O, R C A, ſimilia erunt triangula Q P O, R C A. Sunt enim anguli T P O, R P A æqua-

æquales, & angulus RAP eſt rectus, adeoque æquantur inter ſe anguli CRA, PTO, PQO. Erit igitur PQ : PO = RC : CA, & velocitates ipſæ FR, FR.C erunt rectis RC, CA proportionales. Porro velocitates binæ ſecundum RO, BR, quæ ſint rectis RC, CA proportionales, exprimanturque ipſis FR, FR.C, velocitatem aliam ſecundum RA component, quæ erit $= \frac{OQ}{PQ} . FR = \frac{LN}{ML} . FR$. Binæ igitur puncti F velocitates circa axes binos Hh, Zz, æquivalebunt duabus aliis, quarum una $\frac{\text{ſin. } HTZ}{\text{ſin. } MTZ} . RA$ erit plano $ZHzh$ perpendicularis, altera vero $\frac{LN}{ML} . FR$ erit rectæ RA parallela.

Jam vero, ob angulos MLT, MNT rectos, angulus MTN æqualis erit angulo MLN, qui in circulo diametri MT eidem chordæ MN inſiſtit, æquaturque angulo alterno LNG. Itaque ſimilia erunt triangula rectangula MTN, LNG, eritque $LN = \frac{TM . NG}{NT}$, & velocitas ſecundum rectam ipſi RA parallelam erit $= \frac{LN . FR}{ML} = \frac{TM . NG . FR}{ML . NT} = \frac{\frac{NG}{NT} . FR}{\frac{ML}{TM}} = \frac{\text{ſin. } HTZ . FR}{\text{ſin. } MTZ}$. Ducatur igitur (*Fig.* 10.) Fa rectæ RA parallela, quæ ſit $= \frac{\text{ſin. } HTZ . FR}{\text{ſin. } MTZ}$, & producatur RF in r, ut ſit $Fr = \frac{\text{ſin. } HTZ . RA}{\text{ſin. } MTZ}$, compleaturque rectangulum Ff. Compoſita omnis velocitas puncti F directionem Ff habebit, eritque $= \frac{\text{ſin. } HTZ}{\text{ſin. } MTZ} . \sqrt{(FR^2 + RA^2)} = \frac{\text{ſin. } HTZ . FA}{\text{ſin. } MTZ}$, proportionalis ſcilicet diſtantiæ a puncto A; & ob $fa : Fa = RA : FR$, & parallelas Fa, RA, erit directione ſua rectæ FA perpendicularis. Hoc ipſo punctum quodcumque F, & punctorum ſyſtema, ac corpus etiam quodcumque binis viribus ut antea impulſum circa axes Zz, Hh; compoſitis binis velocitatibus, uno communi anguli motu circa axem MTm rotabitur, qui jaceat in plano axium Zz, Hh, iiſque inde declinet angulis, quorum ſinus ſint reciproce proportionales velocitatibus angularibus, quæ ſingillatim circa axes ipſos conciperentur.

Ita cum ſit $\frac{\text{ſin. HTZ}}{\text{ſin. MTZ}}$. FA abſoluta velocitas puncti F circa axem M m, & centrum A, ipſam per FA dividendo erit $\frac{\text{ſin. HTZ}}{\text{ſin. MTZ}}$ angularis velocitas totius compoſitæ rotationis. Unde cum angularis velocitas circa H h ſit $= 1$, & circa Z z $=$ C $= \frac{MN}{ML} = \frac{\text{ſin. MTH}}{\text{ſin. MTZ}}$, velocitates ipſæ angulares circa axes M m, H h, Z z inter ſe erunt ut ſinus angulorum HTZ, MTZ, MTH. Bini itaque rotationis motus circa axes binos unicum rotationis motum component circa axem tertium: & viciſſim unicus rotationis motus, qui circa axem M m fiat, reſolvi poterit in duos alios circa axes H h, Z z: atque erit tota rotationis velocitas angularis ad angulares velocitates rotationum reſolutarum ut ſinus anguli HTZ duorum axium ad ſinus angulorum MTZ, MTH, quibus axes ipſi inclinantur cum priore axe M m. Si angulus HTZ, quo bini axes H h, Z z ſe interſecant in puncto T, ſit rectus, etiam angulus LMN rectus erit, & $\frac{MN}{ML} = \frac{\text{ſin. MTH}}{\text{ſin. MTZ}} =$ C erit tangens anguli MTN: in hoc ſcilicet anguli recti caſu tangens deviationis axium M m, H h erit quarta proportionalis ad 1, C, & ſinum totum.

Compoſitio igitur, & reſolutio motuum non in liberis motibus dumtaxat, verum etiam in motibus rotationis locum habet: ſcilicet bini rotationis motus ſimul impreſſi in rotationem unicam conſurgunt, ſicuti binæ vires binis lateribus parallelogrammi alicujus expreſſæ tertiam vim componunt, quæ exprimitur diagonali: & ſicuti ex viribus quotcumque unica ſemper conſurgit; ita ſi plures rotationis motus imprimantur circa idem centrum, unica ſemper rotatio ex omnibus habebitur. Primam hujus theorematis demonſtrationem dedimus in Diſſertatione de Præceſſione Æquinoctiorum, quæ anno 1759 Luccæ edita eſt, & demonſtratione ipſa præoccupavimus difficultatem omnem, quæ poſſet hacce in re ſuboriri: nimirum cum binis motibus, corpori impreſſis, eliſiſque iis portionibus velocitatum, quæ opponuntur ſibi invicem, velocitas in particulis ſingulis reſidua ſit proportionalis diſtantiæ a novo axe, & directione ſua rectæ ad axem ductæ perpendicularis; patet ſine ulla diſgregatione partium, & totius corporis ſolutione binos rotationis motus ſimul componi. Novam aliam atque ele-

elegantem ipſius theorematis demonſtrationem exhibuit Clariſs. Eques Mozzius in aureo opuſculo de momentanea corporum rotatione. Rotationum compoſitarum theoriam modo exornavimus, ac mox videbimus quam inde facilis ſolutio pateat pulcherrimorum præceſſionis, nutationiſque terreſtris, & lunaris axis problematum.

VI.

De motu nodorum æquatoris Terræ, & Lunæ.

POſitis omnibus ut in priore parte §. IV., ſi oblata ſphærois revolvatur circa minorem axem, & minimo quocumque tempore dt ſit angularis motus ds, adeoque ſit $A\,ds$ arcus a puncto quolibet æquatoris deſcriptus eodem tempore circa axem, $\frac{A\,ds}{dt}$ velocitas rotationis in æquatore, & vis acceleratrix $\frac{A\,ds}{dt^2}$, evadet totum rotationis momentum $= \frac{4}{15} p A^4 a . \frac{ds}{dt^2}$. Tum ſi eadem ſphærois circa diametrum æquatoris aliquam inclinetur, & juxta ſecundam partem §. IV. momentum virium perturbatricium ſit $= mnP . \frac{\varphi a}{a} . \frac{4}{15} p a^5$; ob ſphæroidis, & ſphæræ affinitatem erunt duo momenta inter ſe ut angulares velocitates circa axem, & circa æquatoris diametrum conceptæ. Itaque axis compoſitæ rotationis, juxta §. V., ab axe prioris rotationis deviabit angulo, cujus tangens erit $= \frac{mnP . \frac{\varphi a}{a} . \frac{4}{15} p a^5}{\frac{4}{15} p A^4 . \frac{a\,ds}{dt^2}}$, aut quam proxime $= \frac{mnP . \varphi a . dt^2}{A\,ds}$. Perinde erit ſi intelligamus ſolis viribus perturbatricibus circa diametrum æquatoris inclinari poſſe ſphæroidem, & vim acceleratricem puncti maxime diſſiti eſſe $= \omega$. Evadet enim momentum ſphæroidis circa diametrum ipſam nutantis $= \frac{4}{15} p A^2 a^2 \omega$: quod cum æquari debeat momento virium perturbatricium $mnP . \frac{\varphi a}{a} . \frac{4}{15} p a^5$; eruetur $\omega = mnP \varphi a$ quam proxime, & velocitas rotationis conceptæ fiet $= mnP . \varphi a . dt$: qua rurſus diviſa per velocitatem $\frac{A\,ds}{dt}$ rotationis alterius circa axem,

axem, tangens deviationis axis totius compoſitæ rotationis evadet rurſus $= \frac{mnP.\varphi a.dt^2}{Ads}$.

Sit modo æquator Planetæ alicujus ſphæroidici, & circa polos compreſſi NAn (*Fig.* 11.), & NCn planum orbitæ Planetæ alterius attrahentis S, Nn linea nodorum, ATr angulus tempore dt circa centrum deſcriptus, accipiaturque $Ar : Ac$ ut velocitas diurni motus ad velocitatem rotationis, quæ circa diametrum Zz ob vires perturbatrices conciperetur, ſive, manentibus omnibus, quæ ſupra, ut $Ads : mnP.\varphi a.dt^2$. Completo rectangulo $Acmr$, & per puncta A, T, m traducto plano, erit $N'Amn'$ nova æquatoris poſitio, & N', n' nodi poſt tempus datum, demiſſiſque ex N perpendicularibus NN'', NQ in planum $N'A$, & in lineam ſyzigiarum AB, atque ex A ducta AG nodorum lineæ perpendiculari, erit $Ar : mr = NQ : NN'' = AG : NN''$, ſive erit $NN'' = \frac{mnP.\varphi a.dt^2}{Ads}$. Rurſus erit $NN'' : NN' = \pi : 1$, ſi π ſit ſinus anguli, quem æquator cum plano orbitæ Planetæ attrahentis efficit. Itaque erit arcus $NN'' = \frac{mnP.AG.\varphi a.dt^2}{\pi Ads}$, & cum arcus mr, NN'' ad oppoſitas partes jaceant, jacebunt etiam ad oppoſitas partes arcus Ar, NN', & nodi N, n regredientur in plano orbitæ Planetæ S, eritque angularis ipſa regreſſio $= \frac{mnP.AG.\varphi a.dt^2}{\pi A^2 ds}$.

Eſt vero m ſinus, & n coſinus anguli, quo Planeta attrahens declinat ab æquatore, atque in triangulo ſphærico rectangulo ANC eſt tangens $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$ anguli ANC, quem planum æquatoris cum plano orbitæ Planetæ attrahentis efficit, ad tangentem $\frac{m}{n}$ arcus AC declinationis ipſius Planetæ ab æquatore, ut ſinus totus ad ſinum arcus AN, ſive ut $A : AG$. Itaque erit $AG = \frac{m.A.\sqrt{(1-\pi^2)}}{n\pi}$. Rurſus in eodem triangulo eſt ſinus anguli ANC ad ſinum totum ut ſinus arcus AC ad CH ſinum arcus CN. Itaque erit $m = \frac{\pi.CH}{A}$, & an-

gu-

gularis nodorum motus evadet $= \frac{P . \sqrt{(1-\pi^2)} . CH^2 . \varphi a . dt^2}{A^3 ds}$ $= \frac{3S . \sqrt{(1-\pi^2)} . CH^2 . \varphi a . dt^2}{ST^3 . A^3 . ds}$. Quod ſi inſuper tempus periodicum Planetæ T, aut S ad tempus diurnæ revolutionis ſe habeat ut $t : 1$, & ſit dz angulus tempuſculo dt percurſus, & g velocitas motus ipſius periodici, erit $ds = t dz$, & $dt = \frac{ST . dz}{g}$. Denique vis centripeta $\frac{S}{ST^2}$ proportionalis erit velocitati, quæ per ſinum verſum arcus $ST . dz$ tempuſculo dt cadendo gigneretur: & quia eadem velocitate, quæ motu uniformiter accelerato gignitur eodem tempore uniformiter continuata duplus ſinus verſus abſolvi poteſt; vis centripeta proportionalis erit duplo ſinui verſo, aut duplo quadrato arcus per diametrum diviſo, aut quadrato velocitatis diviſo per ſolum radium, ſcilicet erit $\frac{S}{ST^2} = \frac{g^2}{ST}$. Factis hiſce omnibus ſubſtitutionibus prodibit angularis nodorum motus $=$
$$\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)} . CH^2 . \varphi a}{A^3 t dz} . \frac{g^2}{ST^2} . \frac{ST^2 . dz^2}{g^2} =$$
$$\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)} . CH^2 . \varphi a . dz}{t A^3}.$$

Iiſdem factis ſubſtitutionibus deviatio $\frac{mnP . \varphi a . dt^2}{A ds}$ axis compoſitæ rotationis Mm (*Fig.* 12) ab axe figuræ Hh evadet $= \frac{3\pi\sqrt{(1-\pi^2)} . CH^2 . \varphi a . dz}{t . A^2 . AG}$: ſcilicet in terra noſtra rotationis axis recedet ab axe figuræ in duplicata ratione diſtantiæ Solis aut Lunæ a punctis æquinoctialibus directe, & in ſimplici aſcenſionis rectæ reciproce, ac luminaribus delatis rurſus ad puncta æquinoctialia axis uterque congruet. Tota tamen deviatio tam parva erit, ut perturbatricium virium ratione cenſeri poſſit rotationis axem ab axe figuræ ſenſibiliter non recedere. Neque ratione motus circa axem Mm concepti, & momentis virium centrifugarum a ſe invicem ſenſibiliter abduci poterunt bini axes. Etenim vis centrifuga puncti P proportionalis erit diſtantiæ PO ab axe motus, dirigeturque ſecundum PO, atque ideo in duas vires reſolvi poterit,

rit, quarum una RP perpendicularis erit plano axium, & momentum RP.OT exercebit ad ſphæroidem omnem volvendam circa alium axem in eodem plano jacentem, & axi Mm perpendicularem in puncto T: altera RO parallela erit, & momentum exercebit RO.OT ad ſphæroidem volvendam circa novum axem plano HZhz perpendicularem in puncto T. Patet autem momenta RP.OT in æqualibus diſtantiis hinc inde a plano priorum axium æqualia eſſe, & contraria, ac ſe invicem deſtruere.

Quia vero parallelis planis dividitur tota ſphærois in ellipſes ſimiles ellipſi HZhz, ſi ad æquales a ſingulorum centris diſtantias TX, Tx diametro Mm educantur perpendicula XY, xy, ſumma momentorum omnium TX.XY major erit ſumma omnium Tx.xy, ſi ſphærois circa polos H, h compreſſa ſit, & novum rotationis motum gignet ex H in M: contra vero erit ex M in H directio novi circularis motus, ſi ſphærois oblonga ſit, & ſumma omnium TX.XY minor ſit ſumma omnium Tx.xy. Et quidem in ſphæroide oblata erit $mnP . \frac{\varphi a}{a} . \frac{4}{15} pa^5$ ſumma momentorum omnium hujuſmodi, poſito quod m, & n ſint ſinus, & coſinus anguli HTM, & P ſit vis centrifuga puncti alicujus in æquatore maxime a centro diſſiti. Unde cum vis acceleratrix $\frac{A\,ds}{dt}$ ad vim centrifugam acceleratricem ſe habeat ut arcus ad duplum ſinum verſum, ſive ut radius ad arcum ipſum, erit P $= \frac{A\,ds^2}{dt}$. Quo jam motus omnis circa axem Mm conceptus, & qui circa axem plano HZhz perpendicularem ob inæqualitatem momentorum orietur, novum rotationis motum component circa novum axem, qui jacebit in plano axis illius perpendicularis, & axis alterius Mm, atque ab MT deviabit angulo $\dfrac{mn . \frac{\varphi a}{a} . \frac{4}{15} pa^5 . \frac{A\,ds^2}{dt^2}}{\frac{4}{15} pA^4 . \frac{a\,ds}{dt^2}} = mn . \frac{\varphi a}{A} . t\,dz$. Quare unitatem pro n ſcribendo, pro m vero $\frac{3\pi\sqrt{(1-\pi^2)} . CH^2 . \varphi a . dz}{t . A^2 . AG}$, manifeſtum erit, quo tempore periodicus Planetæ motus angulo infinite parvo dz augetur, deviationem axis novæ rotationis com-

compoſitæ ab MT eſſe infinite parvam ſecundi ordinis: cumque ea deviatio fiat in plano per axem M*m* traducto, & ad planum HZ*hz* normali; incrementum diſtantiæ poli M a polo figuræ H erit infinite parvum tertii ordinis.

Cum igitur rotationis axis ab axe figuræ ſenſibiliter non recedat, angularis omnis nodorum motus erit ſumma omnium $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.CH^2.\varphi a.dz}{tA^3}$: & quia ſumma omnium CH^2 dimidia eſt ſummæ totidem A^2, erit motus medius nodorum $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.\varphi a.dz}{2tA}$, dimidius ſcilicet motus maximi, qui habetur in quadraturis Planetæ attrahentis, ac nodorum, & æqualis motui vero in octantibus. Cumque inclinatio media Eclipticæ, & æquatoris ſit 23° 28⅓′, adeoque ſit $\sqrt{(1-\pi^2)} = 0,9127533$, pro *dz* ſcribendo 360°, & 365¼ pro *t* in hypotheſi Terræ totius ſolidæ, atque homogeneæ, poſito $\frac{\varphi.a}{A} = \frac{1}{231}$, eſſet præceſſio annua æquinoctiorum ex Sole orta = 21¼″: quæ omnia cum iis congruunt, quæ clariſſimi viri de præceſſione æquinoctiorum tradiderant, Alembertius §. 52., & 116, Simptonius Probl. 4. Coroll. 1., & Eulerus §. 41. Eodem modo inveniri poterit æquatoris lunaris motus in plano Eclipticæ, qui ex forma oblatæ, oblongæque ſphæroidis proficiſcitur. Quoniam enim æquator Lunæ duobus circiter gradibus ad Eclipticam inclinatur, erit quam proxime $\sqrt{(1-\pi^2)} = 1$, & quia motus periodicus, & diurnus æquantur inter ſe, erit etiam $t = 1$. Quare ſi pro $\frac{\varphi a}{A}$ ſcribatur $\frac{1}{115009}$, erit ſingulis Lunæ revolutionibus quæſitus nodorum motus, qui ex forma oblatæ ſphæroidis orietur $= \frac{3}{2}.\frac{1}{115009}.1296000'' = 16,9''$, & annis ſingulis $= \frac{365^d\,6^h\,9'}{27^d\,7^h\,43'}.16,9'' = \frac{525969}{39343}.16,9'' = 226''$. Quod ſi quæratur motus, qui ex forma oblongæ ſphæroidis oriri poſſet, erit momentum virium perturbatricium $= mnP.\frac{\varphi' a}{a}.\frac{4}{15}pa^5S^2$, & tangens deviationis axis $= \frac{mnP.\varphi' a.S^2.dt^2}{Ads}$, & motus medius quæſitus =

3 √

$\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.\phi' a.S^2.dz}{2tA}$: & ſi ob majorem Lunæ diametrum, & faciem fere eamdem ſemper obverſam Terræ, ſcribatur 1 loco S, ſphæroidi oblongæ oblata alia ſubſtitui poterit, in qua differentia ſemiaxium ſit $\frac{1}{38369}$, & motus medius evadet ſingulis Lunæ revolutionibus $= \frac{3}{2} . \frac{1}{38369} . 1296000'' = 50, 6'. 6''$, & annis ſingulis $= 676''$.

Porro vis perturbatrix lunaris orbitæ PA (*Fig.* 13.) eſt ad mediocrem vim, quæ a Sole S exercetur in Terram T ut PT : ST, & vis Terræ in Solem eſt ad vim Lunæ in Terram ut ST : PT directe, & reciproce ut quadratum periodici temporis Terræ circa Solem ad quadratum periodici temporis Lunæ circa Terram : adeoque compoſitis rationibus, vis perturbatrix lunaris orbitæ PT eſt ad vim Terræ, qua Luna retinetur in orbe ſuo, ut quadratum temporis periodici Lunæ ad quadratum periodici temporis Terræ circa Solem, ſive ut 1 : 179 quam proxime. Utraque autem vis ſe habet ad vim perturbatricem lunaris corporis ut radius lunaris orbitæ PT ad radium Lunæ PR. Quare erit motus nodorum lunaris æquatoris genitus vi Solis ad motum genitum vi terræ ut 1 : 179. Hæc autem ratio in Luna oblonga rurſus minuenda eſſet in ratione 2 : 1, quod ob majorem ipſius diametrum conſtanter obverſam Terræ ſit ſemper reſpectu Terræ S = 1, & ob mutatos aſpectus omnes ejuſdem diametri, & Solis uno menſe ſynodico quantitas S valores omnes obtineat, & ſit $\frac{1}{2}$ valor medius quadrati S^2. Si binæ igitur in Luna cauſſæ ad nodorum motum conſpirent, nimirum forma oblatæ ſphæroidis, quæ ex motu diurno Lunæ ortum ducit, & ſphæroidis oblongæ, quæ ex attractione Terræ proficiſci poſſet, erit motus annuus nodorum vi Terræ genitus $= 902''$, & addendo $\frac{226'' + 338''}{179}$, ſive 3'' circiter ob vim Solis, fiet totus motus annuus nodorum lunaris æquatoris in plano Eclipticæ $= 15' \; 5''$.

VII.

VII.

De æquatione mediæ præceſſionis æquinoctiorum.

Sint N, n (*Fig.* 14.) duo puncta, in quibus æquator Terræ ANBn ſecat Eclipticam CNn : M, m puncta, in quibus æquator ſecat lunarem orbitam DMm : O, o interſectiones lunaris orbitæ, & æquatoris, & denotet N punctum æquinoctii verni, M nodum aſcendentem Lunæ. Si Dh, Ag ſint perpendiculares ex D, & A ductæ in lineam Oo, & per M ducatur arcus circuli maximi MP plano æquatoris perpendicularis, & vis perturbatrix Solis ad vim perturbatricem Lunæ ſe habeat ut 1 : Q, erit angularis motus nodorum æquatoris cum plano lunaris orbitæ $= \frac{3\,Q\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,\varphi a\,.\,dz}{t\,.\,A^3}$, & arcus ipſe, quo nodus O regredietur, erit $=$ $\frac{3\,Q\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,\varphi a\,.\,dz}{t\,.\,A^2}$. Erit vero arcus ipſe ad arcum, quem punctum O circa æquatoris radium AT, regrediente nodo, deſcribet, ut ſinus totus ad ſinum anguli POM, ſive AOD. Rurſus ſimiles arcus, quos puncta æquatoris O, & N circa eumdem radium AT deſcribent, proportionales erunt ſinubus angulorum OTA, NTA, ſive perpendicularibus Ag, AG. Denique arcus ita deſcriptus a puncto N erit ad arcum, quo nodus N regredietur in plano Eclipticæ CNn, ut π : 1. Quare compoſitis rationibus erit arcus, quo nodus æquatoris N ob Lunæ vim regredietur in plano Eclipticæ $=$ $\frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,AG\,.\,\varphi a\,.\,dz}{\pi t\,.\,Ag\,.\,A^2}$: quam quantitatem per radium A dividendo, & pro Dh^2 ſubſtituendo valorem medium $\frac{1}{2}$ A^2, fiet motus medius angularis nodorum eclipticæ, & æquatoris vi Lunæ genitus $=$ $\frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,AG\,.\,\varphi a\,.\,dz}{2\pi t\,.\,Ag\,.\,A}$.

Eſt vero juxta elementa Trigonometriæ AG $=$ ſin. AN $=$ ſin. AO . coſ. NO $\mp$ coſ. AO . ſin. NO, & poſteriore termino omiſſo, qui per integrum ſemicirculum ambiguitate ſigni deſtruitur, eſt AG $=$ ſin. AO . coſ. NO $=$ Ag . coſ. NO.

 Rur-

Rurſus in triangulo ſphærico obliquangulo M O N, ex ſphæricorum doctrina, eſt ſin. M O N : ſin. O M N = ſin. M N : ſin. N O, adeoque eſt ſin. N O $= \frac{\text{ſin. MN . ſin. OMN}}{\text{ſin. MON}}$, & ſi coſinus arcus M N vocetur $\pm q$, atque l ſinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, erit ſin. N O $= \frac{l . \surd (1 - q^2)}{\text{ſin. AOD}}$, & coſ. N O $= \surd \left(1 - \frac{l^2 + l^2 q^2}{\text{ſin. AOD}^2}\right)$, atque ob exiguam lunaris orbitæ inclinationem ad planum eclipticæ negligendo quadratum ſinus l, fiet coſinus arcus N O quam proxime æqualis radio, & angularis medius nodorum motus evadet $= \frac{3 Q . \text{ſin. AOD . coſ. AOD} . \varphi a . dz}{2 \pi t A}$.

Ex ipſa etiam Trigonometria eſt ſin. O M P = ſin. N M P. coſ. N M O - coſ. N M P. ſin. N M O, & in triangulo ſphærico rectangulo M P N eſt ſin. N M P : coſ. M N P = ſin. O M P : coſ. M O P, adeoque eſt coſ. M O P = coſ. A O D = $\frac{\text{ſin. OMP . coſ. MNP}}{\text{ſin. NMP}}$ = coſ. N M O . coſ. M N P — $\frac{\text{ſin. NMO . coſ. MNP . coſ. NMP}}{\text{ſin. NMP}}$. Denique ex ſphæricis eſt coſinus arcus M N ad ſinum totum, ut tangens complementi anguli P N M, ſive $\frac{\text{coſ. MNP}}{\text{ſin. MNP}}$, ad tangentem anguli N M P, ſive $\frac{\text{ſin. NMP}}{\text{coſ. NMP}}$, adeoque eſt $\frac{\text{coſ. NMP}}{\text{ſin. NMP}}$ = coſ. M N . $\frac{\text{ſin. MNP}}{\text{coſ. MNP}}$. Erit igitur coſ. A O D = coſ. N M O . coſ. M N P — ſin. N M O . ſin. M N P . coſ. M N $= \surd (1 - \pi^2) . \surd (1 - l^2) \mp \pi l q$, & neglecto rurſus l^2, erit coſ. A O D $= \surd (1 - \pi^2) \mp \pi l q$, & ſin. A O D $= \surd (1 - 1 + \pi^2 \pm 2 \pi \surd (1 - \pi^2) . l q - \pi^2 l^2 q^2) = \pi \pm l q . \surd (1 - \pi^2)$, ac denique ſin. A O D . coſ. A O D $= \pi \surd (1 - \pi^2) \mp \pi^2 l q \pm l q (1 - \pi^2) - \pi l^2 q^2 \surd (1 - \pi^2) = \pi \surd (1 - \pi^2) \pm l q . (1 - 2 \pi^2)$, & medius angularis nodorum motus evadet $= \frac{3 Q . (\pi \surd (1 - \pi^2) \pm l q . (1 - 2 \pi^2)) . \varphi a . dz}{2 \pi t A}$.

Formulæ modo inventæ pars prior $\frac{3 Q . \surd (1 - \pi^2) . \varphi a . dz}{2 t A}$ ex-

exprimet præceſſionem æquinoctiorum, quæ media erit pro loco quolibet nodi aſcendentis lunaris orbitæ: ſcilicet æqualis erit præceſſioni veræ in octantibus nodorum, & dimidia præceſſionis maximæ in quadraturis. Pergendo autem ab O ad D ſumma motuum omnium verorum præceſſionis erit ut ſumma omnium Dh^2, ſive ut DT ducta in ſegmentum circulare DhO: & ſumma motuum omnium mediocrium erit ut ſumma omnium $\frac{1}{2}DT^2$, ſive ut DT ducta in ſectorem circularem DTO: & duorum motuum differentia erit ad motum totalem verum ut triangulum DTh ad ſegmentum DhO, ad motum autem totalem medium ut DTh ad DTO. Quare in octantibus, cum ſit $Dh = hT$, differentia eadem evadet maxima, & ad totalem motum medium ſe habebit ut $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{16}p$, ſive ut dupla diameter ad peripheriam: quæ pariter ratio eſt æquationis medii nodorum motus ex Sole orti. Pars vero altera ſuperioris formulæ $\frac{\pm 3Q.lq.(1-2\pi^2).\varphi a.dz}{2\pi t A}$ exprimet præceſſionis mediæ æquationem, quæ ex Lunæ viribus pendebit, & vario loco nodi aſcendentis lunaris orbitæ. Scilicet in regreſſu nodi aſcendentis ab æſtivo ad hyemale ſolſtitium præceſſionis motus augebitur in ratione quantitatis q, ſive in ratione coſinus diſtantiæ nodi aſcendentis ab Æquinoctio. Nodo autem ipſo ab hyemali ſolſtitio ad æſtivum redeunte verus præceſſionis motus minuetur iiſdem gradibus, quibus antea augebatur.

Maxima differentia medii, & veri motus nodorum terreſtris æquatoris habebitur nodo aſcendente lunaris orbitæ in punctis æquinoctialibus conſtituto, poſito ſcilicet $q = \pm 1$, atque erit maxima eadem differentia = $\frac{\pm 3Q.l.(1-2\pi^2).\varphi a.dz}{2\pi t A}$, & medius præceſſionis motus ad differentiam ipſam ſe habebit ut $\pi.\sqrt{(1-\pi^2)} : \pm l.(1-2\pi^2) = \frac{\pi.\sqrt{(1-\pi^2)}}{1-2\pi^2} : l$. Eſt vero $1-2\pi^2 = 2(1-\pi^2)-1$, qui eſt coſinus duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris, atque eſt $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ dimidium ſinus ejuſdem duplæ inclinationis, adeoque eſt $\frac{\pi.\sqrt{(1-\pi^2)}}{1-2\pi^2}$ dimidia duplæ inclinatio-

 nis

nis tangens. Itaque tangens duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris erit ad ſinum duplæ inclinationis eclipticæ, & orbitæ lunaris, ut præceſſio æquinoctiorum annua mediocris vi Lunæ genita ad differentiam præceſſionis mediocris, & maximæ, aut minimæ: quod elegans theorema cum aliis pluribus a clariſs. Walmesley inventum eſt in Tranſactionibus Philoſophicis.

Dum autem nodus aſcendens lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus regredietur per datum quemcumque arcum MN, erit ſumma motuum omnium mediocrium ad totam præceſſionis æquationem ut ſumma omnium $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ ad ſummam totidem $\pm lq.(1-2\pi^2) = \pi\sqrt{(1-\pi^2)} \frac{.\,S\,dq}{\sqrt{(1-q^2)}} : \pm l.(1-2\pi^2) \frac{.\,S\,q\,dq}{\sqrt{(1-q^2)}} = \pi\sqrt{(1-\pi^2)}.$ MN $: l.(1-2\pi^2).$ ſin. MN: tota nimirum præceſſionis æquatio augebitur in ſimplici ratione ſinus diſtantiæ nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, & nodo ad puncta ſolſtitialia tranſeunte æquatio ipſa fiet maxima, & præceſſioni addenda erit in ſignis meridionalibus, in borealibus vero ſubtrahenda, ut etiam ferunt theoremata, & tabulæ a Simpſonio traditæ in ſcholio, & corollariis Problematis ſeptimi. In tranſitu nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia cum fiat MN $= \frac{1}{4}pA$, & ſin. MN $= A$, erit tota præceſſio media ad maximam differentiam mediæ, & veræ præceſſionis ut $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{1}{4}p : \pm(1-2\pi^2).l = 1 : \frac{\pm(1-2\pi^2).l}{\pi.\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{1}{4}p}$.

Quare ſi motus medius nodi aſcendentis lunaris orbitæ ad motum medium præceſſionis æquinoctiorum vi Lunæ genitum ſe habeat ut $n:m$, quo tempore nodus aſcendens abſolvet arcum 90°, erit motus medius præceſſionis $= \frac{m}{n-m}.90°$, & mediæ, ac veræ præceſſionis differentia erit $= \frac{\pm(1-2\pi^2).ml.90°}{\pi.(n-m)\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{1}{4}p}$: & cum ſit $\frac{2\pi\sqrt{(1-\pi^2)}}{1-2\pi^2}$ tangens inclinationis duplæ eclipticæ, & æquatoris, & $2l$ duplus ſinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, erit motus idem medius præceſſionis $\frac{m}{n-m}.90°$ ad præceſſionis æquationem habitam

bitam

bitam in tranſitu nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia in ratione compoſita quadrantis $\frac{1}{4}p$ ad radium, & tangentis inclinationis duplæ eclipticæ, & æquatoris ad duplum ſinum inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam. Inſuper cum ſit $\frac{90^\circ}{\frac{1}{4}p} = \frac{20000 . 90^\circ}{31415} = 57^\circ\, 17'\, 51''$, erit eadem differentia mediæ, ac veræ præceſſionis $=$
$\frac{\pm(1-2\pi^2).ml.57^\circ\, 17'\, 51''}{\pi(n-m)\sqrt{(1-\pi^2)}}$.

VIII.

De nutatione terreſtris axis.

NUtatio terreſtris axis, & variatio inclinationis axis ipſius ad Eclipticam, alia eſt quæ in tranſitu Solis, aut Lunæ ab uno ad aliud æquinoctium abſolvitur, alia quæ reſpondet revolutioni nodi aſcendentis lunaris orbitæ. Ut a prima exordiamur ſit angularis motus nodorum Eclipticæ, & æquatoris, ſive regreſſio punctorum æquinoctialium $= dy$, arcus N N′ (*Fig.* 11.) quo regrediuntur nodi $= A\,dy$, & arcus N N″, quo punctum nodi prioris N ſupra planum eclipticæ elevabitur $= A\,\pi\,dy$. Dum hac ipſa prioris nodi elevatione æquator CN in CN′ abibit, arcus Pp (*Fig* 15.), quem polus telluris P circa lineam AB, & ſecundum Tz deſcribet, erit $= \frac{A\,a\,\pi\,dy}{NQ} = \frac{A\,a\,\pi\,dy}{AG}$. Reſolvatur hic motus in duos alios ſecundum TQ perpendicularem, & Qz parallelam nodorum lineæ Nn, ſive in $\frac{TQ.\,a\,\pi\,dy}{AG}$, & $\frac{Qz.\,a\,\pi\,dy}{AG}$. Ob æquales angulos QT$z$, GTA, erit AG $=$ Qz, TG $=$ TQ, & fiet prior motus $= \frac{TG.\,a\,\pi\,dy}{AG}$, alter vero $= a\,\pi\,dy$. Itaque polus ipſe binos motus præſeferet, quorum unus parallele ad rectam TQ, & circa lineam nodorum Nn abſolvetur, inclinationemque eclipticæ, & æquatoris variabit angulo $\frac{TG.\,\pi\,dy}{AG}$: alter vero, qui parallelus erit rectæ Qz, efficiet ut polus circa axem Eclipticæ TH nodorum lineæ perpendicularem deſcribat angulum $\frac{a\,\pi\,dy}{HP} = dy$, æqualem ſcilicet angulari nodorum

rum eorumdem motui: atque erit angularis motus nodorum ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris ut dy: $\frac{TG.\pi dy}{AG} = AG:\pi.TG$.

Si negligatur motus, qui ſolam inclinationem afficit, & qui una ſemirevolutione Solis, aut Lunæ circa Terram reſtituitur, ducaturque planum P T M, quod ſit eclipticæ, & lineæ nodorum N n perpendiculare; manifeſtum eſt motis nodis, & per totam æquatoris peripheriam decurrentibus, planum ipſum, ac totam terram circa axem eclipticæ revolvi oportere. Ita ex omnibus æquatoris terreſtris nutationibus circa omnes diametros A B conceptis, unicus motus exſurget, qui nodos dumtaxat retrahet, & circa axem eclipticæ abſolvetur: atque axis rotationis terræ circa axem eclipticæ duas conicas ſuperficies ſibi invicem in centro obverſas deſignabit, & poli terræ circa polos eclipticæ duos circulos. Quia vero nodorum motus æquabilis non eſt, iidem circuli a polo terræ inæquabiliter deſcribentur, & maxima poli velocitas habebitur in quadraturis Solis, aut Lunæ, & nodorum: univerſim autem velocitas proportionalis erit quadrato diſtantiæ Solis, aut Lunæ a punctis æquinoctialibus. Denique hic motus circa axem eclipticæ contra ordinem ſignorum, ſive ab oriente in occidentem cum fiat; Stellæ fixæ, atque alia cæleſtia corpora ab occidente in orientem progredi videbuntur, & retrocedentibus ſemper nodis, Stellarum longitudo, quæ a prima interſectione eclipticæ, & æquatoris ſupputatur, ſemper augebitur, & incrementum annuum longitudinis annuo nodorum motui æquale erit.

Porro in triangulo ſphærico A N C (*Fig.* 11.) eſt coſinus A N C ad ſinum totum ut co-tangens arcus C N, ſive $\frac{TH}{CH}$, ad co-tangentem arcus A N, ſive $\frac{TG}{AG}$. Quare erit $\frac{TG}{AG} = \frac{TH}{\sqrt{(1-\pi^2)}.CH}$, & angularis nodorum motus ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris ſe habebit ut $\sqrt{(1-\pi^2)}.CH:\pi.TH$: ſcilicet erit tangens $\frac{CH}{TH}$ diſtantiæ ab æquinoctiis ad tangentem $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$ obliquitatis eclipticæ, ut præceſſio horaria æquinoctiorum ad variationem

ho

horariam inclinationis. Ipſa autem variatio horaria erit $= \frac{3\pi . CH . TH . \varphi a . dz}{t . A^3}$: ſcilicet dum Planeta attrahens in ſyzigiis aut quadraturis cum nodorum linea reperietur, nulla erit variatio, & in octantibus erit maxima, atque in tranſitu a ſyzigiis nodorum ad primam quadraturam augebitur inclinatio, ac deinde imminuetur iiſdem gradibus, quibus antea creverat, & ſingulis ſemirevolutionibus reſtituetur in gradum priſtinum. In octantibus cum ſit $CH = TH$, & verus præceſſionis motus æquetur medio, erit motus ipſe præceſſionis ad motum maximum variatæ inclinationis habitum eodem tempore ut $\sqrt{(1 - \pi^2)} : \pi$. In tranſitu autem Planetæ attrahentis a ſyzigiis nodorum ad quadraturas erit tota variatio inclinationis ad ſummam variationum totidem maximarum ut ſumma omnium $TH . CH$ ad ſummam totidem $\frac{1}{2} A^2$, ſive ut $\frac{1}{2} A^3 : \frac{1}{8} p A^3$, vel ut dupla diameter ad peripheriam.

Denique tota præceſſio æquinoctiorum habita in ipſo tranſitu a ſyzigiis nodorum ad quadraturas erit ad variationem totam inclinationis eclipticæ, & æquatoris in ratione compoſita $\sqrt{(1 - \pi^2)} : \pi$, & $p : 4$, ſive erit tota eadem variatio $= \frac{6\pi . \varphi a . 90^\circ}{p t A}$, nimirum quarta proportionalis ad $\frac{1}{4} p$, $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)} . \varphi a . 90^\circ}{2 t A}$, & $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$: quod aliud clariſſimi Walmesley theorema eſt. Subſtitutis ſuo loco numeris in hypotheſi terræ totius ſolidæ, & homogeneæ, ac poſito $\frac{\varphi a}{A} = \frac{1}{231}$, & $\pi = \frac{2}{5}$, fiet circiter $1\frac{1}{2}''$ tota variatio inclinationis æquatoris terreſtris ad eclipticam, quæ habebitur tranſeunte Sole a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia. Pariter cum Lunæ æquator duobus fere gradibus inclinetur ad planum eclipticæ, ut dictum eſt, & ſit $226''$ annuus nodorum motus, qui ex vi Terræ, & ex forma oblata Lunæ oriretur, poſito $\sqrt{(1 - \pi^2)} = 9993908$, & $\pi = 348995$, fiet $\frac{348995 . 226''}{9993908}$, aut fere $8''$ variatio annua inclinationis lunaris æquatoris, ſi in eadem hypotheſi nodorum linea in octantibus ſemper eſſet cum linea, quæ centra Terræ, & Lunæ conjungit: in toto autem tranſitu nodorum a quadraturis ad ſyzigias cum terra,

ſum-

ſumma variationum omnium hujuſmodi minuenda erit in ratione peripheriæ ad duplam diametrum.

Ut inveniatur nutatio alia terreſtris axis, quæ pendet ex Lunæ vi, atque ex loco nodi aſcendentis lunaris orbitæ retinendum eſt quod initio ſuperioris paragraphi invenimus, eſſe ſcilicet $\frac{3\,Q\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,\varphi a\,.\,dz}{t\,A^2}$ arcum, quo nodus æquatoris terreſtris O (*Fig.* 14.) cum plano lunaris orbitæ in plano ipſo D O *o* regredietur, eumdemque arcum ſe habere ad arcum alium, quem punctum O circa æquatoris radium AT, regrediente nodo, deſcribet, ut ſinus totus ad ſinum anguli A O D. His enim poſitis erit $\frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,\varphi a\,.\,dz}{t\,A^2}$ arcus, & $\frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,\varphi a\,.\,dz}{t\,.\,A^2\,.\,Ag}$ angulus quem nodus O, adeoque etiam polus, & axis terræ circa lineam AT deſcribet. Eodem igitur modo, quo antea, reſoluto poli terreſtris motu, (*Fig.* 15.) erit angulus quem axis terræ deſcribet circa lineam N *n* nodorum æquatoris terreſtris, & eclipticæ, quoque eclipticæ obliquitas variabitur $=$ $\frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD\,.\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,TG\,.\,\varphi a\,.\,dz}{t\,.\,A^3\,.\,Ag}$. Eſt vero $TG = Ag\,.\,\text{ſin.}\,NO - Tg\,.\,\text{coſ.}\,NO$, atque ex ſphæricis eſt $\frac{Tg}{Ag} = \frac{Th}{Dh\,.\,\text{coſ.}\,AOD}$. Itaque erit variatio eadem inclinationis axis terreſtris ad eclipticam $= \frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD}{t\,A^3}\,.\,(\text{coſ.}\,AOD\,.\,Dh^2\,.\,\text{ſin.}\,NO - Dh\,.\,Th\,.\,\text{coſ.}\,NO)\,.\,\varphi a\,.\,dz$, & ſi pro Dh^2 ſubſtituatur valor medius $\frac{1}{2}A^2$, & $\frac{2\,A^2}{p}$ pro $Dh\,.\,Th$ fiet variatio eadem media $= \frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD}{t\,A}\,.\,(\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,AOD\,.\,\text{ſin.}\,NO - \frac{2\,.\,\text{coſ.}\,NO}{p})\,.\,\varphi a\,.\,dz$.

Hæc formula complectetur rurſus duas partes, quarum altera $-\frac{3\,Q\,.\,\text{ſin.}\,AOD\,.\,2\,\text{coſ.}\,NO\,.\,\varphi a\,.\,dz}{t\,p\,A}$ ſingulis Lunæ ſemirevolutionibus contrario ſigno deſtruetur, & quia juxta paragraphum antecedentem coſinus NO eſt proxime æqualis radio,

&

& eſt ſin. AOD $= \pi \pm lq \surd (1 - \pi^2)$, expreſſio ipſa in hanc aliam vertetur $\frac{-6Q.\varphi a.dz}{tpA}.(\pi \pm lq\surd(1-\pi^2))$: adeoque præceſſio media æquinoctiorum eo tempore habita, quo Luna a punctis æquinoctialibus tranſibit ad ſolſtitialia, erit ad variationem mediam inclinationis ut $p\surd(1-\pi^2) : 4\pi$. Prior vero formulæ ejuſdem pars $\frac{3Q.\text{ſin.}AOD.\text{coſ.}AOD.\text{ſin.}NO.\varphi a.dz}{2tA}$ pendebit ex loco nodi aſcendentis lunaris orbitæ, & ſi pro ſin. NO ſcribatur $\frac{l.\surd(1-q^2)}{\text{ſin.}AOD}$, & $\surd(1-\pi^2) \pm \pi lq$ pro coſ. AOD, negligaturque poſterior terminus, qui una nodorum ſemirevolutione ambiguitate ſigni deſtruitur, fiet $\frac{3Q.l.\surd(1-\pi^2).\surd(1-q^2).\varphi a.dz}{2tA}$ variatio inclinationis axis terreſtris ad eclipticam, ſcilicet erit ipſa proportionalis diſtantiæ nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus.

Jam vero in regreſſu nodi aſcendentis a punctis ſolſtitialibus ad æquinoctialia eſt ſumma omnium $\surd(1-q^2) = S.\surd(1-q^2).\frac{dq}{\surd(1-q^2)} = \pm q$. Itaque in regreſſu nodi aſcendentis lunaris orbitæ a ſolſtitio æſtivo ad æquinoctium vernum augebitur eclipticæ obliquitas, & fiet maxima nodo ipſo ad æquinoctii punctum delato: tum nodo regrediente ad ſolſtitium hyemale obliquitas eclipticæ reſtituetur in ſtatum priſtinum. In regreſſu nodi aſcendentis a ſolſtitio hyemali ad æquinoctium autumnale fiet minima eclipticæ obliquitas, ac poſtmodum ad obliquitatem mediam rurſus redibit. Dato autem quocumque tempore erit tota variatio inclinationis ad differentiam mediæ, & maximæ obliquitatis ut $\pm q : 1$, ſive ut coſinus diſtantiæ nodi ab æquinoctio ad ſinum totum.

Denique valor medius quantitatis $\surd(1-q^2)$ eſt $= \frac{\pm 1}{\frac{1}{4}p}$. Quare in regreſſu nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia erit media obliquitatis variatio $= \frac{\pm 6Q.l.\surd(1-\pi^2).\varphi a.dz}{ptA}$, & anno integro $= \frac{\pm 6Q.l.\surd(1-\pi^2).\varphi a.360^{\circ}}{ptA}$, & quia revolutio nodorum lunaris orbitæ abſolvitur 18 annis, & 7 menſibus, erit quarta

parte ipſius revolutionis tota obliquitatis variatio $= \frac{\pm 3 Q . l . \surd (1 - \pi^2) . \varphi a . 18 \frac{7}{12} . 360^\circ}{p t A}$, & maximæ, ac minimæ obliquitatis eclipticæ differentia, quæ habebitur nodo aſcendente in punctis æquinoctii verni, & autumnalis conſtituto, erit $= \frac{3 Q . l . \surd (1 - \pi^2) . \varphi a . 18 \frac{7}{12} . 360^\circ}{p t A}$, ſive, retentis etiam l^2, accuratius erit $= \frac{3 Q . l . \surd (1 - l^2) \surd (1 - \pi^2) . \varphi a . 18 \frac{7}{12} . 360^\circ}{p t A}$.

Pariter binis formulis præceſſionis æquinoctiorum, & nutationis terreſtris axis collatis inter ſe invicem, erit motus præceſſionis ex Luna ortæ ad motum medium nutationis ut $1 : \frac{4 l}{p}$, ſive accuratius ut $1 : \frac{4 l}{p} . \surd (1 - l^2)$. Quare ſi motus medius nodorum lunaris orbitæ ad motum medium præceſſionis æquinoctiorum vi Lunæ genitum ut ſupra ſe habeat ſicuti $n : m$, & quo tempore nodus aſcendens per arcum 90° regreditur ſit motus medius præceſſionis $= \frac{m}{n - m} . 90^\circ$, erit tota nutatio terreſtris axis eodem tempore vi Lunæ genita $= \frac{\pm m}{n - m} . l . \surd (1 - l^2) . \frac{90^\circ}{\frac{1}{4} p} = \frac{\pm m}{n - m} . l . \surd (1 - l^2) . 57^\circ\ 17'\ 51''$, & fiet maximæ, ac minimæ obliquitatis eclipticæ differentia $= \frac{2 m}{n - m} . l . \surd (1 - l^2) . 57^\circ\ 17'\ 51''$.

IX.

De inæqualitatibus axis Terræ.

Ex hiſce formulis præceſſionis æquinoctiorum, & nutationis terreſtris axis facile eruitur proportio virium, quæ a Sole, & Luna exercentur in Terram noſtram, & quibus datis definiri poſſunt inæqualitates omnes terreſtris axis, quæ ex Sole, & Luna ortum ducunt. Cum enim ſit tota præceſſio annua æquinoctiorum, quæ ex viribus conjunctis oritur, 50, $3''$, & nutatio terreſtris axis, quæ oritur ex vi Lunæ, ſit $19''$, ut peculiaribus litteris ex Anglia datis Bradlejum ex ſerie obſervationum diligentiſſimarum collegiſſe accepi, erit

$$\frac{3(1+Q)\cdot\sqrt{(1-\pi^2)}\cdot\varphi a\cdot 360^0}{2.t\,A} :$$

$$\frac{3Q\cdot l\cdot\sqrt{(1-l^2)}\cdot\sqrt{(1-\pi^2)}\cdot\varphi a\cdot 18\frac{7}{12}\cdot 360^0}{p\,t\,A} = 50,3'' : 19'', \&$$

inde eruetur $1+Q:Q = l.\sqrt{(1-l^2)}.18\frac{7}{12}.503:p.95$, atque in locum ſpecierum ſubſtitutis iterum numeris erit $1+Q:Q = 503:356$, & $1:Q = 147:356 = 1:2,422$. Et quia vires perturbatrices ſunt ut denſitates, & cubi diametrorum apparentium conjunctim, per Coroll. 14. Propoſ. 66. Princip. Mathem. Newtoni; denſitas Solis ad denſitatem Lunæ ſe habebit ut 1 : 2, 422, & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis, ſive (diametros apparentes mediocres Solis, & Lunæ ſtatuendo cum eodem Newtono 32′ 12″, & 36′ 16½″) ut 1 : 2, 422, & 52861038777 : 57691436544 conjunctim, ſive denique ut 1 : 2, 643.

Eſt vero denſitas Terræ ad denſitatem Solis ut 4 : 1, per Coroll. 3. Propoſ. 8. Lib. 3. Princip., quæ ratio, ut Newtonus ipſe animadvertit, non pendet a parallaxi Solis, ſed a parallaxi Lunæ dumtaxat, ſemidiametro apparenti mediocri Solis, ratione diſtantiarum Terræ, & Veneris a Sole, & ratione temporum periodicorum Veneris, & Lunæ: adeoque in qualibet parallaxis Solis hypotheſi recte definita eſt. Itaque denſitas Terræ ad denſitatem Lunæ ſe habebit ut 4 : 2, 643. Rurſus vera Lunæ diameter eſt ad veram diametrum Terræ ut 100 : 365. Quantitas igitur materiæ in Terra ad quantitatem materiæ in Luna ſe habebit ut 4 : 2, 643, & 48627125 : 1000000 conjunctim, ſive ut 1945085 : 26430, vel denique ut 73 : 1, quemadmodum initio a nobis aſſumptum fuit. In hac ratione ſi dividatur diſtantia Terræ a Luna, prodibit diſtantia Terræ a centro gravitatis, circa quod cum Luna ſimul revolvitur. Et ſi fiat ut $22000 : \frac{60}{74}$ ita ſinus totus ad quartum, erit 3, 5 ſinus anguli maximæ aberrationis Terræ ab eodem centro, adeoque Terra in prima quadratura 7″ circiter gravitatis centrum antecedet, & totidem ſubſequetur in altera quadratura Lunæ, & differentia omnis ne ad quartam quidem minuti unius partem aſcendet.

Quia vero tota æquinoctiorum præceſſio, quæ ex conjunctis viribus Solis, ac Lunæ oritur, eſt annis ſingulis = 50,

 3″,

3″, atque eſt inſuper $1 + Q : Q = 503 : 356$; erit 35″ 36‴ præceſſio media annua, quæ ex Luna, & 14″ 42‴ præceſſio media, quæ ex Sole annis ſingulis ortum ducet. At in hypotheſi Terræ totius ſolidæ, atque homogeneæ, poſito $\frac{\phi a}{A} = \frac{1}{231}$, prodit annua præceſſio ex Sole orta $= 21\frac{1}{4}''$, ut in §. VI. dictum eſt. Vis igitur, quæ a Sole in exteriorem Terram vere exercetur, & quæ ad motum punctorum æquinoctialium impenditur, exæquat duas tertias partes vis omnis, quæ in hypotheſi Terræ totius ſolidæ ſimiliter exerceretur. Et quidem ſi intelligamus tertiam partem materiæ, quæ in exteriori terra extra inſcriptam ſphæram redundat, fluidam eſſe, patebit hujus phœnomeni ratio phyſica. Cum enim fluida viribus quibuſcumque impulſa, & agitata preſſionem ſuam verſus quamcumque partem æqualiter in ſolida corpora exerceant; ex attractione fluidarum partium nullus totius maſſæ terreſtris motus oriri poterit, ut recte ab Alembertio notatum eſt §. 82 de præceſſione æquinoctiorum. Si terra ex ſtratis ſphæroidicis, & ad centrum denſioribus componeretur, differentia ponderum abſolutorum in polis, & æquatore, major quidem eſſet quam in hypotheſi terræ homogeneæ; ſed major etiam prodiret æquinoctiorum præceſſio, ad quam ſtrata ſingula conducerent, & exterioris terræ pars pluſquam tertia admittenda eſſet fluida, quod affuſorum marium conſiderationi minus conſentaneum videtur eſſe. Idcirco cum ex omnibus hypotheſibus eam quæreremus, quæ eſſet ſimplicior, & phœnomenis omnibus ſatisfaceret, primo ſtatuimus terreſtres axes eſſe inter ſe ut 230 : 231, & aliquam rationis hujus diſſenſionem a quibuſdam graduum menſuris in irregularitates exterioris terræ rejecimus: deinde omnem terram, quæ extra inſcriptam ſphæram redundat, quinta ſui parte rariorem eſſe intelleximus ut pendulorum experimenta explicarentur: ac denique materiæ ejuſdem circa æquatorem redundantis tertiam fere partem fluidam eſſe cenſuimus, ut præceſſionis æquinoctiorum, & nutationis terreſtris axis obſervationibus ſimul omnibus ſatisfieret.

Quia præceſſio æquinoctiorum eo tempore habita, quo Sol tendit ab æquinoctiis ad ſolſtitia, eſt ad variationem totam inclinationis eclipticæ, & æquatoris ex Sole ortam ut $\sqrt{(1 - \pi^2)} . p : 4\pi$, poſitis omnibus, quæ ſupra, fiet variatio eadem unius ſecundi circiter. Variatio autem, quæ

Lu-

Luna ab æquatore ad Tropicos tranſeunte habebitur, ne ad ſextam quidem aſcendet unius ſecundi partem. Denique præceſſio media vi Lunæ genita, quo tempore nodus aſcendens lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus tranſibit ad ſolſtitialia, ſeu quarta parte unius nodi revolutionis, erit circiter 166″: unde cum motus medius punctorum æquinoctialium ad æquationem motus ipſius medii, juxta §. VII., ſe habeat ut $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}.p:4(1-2\pi^2).l$, fiet 18″ circiter æquatio maxima præceſſionis, quæ toti præceſſioni mediæ addenda erit dum nodus aſcendens ab æquinoctio verno regredietur ad ſolſtitium hyemale, detrahenda vero dum ab autumnali æquinoctio regredietur nodus ad ſolſtitium æſtivum. Quod ſi fiat ut ſinus totus ad ſinum diſtantiæ nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, ita 18″ ad quartum, habebitur æquatio, quæ dato nodi aſcendentis loco toti præceſſioni mediæ addenda erit, aut detrahenda. Differentia omnis maximæ, & minimæ præceſſionis, ſive angulorum a polo terræ circa polum eclipticæ una nodi aſcendentis revolutione ob Lunæ vim deſcriptorum erit 36″: & ſi fiat demum ut ſinus totus ad ſinum inclinationis axium Terræ, & Eclipticæ, ita 36″ ad quartum, evadet 14″ angulus ille, quem axis Terræ in plano coluri æquinoctiorum circa centrum eodem tempore abſolvet.

Hinc eruetur facile æquatio, quæ annis ſingulis præceſſioni mediæ æquinoctiorum addenda aut detrahenda erit. Cum enim regreſſus annuus nodi aſcendentis ſit 19° 21′ circiter, ſi nodi ipſius a punctis æquinoctialibus diſtantia, dimidio anno quovis propoſito, vocetur π, adeoque ineunte anno ſit $\pi - 9°\ 40'$, & anno labente $\pi + 9°\ 40'$, fiet tota anni illius æquatio $= 18''.(\text{ſin.}\ \overline{\pi + 9°\ 40'} - \text{ſin.}\ \overline{\pi - 9°\ 40'}) = 18''.2\ \text{coſ.}\ \pi.\ \text{ſin.}\ 9°\ 40' = 36''.\sqrt{(1-q^2)}.\ \text{ſin.}\ 9°\ 40' = 6''.\sqrt{(1-q^2)}$ circiter. Annuæ igitur, & mediocris præceſſionis æquatio proportionalis erit coſinui diſtantiæ nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, & regrediente nodo ab æſtivo ſolſtitio ad hyemale præceſſionem eamdem mediam augebit, totamque præceſſionem annuam efficiet maximam nodo aſcendente ad æquinoctium vernum delato. In ſemirevolutione nodi altera contrarium accidet, & annua præceſſio minima habebitur nodo aſcendente in puncto æquinoctii autumnalis conſti-

ſtituto. Hoc theoremate tabulam præceſſionis totius pro anno quovis propoſito exhibuit Eulerus ad calcem ſuæ diſſertationis. Ex. gr. quoniam initio Novembris menſis anno 1759 nodus aſcendens Lunæ ad prima Cancri puncta pervenit, anno illo media æquinoctiorum præceſſio præceſſioni veræ æqualis cenſeri potuit. Et quoniam nodus ipſe medio fere anno 1764 ad æquinoctium vernum tranſiit, eo anno maxima præceſſionis quantitas habita eſt, quæ rurſus in mediam recidet initio anni 1769, & circa finem anni 1773 evadet minima. Et quidem præceſſio maxima anni 1764 ſtatui debet 56″, & 44″ præceſſio minima anni 1773. Annis 1762, & 1766 vera præceſſio ſtatuenda eſt 55″, & 53″ annis 1761, & 1767.

Angulus vero quo axis terræ in plano coluri ſolſtitiorum nutabit, erit 19″, & axis verus hinc inde ab axe medio aberrabit angulo 9½″. Quod ſi fiat ut ſinus totus ad coſinum diſtantiæ nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, ita hæc dimidia nutatio, ſive dimidia variatio inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad differentiam inter variationem dimidiam, & variationem habitam dato tempore; habebitur tota nutatio, quæ dato nodi aſcendentis loco reſpondebit. Sic ſi nodus lunæ uno ſigno diſtet a punctis ſolſtitialibus, erit nutatio 8″, ſi vero diſtet uno ſigno, atque inſuper 10°, 15°, 25°, 30° erit 7″, 6″, 5″, 4″ circiter. Atque ita nutationis motus ellipſi exhiberi poterit, cujus centrum ſit medius poli locus, major axis ſit 19″ circuli unius maximi, axis minor 14″, & ille quidem in plano coluri ſolſtitiorum jaceat, hic vero in plano coluri æquinoctiorum: & motus omnis poli terreſtris ſatis accurate exhiberi poterit ellipſeos ejuſdem centro circa polum eclipticæ revoluto ea cum velocitate, quæ ad velocitatem maximam ſe habeat ut ſumma duorum quadratorum ex ſinubus diſtantiæ Solis, & Lunæ a punctis æquinoctialibus in reſpectivas perturbatrices vires ductorum, ad quadratum ſinus totius ductum in ſummam duarum virium. Aberrationis axis, inclinationiſque eclipticæ ad æquatorem variatio, quæ luminaribus ab æquatore ad tropicos tranſeuntibus habebitur, nimis exigua erit, quemadmodum antea vidimus, quam ut motus poli terreſtris eadem ellipſi exhibitus ſenſibiliter immutetur.

X

De inæqualitatibus axis Lunæ.

SI eodem modo definiri poſſet proportio virium, quæ vere in Lunam agunt, & quæ in hypotheſi Lunæ totius ſolidæ, homogeneæ, & ſphæroidicæ exercerentur, inæqualitates diurni motus accurate in Luna etiam innoteſcerent. At cum marium ſuperficies non niſi quintam, aut ſextam occupet diſci lunaris partem, cum maria verſus marginem ſint omnia, parvæ extenſionis ſingula, inſulis interſperſa, diviſa a ſe invicem, adeoque lacuum potius ſpeciem referant, & magna inſuper ſui parte ex materia ſolida, & ad lucem reflectendam minus idonea potius quam fluida, & pellucida veroſimilius componi debeant; verus lunaris æquatoris motus ab eo parum recedet, qui a nobis antea in hypotheſi Lunæ totius ſolidæ, & homogeneæ inventus eſt. Sola enim Lunæ homogeneæ hypotheſis a nobis aſſumi poteſt ne in hypotheſibus aliis confingendis nimis arbitrio concedatur, ut recte ab Alembertio notatum eſt §. 346. de Mundi ſyſtemate. In hypotheſi autem Lunæ homogeneæ, & circa polos compreſſæ, poſita differentia ſemiaxium $\frac{1}{115009}$, ut fert motus diurni ratio, juxta §. VI., erit motus medius nodorum æquatoris lunaris cum plano eclipticæ annis ſingulis pro aſpectu quolibet terræ, & nodorum $= 226'' = 3\frac{3}{4}'$, & motus medius pro quolibet aſpectu Solis, & nodorum erit $= 1\frac{1}{2}''$.

Et quidem motus ex Sole ortus vere erit medius ſingulis Lunæ revolutionibus cum Sol obtineat aſpectus omnes cum nodis lunaris æquatoris. At vero ob eamdem Lunæ faciem obverſam Terræ motus $226''$ non erit medius niſi pro toto eo tempore, quo linea nodorum a ſyzigiis cum Terra tranſibit ad quadraturas, quod tempus erit annorum $\frac{90°}{227\frac{1}{2}''}$, ſive 1424. Si linea nodorum perpendicularis ſit rectæ, quæ a centro Terræ ad centrum Lunæ ducitur, motus verus nodorum medii erit duplus, ſcilicet annis ſingulis $= 7\frac{1}{2}'$. In iiſdem etiam hypotheſibus maxima variatio annua inclinationis lunaris æquatoris, juxta §. VIII., eſſet $= 8''$, & annis 1424, ſive in tranſitu toto nodorum a quadraturis ad ſyzigias cum terra ſum-

ſumma variationum omnium inclinationis eſſet ad ſummam variationum totidem maximarum ut 20000 : 31415, ſive eſſet omnis variatio circiter 2°: quo demum Lunæ æquatorem cum plano eclipticæ congruere oporteret. Hoc ipſo autem quod inclinatio utriuſque plani minuatur, minuetur etiam variatio inclinationis, quæ dato quocumque tempore proportionalis eſt tangenti $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$: atque erit vera inclinationis variatio ad 2° ut ſumma tangentium omnium inclinationis ad ſummam tangentium totidem maximarum, ſeu proxime ut 1 : 2. Quare æquatoris Lunæ ad eclipticam inclinatio uno circiter gradu variari poterit ob vim Terræ in toto nodorum tranſitu a quadraturis ad ſyzigias cum Terra, & in reditu ad quadraturas reſtituetur in gradum priſtinum.

Formula inſuper $\frac{\pm(1-2\pi^2).ml.57°\,17'\,51''}{\pi.(n-m)\sqrt{(1-\pi^2)}}$, quam §. VII. tradidimus, & quæ mediæ æquinoctiorum præceſſionis æquationem exprimit, ad Lunam transferri poterit, ſi π deſignet ſinum inclinationis æquatoris lunaris ad planum eclipticæ, & n ad m ſe habeat ut motus medius nodorum lunaris orbitæ ad motum medium æquatoris lunaris vi Terræ genitum. Eſt autem motus medius annuus nodorum lunaris æquatoris $= \frac{3}{2}.\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{\varphi a}{A}.\frac{525969}{39343}.360°$. Quare ſi hæc quantitas in numeratore ſuperioris formulæ ſcribatur loco m, fiet tota medii motus æquatio pro eo tempore, quo nodus aſcendens lunaris orbitæ a ſyzigis nodorum lunaris æquatoris tendet ad quadraturas, fiet inquam $= \pm\frac{3}{2}.\left(\frac{1-2\pi^2}{\pi.}\right).l.\frac{\varphi a}{A}.\frac{360°}{n-m}.$ 57° 17′ 51″: quæ formula cum alia convenit, quam clariſſimus Alembertius tradiderat §. 345 par. 2 de Mundi ſyſtemate, & §. 12 de Libratione Lunæ.

Fiat modo $\frac{\varphi a}{A} = \frac{1}{115009}$, $m = 226''$, & cum ſit annis ſingulis $n = 19°\,21' = 69660''$, erit $n - m$ $69434''$. Rurſus cum inclinatio media lunaris orbitæ ad eclipticam ſit 5° $8\frac{1}{2}'$, erit $l = 0,089618б$, & cum inclinatio lunaris æquatoris ſit circiter 2°, erit $\pi = 0,0348995$, & $1 - 2\pi^2$ coſinus dupli anguli 88°, ſeu coſinus anguli 86° erit $= 0,997564$, & nume-

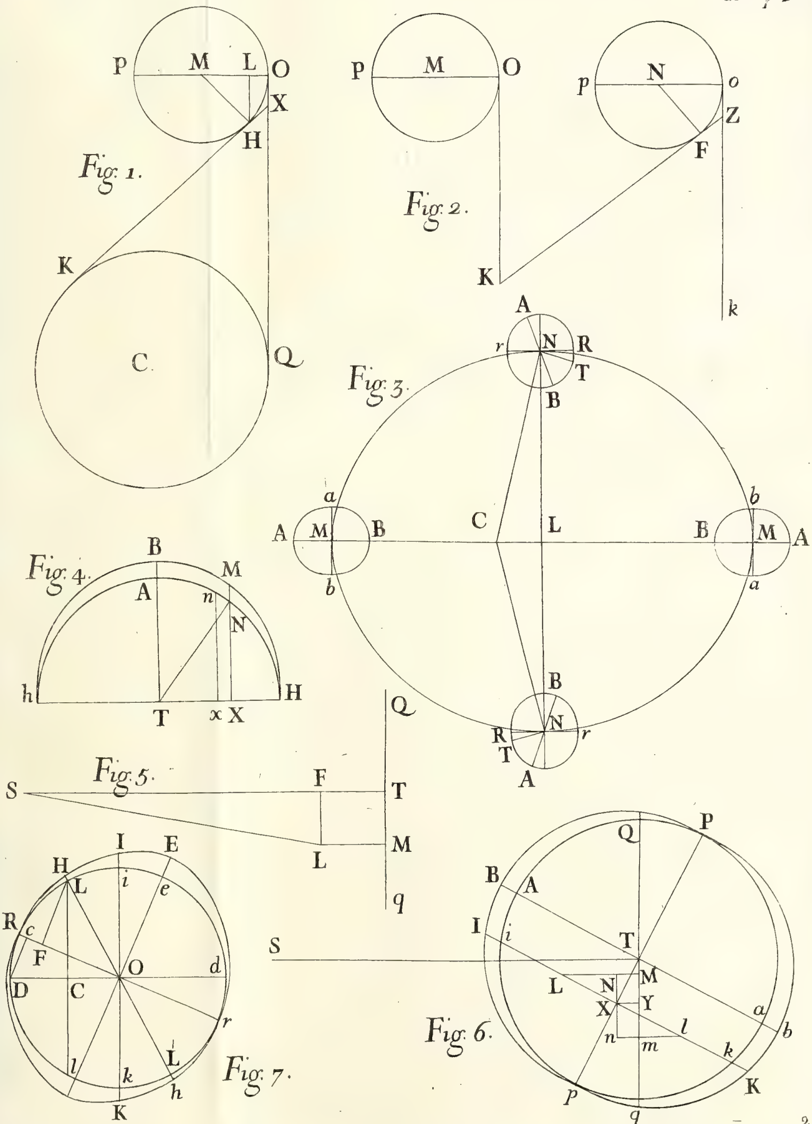
meris omnibus in antecedente formula ſubſtitutis prior pars æquationis medii motus nodorum lunaris æquatoris ob ſphæroidis oblatæ formam evadet $= 1720''$. Quod ſi altera æquationis pars requiratur, quæ pendere poteſt ex forma oblongæ ſphæroidis, & fiat $\frac{\varphi a}{A} = \frac{1}{38369}$, $m = 676''$, & $n - m = 68984$, prodibit ipſa $= 5177''$. Ita erit tota æquatio $6897''$, addendoque ut ſupra $\frac{1720'' + 2588''}{179}$, ſive $24''$ circiter ob vim Solis, erit æquatio $= 6921'' = 1^\circ\, 55'\, 21''$. Neglecta vero hac altera æquationis parte, & prioris dumtaxat ratione habita, addendoque $\frac{1}{179}$ ob vim Solis, cenſeri poterit vera æquatio $= 1729''$ $= 28'\, 49''$, & in tranſitu nodorum lunaris orbitæ a ſyzigiis nodorum lunaris æquatoris ad quadraturam unam, motui medio addenda erit æquatio, in tranſitu vero a ſyzigiis ad quadraturam alteram ſubtrahenda.

Pariter ſi in formula $\frac{\pm m}{n - m} . l . \sqrt{(1 - l^2)} . 57^\circ\, 17'\, 51''$, quæ nutationem axis terreſtris ex vi perturbatrice Lunæ ortam definit, ut §. VIII. dictum eſt, fiat $m = 226''$, $n - m = 69434''$, $l = 0,0896186$, $\sqrt{(1 - l^2)} = 0,9959761$, prodibit circiter $1'$ pro nutatione illa lunaris axis, quæ ex vi perturbatrice Terræ in oblatam Lunam exercita ortum ducet. Altera vero nutationis pars, quæ ex forma oblongæ ſphæroidis pendere poſſet, evaderet $3'$ circiter. His quantitatibus æquator, & axis Lunæ modo accedet ad planum, & axem eclipticæ, modo recedet, & differentia omnis inclinationis erit circiter $8'$, & ſolius primæ æquationis ratione habita, dumtaxat $2'$.

Falſum eſt igitur, quod Caſſinus in Actis Regiæ Pariſienſis Academiæ anni 1721 pro definiendo apparenti macularum lunarium loco, apparentique libratione Lunæ explicanda, principii loco aſſumpſerat, Lunæ polos circa polos Eclipticæ ad $2\frac{1}{2}^\circ$ diſtantiam binos circulos deſcribere eodem tempore, eodemque ordine, quo revolutio nodorum lunaris orbitæ, atque axis orbitæ ipſius circa axem eclipticæ abſolvitur. Ut enim a clariſſimo Alembertio §. 372 de Mundi ſyſtemate adnotatum eſt, revolutionis diurnæ axis, in hypotheſi Lunæ ſphæricæ ſibi ſemper parallelus maneret, & in

hypotheſi Lunæ ſphæroidicæ non alias viciſſitudines ſubire poteſt quam quæ inæqualitatibus perturbatricium virium reſpondent, & quæ longe minores ſunt, quam ut poli nutatio per arcum quinque graduum habeatur. Falſum eſt etiam nodos lunaris æquatoris, ac totius orbitæ eodem angulari motu affici: eſt enim annua regreſſio nodorum orbitæ 19° 21′, & motus medius annuus lunaris æquatoris $3\frac{3}{4}'$, ac tota medii motus æquatio 28′ 48″. Hæc adhuc diſſerui & motum terræ, & cæleſtium corporum attractiones, & alia id genus mathematicorum cogitata & hypotheſes ſubductis calculis explicare, & cum phœnomenis cæleſtibus conferre volui.

JOAN-


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

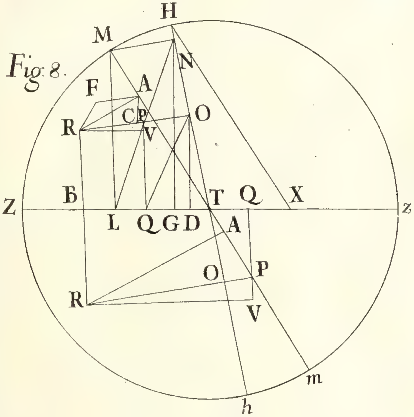


Fig. 8.

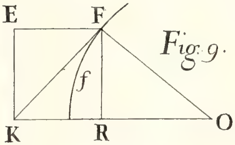


Fig. 9.

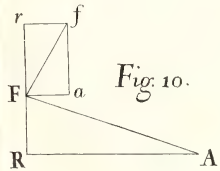


Fig. 10.

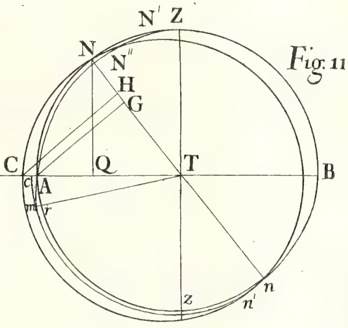


Fig. 11.

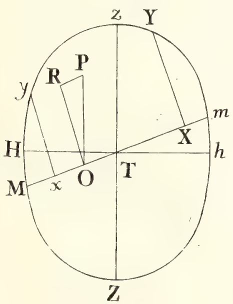


Fig. 12.

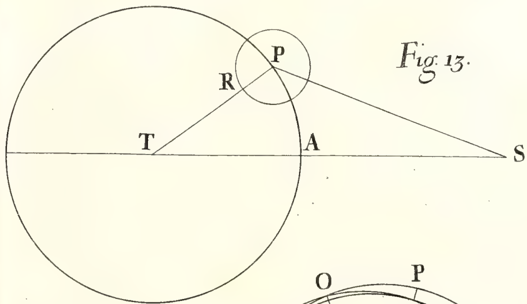


Fig. 13.

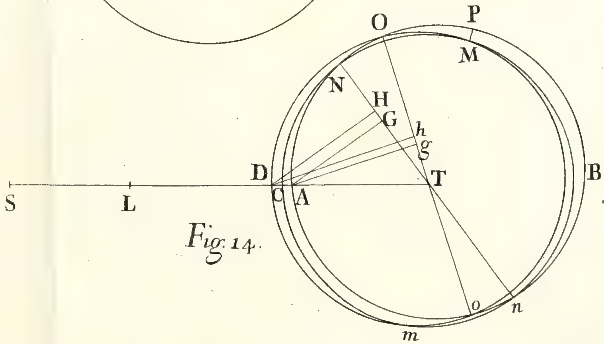


Fig. 14.

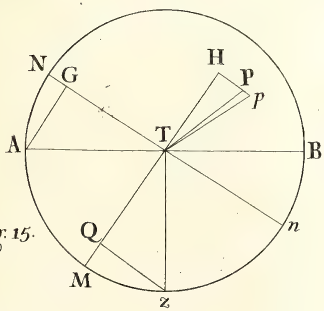


Fig. 15.

JOANNIS BAPTISTÆ A COVOLO.

De Metamorphoſi duorum oſſium pedis in quadrupedibus aliquot.

EST animantium corpus innumeris conſtructum partibus, ſupra quam dici poſſit ſubtiliſſimo opere contextis, tantaque ſapientia diſpoſitis & per accommodata vincula inter ſe colligatis, ut earum quæque cæteris omnibus communiter & famuletur & indigeat. Cum autem memoratarum partium pleræque inter ſe plurimum differant non modo quoad variam, & fibrarum, & vaſorum, & aliorum componentium diſpoſitionem, verum etiam ob diverſum duritiei, & mollitudinis, & flexibilitatis gradum, ex eo fit ut inſignes dum vivimus multiplicesque vices patiantur univerſæ animantis partes, propter varias earum vires, & potentias, & reſiſtentias, quibus invicem agunt. Quarum quidem virium potentiarumque actio quamquam jugis ſit & perpetua, major tamen ſit oportet a prima fœtus formatione ad animalis ortum, & multo major ab ortu ad ſummum uſque corporis incrementum.

Cæterum inter viciſſitudines, quæ ex aliarum in alias actione ſingulis partibus accidunt, eæ facile præcipuam merentur conſiderationem, quas ſubeunt oſſa; hæc enim cæterarum partium duriſſima cum ſint, propriamque tam belle in ſceletis retineant formam, oſſa cum oſſibus comparare non difficulter poſſumus, eorumque pro varia ætate mutationes diligentiori examine perſcrutari. Et ſane in infantibus recens natis maturoque tempore editis tenella oſſa ſimplicem, ut ita dicam, ſui incrementi gradum attigerunt; nam quæ ad illorum artus pertinent, figuram habent fere teretem, cætera vero corpuſculi oſſa vix aliquam ſcabritiem inæqualitatemque præſeferunt: ſed pro eo ut corpus magnitudine, & robore ſenſim augetur, atque ſuis partibus magis in dies magiſque ad vitæ munera utitur, oſſa paullatim mutantur, duriora fiunt,

novamque omnino aſſumunt formam ſulcis, ſuturis, tuberibus ultro citroque exaſperatam, oſſaque ipſa cum nonnullis oſſibus coaleſcunt. Atque hæ quidem varietates oſſium, & progreſſus jam ab excellentiſſimis Anatomicis fuerunt ſin minus omnia, certe pleraque animadverſa literiſque conſignata.

Verum ſingularem illam vicem, quam in bobus, & ovibus, & aliquot aliis quadrupedum ſpeciebus ſubit os, quod Galli *le canon* vocant, quodque, ni fallor, oſſibus noſtri metatarſi, & metacarpi, ſive ejus locum, ſive figuram ſpectes, reſpondet, nemo ante Clariſſimum Fougerouſium, quod ſciam, obſervavit. Reſque eſt profecto digna, quæ peculiariter animadvertatur.

Itaque obſervavit Clar. Fougerouſius in eorum animalium fœtibus os modo indicatum ſub prima formationis tempora ex duobus diſtinctiſſimis veruntamen ſe ſe tangentibus oſſibus ſuo ſingulis perioſteo obvolutis conſtare: tum paucis poſt hebdomadis hæc bina oſſa ſimul concreſcere, ut tandem naſcentibus vitulis & agnis unicum ſit os, illudque in duas cavitates ſepto ſatis conſpicuo diviſum. Aſſeritque oſſeſcere hujus oſſis epiphyſes in ipſo utero, atque ita cum oſſibus conjungi, ut in natis integræ amplius ſeparari non poſſint. Septum deinceps, quod nominavimus, magis magiſque attenuari animadvertit, & brevi reticulatum fieri; denique penitus deleri, ut cum animal ad ultimum incrementi gradum pervenerit, nihil quidquam in ejus oſſis cavitate relinquatur, quod tantæ commutationis indicium eſſe poſſit, ſi excipiatur ſulcus profundus, qui in externa oſſis facie ſecundum longitudinem remanet, unionis quam diximus veſtigium.

Atque hæc fere ſunt, quæ Fougerouſius in eum ſermonem contulit, quem nuperrime ad celebrem hanc Academiam miſit, cujus ad calcem addit, diſſimulare ſe non poſſe, quam ſibi gratum fuiſſet intelligere, cui bono voluerit natura, ut ex duobus unum os efficeretur, quave id ratione eveniat; fatetur enim obſcurum id ſibi plane eſſe, & præſertim quomodo ſeptum, quod ante memoravimus, primum gracileſcat, poſtea penitus obliteretur.

Cum autem gratum pariter tibi, Clar. Præſes, vobiſque, Academici ſpectatiſſimi, futurum ſenſerim, ſi quis in eandem rem inquireret, Fougerouſii obſervationes quaſcumque potui iteravi, & rem ipſam mechanice meliori quo poſſem modo

ag-

aggreſſus ſum explicare. Atque vos rogo ut primum hunc meum veſtra cauſa ſuſceptum levem quidem, ſed mihi certe jucundum laborem, tanquam aliquam mei in vos grati animi ſignificationem excipere velitis, qui me ſummo celeberrimæ veſtræ Societatis honore exornaſtis.

Meis igitur obſervationibus agnos perſecutus ſum, ſed eos non niſi ab illo tempore, quo in lucem eduntur, ad illam uſque ætatem, quæ ſummum ipſis affert incrementum. Fœtus in promptu non habui, neque in anguſtiſſimo ſeptem dierum ſpatio in natis ipſis ſingulos ætatis gradus niſi interciſa ſerie comparare mihi potui. Id tamen rei, quam quærimus, nihil quidquam officit, uti mox intelligetis. Quo vero major meis obſervationibus fides haberetur, ipſas quas feci præparationes huc attuli.

Quarum duæ, quæ litera A deſignantur (*vide Fig.* A), referunt bina oſſa decerpta ex agno duodecim horas nato, ac nondum, nec lacte quidem, paſto. Atque hic quidem apparent oſſa duo primigenia, quæ ſumma primum diligentia poſtea nullo negotio diduxi. Ex quo profecto intelligitis illud verum non eſſe, quod intra matris alvum eadem duo oſſa in unum coaleſcant os ſepto partitum, ſed adhuc diſtincta permanere quamvis contactu arctiſſimo conjuncta. Reticendum tamen non eſt, perioſteon, qua parte ſe tangunt oſſa, tenuiſſimum eſſe, quemadmodum ipſorum quoque oſſium parietes ibi loci, præſertim in medio, nonnihil tenujores apparere.

Oſſiculum litera B (*Fig.* B) ſignatum ad agnum pertinebat neſcio quot dies natum ſed certe paucos. Id pariter non ſine anatomica induſtria fere totum in duo diducere mihi contigit, quamvis laminarum, quæ ſeptum conſtituunt, portio unius alteri in diductione adhæſerit. Poſt id tempus laminarum (*Fig.* C) coalitus, & tenuitas uſque adeo major fit ut non ſecus ac talci foliolum tranſpareant, & quacumque adhibita diligentia & arte ſeparari non amplius poſſint; quin etiam brevi incipit ſeptum foraminulis refertum apparere ut cribri ſpeciem referat, idque in media tantummodo oſſis parte, ut videre eſt in præparatione, quam litera C (*Fig.* D) inſignivi. Foraminula hæc magis magiſque deinceps ampla fiunt, ut in ſubtiliſſima tandem abeant filamenta. Cum autem agnus jam aries factus eſt, non ſine admiratione vidi ego reſtare utique adhuc in ejus oſſibus ſeptum, in media tamen

oſſis

oſſis parte deficiens, ſed non omnino, conſpicuum enim eo loci veſtigium ſemper ſupereſt, hinc ſcilicet oſſea ſpina, illinc tantula prominentia. Obſervate præparationem litera D (*Fig.* E) ſignatam. Atque hæc ad interiora oſſis pertinent.

Quod ad exteriora ſpectat, ſi de pede anteriori loquamur, in poſtica parte conſpicitur ſulcus ab oſſis medio ad ſuperiora ſat profundus; in antica vero, quæ tota convexa eſt, obſervatur oſſium conjunctionis veſtigium, idque minimum, & tantum verſus oſſis ipſius extrema. Sed in pede poſteriori formam fere quadratam refert os, binique in eo occurrunt ſulci alter anterius, poſterius alter, uterque ſuperficie tenus leviter inſculptus. In agni tamen recens nati oſſiculis nullum ſulcum offendi, ſed levem tantum lineam utrinque inſculptam: ut propterea mihi videantur ſulci illi a circumpoſitis partibus deinceps eo modo conformari, quo in cranio ab arteriis ſulci conformantur.

Quod vero ad epiphyſium coalitum attinet, eas nullo labore in his omnibus omnino, quæ in examen revocavi, agnorum oſſibus integras disjunxi perioſteo tantum antea diligenter ſeparato, imo idem effeci vel in ipſis arietum oſſibus, quamquam non ſine aliqua vi: veluti in præparationibus litera E (*Fig.* FFF) deſignatis conſpicitur.

Poſt has obſervationes, quæ non parum ab iis diſtant, quas Clar. Fougerouſius Academiæ propoſuit, non abs re alienum eſſe mihi videtur, ſi vobiſcum communicavero, me in iſtorum oſſium examine ne minimum quidem perioſtei indicium os inter & epiphyſim potuiſſe unquam cognoſcere.

Agite nunc, conjecturas, quas feci dum phœnomenon hocce attente perſequerer, benigne excipite.

Et primum quidem animadverto bina hæc oſſa, de quorum conjunctione quæſtio eſt, in utero materno, & extra parem inter ſe habere magnitudinem & figuram; atque ea parte, qua ſe reſpiciunt, in planam deſinere ſuperficiem. Quod vero oſſium reliquum eſt ad cylindricam figuram quam proxime accedit, exceptis extremitatibus, quæ ut in cæteris hujuſmodi oſſibus nonnihil craſſeſcunt. Eorum oſſium unum externum eſt, internum alterum, inter ſe parallela, & ſecundum longitudinem ſe mutuo tangunt. Utriuſque oſſis caput cum oſſibus committitur noſtro & carpo, & tarſo reſpondentibus; in baſi vero adjunctas habent epiphyſes unumquodque

ſuam,

ſuam, quæ ſibi pariter adhærent, & utraque in trochleæ ſpeciem pulcherrime terminatur. Per has autem trochleas utrumque os cum oſsibus, ut opinor, phalangium articulo firmatur. Quam ob rem naturaliter ſic poſita ſunt hæc oſſa, ut a poſterioribus ad anteriora oblique deſcendant. Per mediam vero eorum partem anteriorem aliquot validiſsimi tendines excurrunt, multoque plures per poſteriorem, ſuis ſinguli vaginis incluſi multa cellulari tela obductis. Hi tendines tendinibus reſpondent muſculorum, qui in nobis digitos flectunt, atque extendunt. Omnia autem hæc in hiſce beſtiolis etiam recens natis, pelle ſatis firma & robuſta circumambiuntur.

Vix ſolis lumina exorti viſunt agni, adhuc maternæ alvi humoribus madentes jam pedibus innituntur, ambulant, matrem norunt & quocumque ſequuntur; vel lactentes ſub matre geſtiunt, & hinc illinc læta pabula perſultant, nec motibus parcunt; multo aliter ac nobis hominibus accidit, qui molliſſimo corpore atque infirmo naſcimur, primamque vitam trahimus omnium rerum inſcii vagitus lugubres inter & ſomnum.

Jam vero his præmiſſis facile crediderim intus in utero illa oſſicula pati nihil aliud, niſi ut contigua cum ſint & parallela, & inſtar argillæ mollia, alterum alteri ſe accommodent quo primum tempore evolvuntur, unde binæ illæ, quas ſupra memoravimus, planæ ſuperficies exoriantur, atque ex eo fortaſſe parietes ad eam partem aliquantulum ſubtiliores evadant.

Nunc autem quis non videt agno vix nixibus ex alvo matris egreſſo, ex tot ejus motibus & ſaltationibus oſſa, de quibus agimus, validam compreſſionem perferre, ejuſque compreſſionis effectum fere totum in illam oſſium ſuperficiem cadere, qua ſe mutuo tangunt? Tum enim præter totius corporis pondus, quod iiſdem oſſibus incumbit oblique poſitis, intumeſcunt muſculi & tenditur fortiter pellis, qua ſic tenſa, & maxima tendinum, quos memoravimus, potentia inſuper addita, ſatis jam virium eſſe intelligitis, ex quibus utrumque os valide fortiterque conſtringatur, atque aliud contra aliud ſtrictim adigatur, adeo ut ex diuturna compreſſione modo majori, modo minori, jam os cum oſſe ita coaleſcat ut ex duobus unum os fiat.

Quin etiam illa compreſſione, de qua loquimur, neceſſe

eſt

eſt ut vaſcula ſanguifera, quæ per medias eorum oſſium fibras excurrunt, materiem iiſdem afferentia, ex qua incrementum & duritiem accipiant, ſtrictim veluti in torculari agantur, ſicque interjecto ſepto maxima parte ſin minus omnes deficiant ſucci unde nutriantur. Quam ob rem veluti ſi rivuli ramulus intercipiatur, aqua labitur copioſior per alios, & ſi arteria circumligetur, fluit ſanguis uberius per vicinas arteriolas, eaſque ſenſim dilatat, ita cum compreſſio labi ſinat in ſeptum per ejus vaſa parum aut nihil humoris; hic humor ſibi viam facit per arteriolas, quæ per reliquum oſſis diſſeminantur.

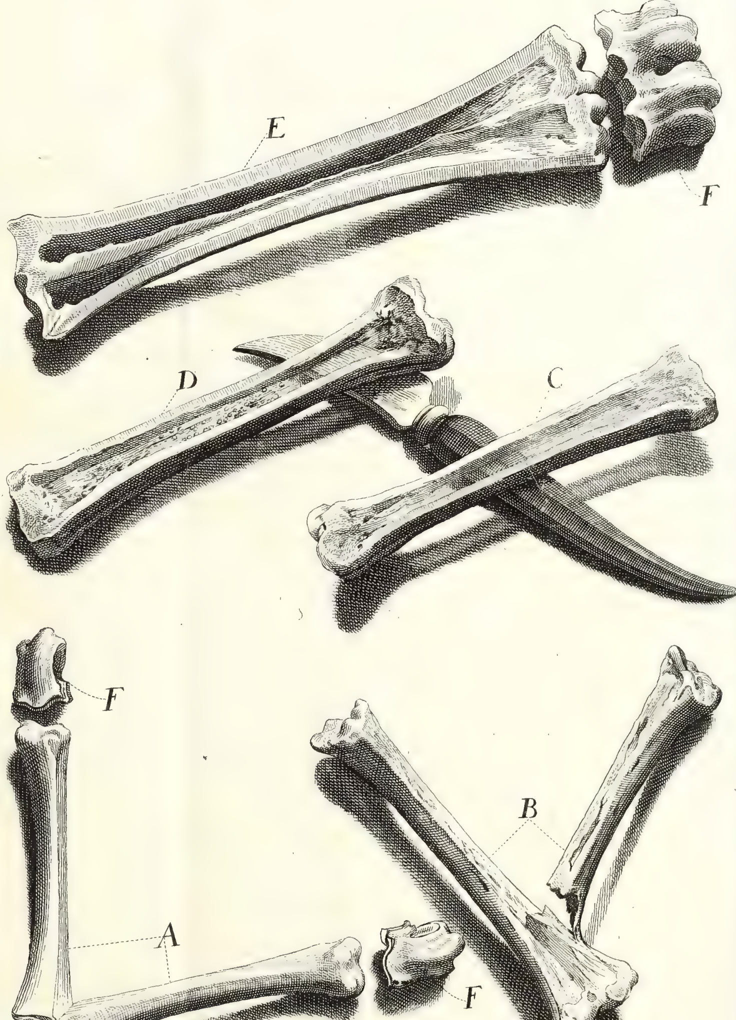
Nunc dum mecum reputo quanta celeritate oſſa omnia in hiſce animantibus augentur & indureſcunt, dumque animum adverto oſſibus, de quibus agimus, copioſius alimentum ſuppeditari, mihi videor rationem jam intelligere cur ſeptum parum, aut nihil altum deinceps valde extenuetur in dies magis magiſque, interim dum reliquæ oſſis partes plurimum adoleſcunt; quæ ſane interea dum adoleſcunt, & ſecundum omnes dimenſiones creſcendo cavum, quod comprehendunt, amplificant, non ne conſequi videtur ut ſeptum adeo ſimul extenuatum diſtrahant, ita quidem ut ejus fibræ utriſque oblinitæ medullis diſiungantur, atque in retis ſpeciem conformentur; quod rete magis deinde ab eadem cauſa rarefactum tandem in media oſſis parte fere totum obliteretur? Ratio enim cur integrum ſervetur adhuc ſeptum ad utraſque oſſis extremitates etiam in ariete, ſi quid judico, profecto inde peti poteſt quod ſpongioſa in ea parte ſit oſſis ſubſtantia, atque ideo ibi loci quam diximus compreſſio, & quæ ab ipſa ſequuntur, cum iis, quæ in medio oſſe fiunt, nequaquam comparanda.

Atque ut hæc, quæ hactenus conjectura proſecutus ſum, magis comprobarem, præſto jam eſſent ex ipſo humano corpore exempla deſumta, & quidem plura; ſed nonnulla tantum in medium afferam.

Quod enim corporis partes, quæ in contactu ſunt, & premuntur, in unum concreſcant, oſtendit pericardium, quod diaphragmati ſemper adhærens, ita nexu indiſſolubili cum eo cohæret, ut pars a parte non amplius diſtingui poſſit aut ſeparari.

Quod vero ad ipſamet oſſa pertinet, quis mihi præter contactum & preſſionem, probabiliorem dederit rationem,

qua-


E
F
D
C
F
A
F
B

quare epiphyſes, quando oſſeæ factæ ſunt, oſſibus coaleſcant? Quæ ſane res in ruſticis omnibuſque iis, qui vitam vivunt laborioſam, citiſſime fieri obſervatur; contra in ſequiori ſexu effæminatiſque viris tardiſſime, & non raro nunquam.

Quod autem ex oſſis diſtractione ejus interna pars celluloſa fiat & reticularis, ex eo intelligi poteſt, quod in bajulis, inque iis, qui maximis nixibus victum quæritant, tanta ſit muſculi ſternomaſtoidei potentia trahens, ut proceſſus mammillares magis in illis excreſcant, atque intus in plures cellulas abeant, quam in fœminis, & minus exercitatis.

Quod ſi forte ex me quærat aliquis, quid factum fuerit duabus illis perioſtei laminis, quæ inter utrumque os torquebantur; Clariſs. Anatomicorum ſequens ſententiam, reſpondebo, perioſteon non ſecus ac ſimplex membrana omnia oſſa & cartilagines immediate circumambire, ad eum modum quo pleura, & peritoneon circumambiunt viſcera pectoris, & imi ventris, & quo diſſimiles quæque corporis partes diſcernuntur ab tela cellulari, cum non niſi ex hac ipſa tela plus minuſve conſtipata membranæ conſtare videantur. Quamvis enim perioſteon filis tenuioribus, & ſubtiliori opere contextum appareat, id fortaſſe lævi oſſium ſuperficiei, cui aptatur, & perpetuæ oſſium reſiſtentiæ, & muſculorum tendinumque preſſioni debetur. Opinor igitur duas perioſtei portiones conſtrictas inter ſepti laminas incredibilem in modum extenuari debere, ita ut ab fibrarum ſepti diſiunctione ipſæ quoque diſiungantur, atque in telam celluloſam abeant primigeniam, quæ cum celluloſa cavi commiſceatur.

Hæc habui quæ ſuper Clar. Fougerouſii obſervationibus pro viribus animadverſa, & cogitata graviſſimo judicio veſtro ſubjicerem. Quod autem voluerit natura ut ex duobus oſſa, de quibus ſermo fuit, in unum concreſcerent, aut fallor, aut „ *dicere non eſt qui poſſit, neque eam rationem reddere dictis.* „

SEBASTIANI CANTERZANI.

De attractione ſphæræ.

I. DE attractione ſphæræ acturus hæc ſcilicet primum pono. Vis, qua unumquodque corpus attrahit, coaleſcit ex illis viribus, quibus attrahunt particulæ ejus omnes minimæ. Unaquæque vero particula minima tanto majori vi attrahit, quanto & major eſt ejus maſſa, & minus eſt quadratum diſtantiæ, quæ inter ipſam & id, quod ipſa trahit, intercedit. Hæc cum ita ſint, dico, ſphæram, ſi homogenea tota ſit, punctum extra ipſam poſitum ſic ad ſe trahere, uti illud ad ſe traheret particula quædam minima in ſphæræ centro poſita, eamdem habens maſſam ac ſphæra ipſa. Id multi analytice demonſtrarunt; ſynthetice, quod ſciam, nemo. Ut id ipſe, ſi poſſem, præſtarem, hortatus eſt Franciſcus Maria Zanottus; cujus viri cauſa quid non fecerim? Demonſtrationem nunc meam, qualiſcumque eſt, hortante id etiam Zanotto, vobiſcum, Sodales optimi, communicabo, atque initium hinc ducam.

II. Sit MO (*Fig.* I.) arcus circuli, cujus centrum A, ſinus MF. Sagitta FO intelligatur diviſa in partes minimas, eaſque facilitatis cauſa æquales; ſintque e diviſionum punctis p, q, t, &c. ductæ perpendiculares ad FO lineæ pm, qn, tr, &c., quæ abſcindent arcus minimos, velut mn, nr. Revolvente ſe arcu MO circa radium immobilem AO, dum ipſe ſegmentum ſphæricæ ſuperficiei deſcribet, arcus illi mn, nr, &c. totidem zonulas deſignabunt, quibus illud ſegmentum conflatur. Ejus propterea attractio harum zonularum attractione conſtabit.

Attrahant itaque hæ zonulæ punctum in centro A conſtitutum. Si maſſam quidem, & diſtantiam tantummodo ſpectemus, par erit in omnibus attractio; ſunt enim omnes inter ſe æquales, ut quæ proportionales ſunt lineolis pq, qt, &c.,

&

& æque a centro A diſtant. Hanc attractionem, quæ omnino maſſa, & diſtantia æſtimatur, abſolutam vocabimus. Quod ſi conſideremus etiam obliquitatem, quam ſingulæ zonulæ habent ad punctum A, vimque abſolutam cujuſque ex notis mechanicæ principiis in duas reſolvamus, quarum una agat directione ad AO perpendiculari, altera directione ipſi AO parallela, facile quidem apparet, prima illa vi punctum A nihil commoveri, quippe quod æque circumundique trahitur in contrarias partes; ſolamque relinqui alteram, qua, ſi punctum A liberum eſſet, ab unaquaque zonula tractum ſecundum directionem axis AO verſus O moveretur. Hanc igitur liceat deinceps appellare attractionem reſpectivam. Conſtat autem eſſe attractionem abſolutam cujuſque zonulæ mn tanto majorem attractione hac reſpectiva, quanto radius Am, ſive AO major eſt linea Ap, ſeu quanto major eſt circumferentia, cujus radius AO, circumferentia, cujus radius Ap. Ex quo ſequitur, attractionem abſolutam ſegmenti ex revolutione arcus MO geniti ad ejuſdem attractionem reſpectivam, qua ſcilicet movet punctum A, eam proportionem habere, quam habet circumferentia, cujus radius AO, toties ſumta, quot ſunt partes minimæ pq, qt, &c. ſagittæ FO, ad congeriem circumferentiarum, quarum radii ſint Ap, Aq, At, &c.; ideſt quam habet ſegmentum ipſum ad circulum, cujus radius ſit ipſe ſinus MF: conſtat enim e geometria, ſegmentum ex revolutione arcus MO æquari circumferentiæ, cujus radius AO, in ſagittam FO ductæ; congeriem vero circumferentiarum, quarum radii Ap, Aq, At &c., ſeu zonam circumferentiis concentricis OM, FH contentam, circulo, cujus radius MF, æqualem eſſe.

III. Sit nunc ſemicirculus BMD (*Fig.* 2.), in cujus diametro producta accipiatur punctum quodvis A, ac centro A deſcribatur arcus circuli occurrens diametro BD in O, & ſemicirculo BMD in M. Ab O erigatur ad BD perpendicularis recta OR æqualis ſinui arcus OM: tum tota figura circa axem AD immotum revolvi intelligatur. Semicirculus quidem BMD ſphæram deſcribet, arcus OM ſegmentum ſphæricæ ſuperficiei, ac recta OR circulum. Sit hic circulus ejuſdem materiæ, & craſſitiei, ac ſegmentum, ejuſque maſſa tota in punctum O coacta concipiatur. Erit attractio abſoluta ſegmenti ad attractionem maſſæ in punctum O coactæ (in qua nullum ſane diſcrimen eſt vis abſolutæ, & vis reſpectivæ) ut ſegmentum ipſum eſt ad

circulum; pares enim ſunt diſtantiæ a puncto A. Sed ut ſegmentum ad circulum illum, ita eſt etiam (art. II.) vis abſoluta ſegmenti ad ejuſdem vim reſpectivam. Ergo erit attractio reſpectiva ſegmenti æqualis attractioni maſſæ in puncto O collectæ. Quare cum præterea eadem ſit utriuſque attractionis directio; agit enim etiam attractio reſpectiva ſegmenti ſecundum directionem axis AO (art. II.); idcirco trahitur punctum A perinde a ſegmento revolutione arcus OM genito, ac a maſſa circuli, cujus radius OR, in punctum O coacta.

Atque hæc quidem valent, quamcumque diſtantiarum rationem ſequatur attractio particularum, modo ſit maſſæ proportionalis Nullam enim adhuc opus fuit diſtantiarum legem ſtatuere.

IV. Ponamus ergo nunc legem illam, quam in theoremate ab initio (art. I.) finximus. Atque e ſemicirculi BMD centro C excitetur ad BD perpendicularis CT, quam ſecet in T recta AR puncta A & R jungens. Quoniam lineis AC, AO proportionales ſunt lineæ CT, OR, circuli ab lineis hiſce CT, OR in figuræ revolutione deſcripti eamdem proportionem habebunt, quam quadrata linearum AC, AO. Qui propterea ſi ejuſdem fuerint materiæ, & craſſitiei, & ſuam quiſque maſſam in proprium centrum coactam habuerit, pari ambo vi punctum A attrahent. Cum enim maſſæ ſint quadratis diſtantiarum proportionales, attractiones, quæ directam maſſarum, & reciprocam quadratorum diſtantiarum rationem ſequuntur, æquales ſint neceſſe eſt. Atqui maſſa circuli, cujus radius OR, in punctum O coacta, perinde trahit punctum A, ac ſegmentum ex revolutione arcus MO genitum (art. III.). Ergo etiam maſſa circuli, cujus radius CT, coacta in centrum C.

V. Itaque centro A per omnia diametri BD puncta deſcripti intelligantur totidem arcus, velut OM, inter diametrum BD, & ſemicirculum BMD intercepti; ac ab unoquoque puncto diametri O ducta ſit ad diametrum ipſam perpendicularis OR æqualis ſinui reſpondentis arcus OM. Tum junctis punctis A, & R recta AR, quæ ſecet in T lineam CT e centro C ad diametrum BD perpendicularem, per T ſit diametro ipſi parallela linea TE, occurrens rectæ OR in E. Hac ſane conſtructione prodibit curva quædam linea BFED ſeriem punctorum E præſeferens; cumque ſit linea OE lineæ CT æqualis, patet (art. IV.) ejus curvæ circa axem AD revolutione ſolidum oriri, in quo circularis ſectio ab unaquaque linea OE deſcripta, ſi in

cen-

centrum ſphæræ C cogatur, ad ſe quidem trahit punctum A eadem prorſus vi, ac directione, qua idem punctum A trahitur reipſa a ſegmento ſphæricæ ſuperficiei, quod reſpondentis arcus O M revolutione deſcribitur, modo illa circularis ſectio, & hoc ſegmentum ejuſdem materiæ, & craſſitiei fuerint.

Quamobrem cum tot ſint circulares ſectiones in ſolido revolutione curvæ B F E D genito, quot ſunt ſegmenta ſphæricæ ſuperficiei in ſphæra revolutione ſemicirculi B M D genita, idcirco facile conſtat, ſolidum illud ita quidem eſſe comparatum, ut tota ejus maſſa in centrum ſphæræ C adacta perinde ad ſe trahat punctum A, ac ipſa ſphæra a ſemicirculo B M D orta.

VI. Reſtat ergo, ut demonſtremus, ſolidum illud ſphæræ ipſi æquale eſſe: id quod conficiemus ad hunc modum. Sit B F E D (*Fig.* 3.) curva, quæ ſolidum gignit. Sit B M D ſemicirculus, qui gignit ſphæram, a qua trahi ponimus punctum A in producta diametro B D conſtitutum. Sit C centrum ſemicirculi, a quo diſcedat linea C T ad diametrum B D perpendicularis. Sumatur in hac perpendiculari punctum quodvis T, per quod ducatur recta T E diametro parallela occurrens ſemicirculo in I, & K, curvæ vero in F, & E. A punctis F, & E demittantur perpendiculares ad diametrum lineæ F H, E O; ac centro A, radiis A H, A O deſcribantur arcus circuli H N, O M ſemicirculo B M D occurrentes in N, & M. Denique ducatur ab A ad M recta A M. Tranſibit A M etiam per N. Etenim ductis per N, & M rectis N Q, M R diametro B D parallelis, & occurrentibus lineis F H, E O in Q, & R, erunt quidem H Q, O R æquales ſinibus arcuum H N, O M. Quare e natura curvæ B F E D erit (art.V.) O R : C T : : AO : AC; ſimiliterque C T : H Q : : AC : A H; ex quo O R : H Q : : AO : A H. Ergo ſinus arcuum O M, H N radiis proportionales ſunt. Ergo arcus illi ſimiles, qui cum ſint concentrici, lineis intercipientur eiſdem. Ergo linea A M per N tranſit. Eſt igitur linea N M lineæ H O æqualis; ideoque etiam lineæ F E.

Sit nunc e centro C linea C S perpendicularis ad N M, & ab N linea N L perpendicularis ad B D. Erit A N : N L, ſeu A H : H Q : : AC : C S. E curvæ autem B F E D natura eſt A H : H Q : : AC : C T. Ergo C S, C T æquales; ideoque æquales etiam chordæ N M, I K. Ergo lineæ F E, cui modo oſtendimus æqualem eſſe N M, æqualis eſt etiam I K.

Itaque ea eſt curvæ B F E D proprietas, ut ductis chordis duabus, una F E in curva, altera I K in ſemicirculo, axi B D parallelis,

lis, & in eadem ab eo diſtantia, numquam non ſint illæ inter ſe æquales. Quamobrem revolventibus ſeſe circa communem axem B D tum ſemicirculo B M D, tum curva B F E D, etiam ſingulæ ſuperficies cylindricæ, quas deſcribent chordæ axi parallelæ in curva, æquales erunt ſingulis cylindricis ſuperficiebus æque ab axe diſſitis, quas deſcribent chordæ axi parallelæ in ſemicirculo. Ut propterea congeries quoque utrarumque ſuperficierum æquales eſſe debeant; ideoque etiam ſolida ipſa, quæ illis ſuperficiebus conflantur. Eſt ergo ſolidum revolutione curvæ B F E D genitum æquale ſphæræ genitæ revolutione ſemicirculi B M D.

VII. Cum ergo ſupra (art. V.) oſtenſum ſit, punctum A a maſſa ſolidi curva B F E D geniti, ſi ea in centrum ſphæræ C cogatur, perinde trahi, ac reipſa trahitur a ſphæra ipſa revolutione ſemicirculi B M D genita, cumque ejus ſolidi maſſa æqualis ſit maſſæ ſphæræ, modo ambo ſolida homogenea ponantur, & ejuſdem ſint materiæ, jam illud tandem concludere licet, quod demonſtrandum erat, ſcilicet ſphæram, ſi homogenea quidem tota ſit, punctum extra ipſam poſitum ſic ad ſe trahere, uti illud ad ſe traheret particula quædam minima in ſphæræ centro poſita, eamdem habens maſſam ac ſphæra ipſa.

Neque minus valet hæc ratio in ſphæris homogeneis plenis, quam in cavis, modo ſit ſuperficies intima extimæ concentrica. Quin etiam idem poteſt ad ipſas tandem ſphæricas ſuperficies transferri, in quibus maxime auctores, qui theorema hocce explicarunt, demonſtrationes inire ſuas conſueverunt. Ex eo autem facile intelligitur, non in homogeneis tantum ſphæris valere theorema, ſed ad heterogeneas quoque pertinere, modo, ſi reſolvantur in concentrica ſtrata, ſit horum unumquodque ſibimetipſi homogeneum. Sed de his, atque aliis, ſi qua ſunt, quæ a theoremate jam demonſtrato ſponte quaſi manant, non eſt cur hic diutius moremur: ſunt vero etiam a propoſito noſtro, cui ſatis jam feciſſe videmur, aliena.

GRE-

Fig. 1.

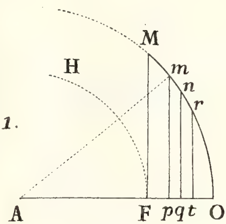


Fig. 2.

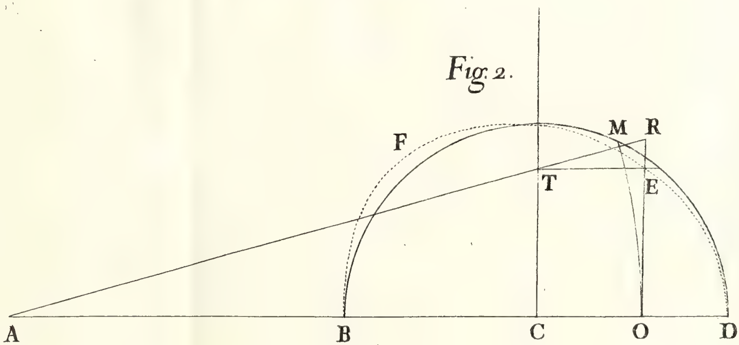
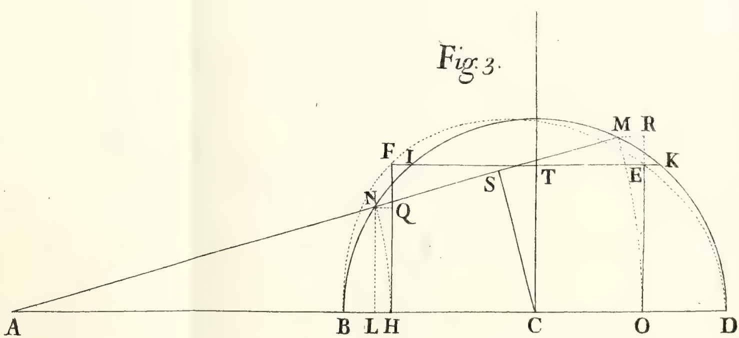


Fig. 3.



GREGORII CASALII.

De Machinula quadam ad projectilium theorias per experimenta probandas.

MAchinula quædam meo judicio ſatis expedita, qua projectilium theoriæ probari poſſint, mihi vix quæſita ſua quaſi ſponte ſe obtulit. Non committam, Sodales, ut non de ea vobiſcum agam. Eamdem poſtea ad pulverem pyrium tranſtuli. Sed de hoc alias. Nunc illam, qualis ſit, explicaturus exordium hinc capiam.

Nemo profecto veſtrum eſt, qui ignoret corpus per quamvis directionem projectum, quoniam & vi projectionis, quæ motum uniformem, & vi gravitatis, quæ uniformiter acceleratum gignit, ſimul obtemperat, parabolam deſcribere. Quod ſic tamen oſtendunt Mechanici, ut nonnulla contemnant, quæ recenſerem, niſi in tali conventu, qualis hic veſter eſt, verba facerem. Quæ illi contemnunt, contemnam ego quoque.

Clariſſimus Graveſandus in ſuis Phyſicæ Elementis, ut idipſum experimento oſtenderet, machinam invenit perelegantem. Duas illas mitto, quas deinde propoſuit ad Motum Fluidorum accedens. Harum prima aliquantum, plus etiam ſecunda, ad corporum projectiones demonſtrandas valerent utique; ſed altera valde eſt compoſita, utraque vero ad experimenta adhibetur in fluidis facienda, in quibus reſiſtentiæ nimium turbant, ut ipſe animadvertit Auctor in paragraphis 1590, 1591, 1606. Qua de cauſſa ego illam tantum conſiderabo, quam ille tantum conſideravit, de projectilibus agens.

Enimvero hujus machinæ ope efficit ille, ut globulus & vi projectionis, & vi gravitatis actus tranſeat per quorundam anulorum centra, quæ ſub unam eandemque parabolam diſponuntur. Abſque his anulis, diverſaque omnino methodo etiam utitur machina: ejus baſi baſim, ut lubet, ſuperimponit alteram, atque alteram deinceps, quarum ea, ſupra quam nulla eſt, projectum globulum tandem excipit: baſium autem longitudines

ſunt

ſunt in ratione ſubduplicata diſtantiarum cujuſcumque ex ipſis baſibus a puncto projectionis, quod ob machinæ conſtructionem verticem parabolæ deſignat. Tantam hæc machina inter Philoſophos celebritatem obtinuit, ut ingenioſiſſimus Deſagulerius eam in ſuo Phyſicæ experimentalis curſu deſcribere non omiſerit. Deſiderandum fortaſſe erat Deſagulerium eam deſcripſiſſe diligentius. Si Pezenaſii verſioni fidendum eſt, ponit Deſagulerius lineam caſus, ſcilicet lineam illam horizonti perpendicularem, per quam cadens corpus datam, qua projiciatur, velocitatem nanciſcitur; ponit, inquam, hanc lineam caſus $= 6$; deinde duplam lineam, ideſt lineam $= 12$, ordinatam ſtatuit, non abſciſſæ $= 6$, ut par erat, ſed abſciſſæ $= 9$. Quis hoc contingere poſſe intelligat? Si e tertia ad primam elementorum Phyſicæ Graveſandi editionem convertamur, in qua ad exprimendas hujus machinæ partes, Auctor numeris copioſius uſus eſt, continuo patebit, non id, quod ex proportionibus Deſagulerii colligitur, ſed ordinatam duplam eſſe abſciſſæ, quotieſcumque abſciſſa lineæ caſus eſt æqualis.

Cæterum Deſagulerium mittens, quem maxime veneror, quemque ſane arbitror inter ſolertiſſimos experimentatores longe excelluiſſe, ego quidem dico machinam Graveſandianam commodum attuliſſe, ut parabolam quamdam, quoddam videlicet projectilis iter, cognoſceremus, non eam vero detexiſſe parabolas omnes, ideoque omnes vias, quas percurrere poteſt projectile. Per eam determinat Graveſandus unam tantum lineam caſus, conſequenterque eandem velocitatis projectionem ſemper admittit. Inſuper non alia utitur directione projectionis, niſi ea, quæ horizonti eſt parallela. Quocirca ſatis utilem futuram eſſe exiſtimaverim machinam, qua corpus jaci poſſit variis & numero infinitis velocitatibus, & ſecundum directiones omnes poſſibiles. Ad hanc igitur machinam animum intendi; quæ, ni fallor, præter quam quod infinitum parabolarum numerum repræſentat, quas projectum corpus ob directiones varias, variaſque velocitates deſcribit; facili etiam negotio & theoremata quamplurima demonſtrat, & problematum pene omnium ſolutionem docet, quæ, nedum a Graveſando ipſo, & Deſagulerio in ſupra citatis Libris proponuntur, verum & a Belidoro in Novo Mathematicarum Scientiarum Curſu ad Belli uſum, & a Joanne Keillio in Introductione ad Veram Phyſicam, &, ut de aliis ſileam, a Sodalibus noſtris celeberrimis

Chri-

Chriſtiano Wolfio, & Petro Muſſchenbroekio, ab horum primo in Mechanica, a ſecundo in Phyſicæ ſpecimine. Machina Graveſandiana, ſi quid judico, tanta univerſalitate non gaudet. Hoc autem ejus perfectioni non officit, eſt enim in ſuo genere perfectiſſima: neque obſtat, quin illa, quam ſum deſcripturus, etſi alteram univerſalitate ſua exſuperet, quamplurimis imperfectionibus ſit obnoxia.

Putabam ego quoque, Sodales ſapientiſſimi, nullam eſſe tutiorem methodum cujuſdam certæ velocitatis excitandæ in corpore, quod projici debeat, quam caſum ita longum, ut poſſit corpus ex gravitatis impulſibus determinatam velocitatis ſummam colligere. In quo ſane Graveſandum, & Deſagulerium ſequor. In illo autem non ſequor, quod cum corpus in eorum machina per datum circuli aut alterius curvæ arcum cadat, unum tantum caſum tentant; mihi placet multos experiri.

Ac ne illud quidem placet, quod projectilis directionem certam habent. Quippe quia in eorum machina corpus per curvam, uti dictum eſt, decidens, per tangentem curvæ tandem effugit, quæ utique tangens horizonti eſt parallela. Sic corpori in projectione horizontali quid accidat experiuntur; in aliis non experiuntur.

Viſum igitur eſt mihi, haud difficile eſſe directiones quaſlibet projectili concedere, auxilio tantum unius ex communioribus Phyſicorum propoſitionibus; hujus nempe: ſi corpus motum in planum incurrat, ex quo elaſticitatis vi regredi debeat, angulus incidentiæ æqualis eſt angulo reflexionis. Theoremate hoc poſito, quod abunde demonſtrarunt mathematici, philoſophis conſentientibus, videntur hæc duo ad quaſcumque projectili parabolas aſſignandas ſufficere, primum ſi fieri poſſit, ut corpus a data quavis altitudine decidat, deinde ſi in planum decidat, quod varie inclinari pro libitu poſſit. Quædam experimenta inſtitui antequam curarem, ut machina diligenter conficeretur. Opus nempe erat antea cognoſcere an tanti eſſent experimenta, ut accuratam machinam mererentur.

Petronius Matteuccius mathematicus clariſſimus, & Thomas Marinus ingenioſiſſimus mechanicus, ſolertiſſimi ambo, opera & conſilio mea experimenta adjuvarunt. Hæc autem experimenta fuere. Parvum planum marmoreum cum horizonte inclinavimus ad angulum $22^\circ + 30'$. Cadens enim corpus ſupra

planum ſic inclinatum, ex ipſo reflectitur efficiens cum linea verticali angulum 45°. Sit (*Fig.* 1.) O R horizon: ſit P I planum marmoreum: ſit A C linea caſus, ſive linea verticalis: ſit C X linea reflexionis. Angulus A C X eſt, quem eſſe 45° oſtendimus. Ex puncto C plani P I extollatur linea C M ad ipſum planum perpendicularis. Dico angulos P C A, & I C X eſſe æquales, quoniam æquales eſſe debent angulus incidentiæ, & angulus reflexionis. Sunt proinde æquales anguli A C M, & M C X, duorum angulorum æqualium complementa: ideoque angulus A C X duplus eſt anguli A C M. Sed ex ſuppoſitione, & ex conſtructione O C A = P C M = 90°. Dempta igitur tum ab angulo O C A, cum ab angulo P C M communi portione P C A, reſidua O C P, & A C M erunt æqualia. Et poſito angulo O C P = 22° + 30′, erit A C M = 22° + 30′, & A C X = 45°. Directio projectionis ſub angulo = 45°, ſicuti jam vidit Tartalea primus, primuſque demonſtravit Galileus, maximam jactuum amplitudinem præbet; quocirca hanc directionem elegimus, ut experimenta veritates, quas ex ipſis quærebamus, clarius patefacerent.

Marmoreo autem plano ſic diſpoſito, equino ſuſpenſus fuit crine eburneus globus ita ut aduſto crine globus caderet ſupra planum. Dein paratum fuit argillæ ſtratum ſatis craſſum. Superior hujus ſuperficies erat horizonti parallela, iſtiuſque ſuperficiei altitudo ſupra horizontem ea ipſa erat circiter, ad quam extollebatur illud plani marmorei punctum, quod globus cadendo impuliſſet. Hoc argillæ ſtratum, foveolis a globo impreſſis, immo diſtantiis inter cujuſque foveolæ centrum, & punctum reflexionis globi, debebat nos docere amplitudines parabolarum, quas reflexus globus deſcripturus fuiſſet.

Omnibus hac ratione paratis, ſivimus globum cadere a pedis unius londinenſis altitudine, deinde a duorum, & trium deinceps, & quatuor, & quinque, & ſex pedum.

Equidem celebris Galilei theorema, quo projectilium ſcientia nititur omnino tota, illud eſt, ut probe ſcitis, in quo monſtrat Auctor, amplitudines parabolarum ſub diverſis angulis deſcriptarum ſequi rationem ſinuum angulorum duplo majorum illis, quos efficit linea directionis projectilis ſive cum horizonte, ſive cum linea verticali. Ex hoc theoremate non modo colligitur maximam amplitudinem haberi poſita projectionis inclinatione ad 45°; ſed colligitur adhuc hanc maximam amplitudinem,

cum

cum ea in horizonte notetur, duplam eſſe *lineæ* caſus. Quomodo hoc breviſſime, elegantiſſimeque demonſtretur, videndum eſt in primo corollario citati operis Joannis Keillii.

In noſtris ergo experimentis videbamur obſervaturi nos eſſe primam amplitudinem æqualem duobus pedibus, ſecundam quatuor, ſicque cæteras ordinate creſcentes juxta ſeriem numerorum parium. Itaque revera accidiſſet, ſi obſtacula, quæ a Phyſicis prætermittuntur, natura ipſa prætermitteret. Album, quod vobis exhibeo, quid futurum eſſet, quidque fuerit, ſatis declarat. In hoc indicant numeri partes decimales pollicis londinenſis. In prima albi columna notantur caſus. In ſecunda amplitudines veræ, quæ ſublatis obſtaculis inventæ eſſent. In tertia amplitudines, quas experimenta ipſa exhibuerunt. In quarta reſiſtentiæ medii; ſive differentiæ inter amplitudines veras, & amplitudines obſervatas, quæ utique differentiæ cum præcipue a medii reſiſtentiis pendeant, pro ipſis reſiſtentiis ſumi poſſunt. In quinta reſiſtentiæ, quæ eſſe deberent, poſita earum prima = 82, ſicuti oſtenderat experientia: has vero reſiſtentias deduximus ex velocitatis quadrato, ut monet Nevtonus in ſcholio quartæ propoſitionis ſecundi libri Principiorum Mathematicorum Philoſophiæ Naturalis: quod equidem commodiſſimum nobis fuit, nam hac de cauſſa reſiſtentiæ ſequuntur rationem caſuum. In ſexta differentiæ inter reſiſtentias obſervatas, & reſiſtentias deductas. In ſeptima ſummæ reſiſtentiarum deductarum, & amplitudinum, quas obſervavimus.

Minime dubitandum eſt, niſi interceſſiſſent obſtacula, numeros tertiæ columnæ futuros fuiſſe duplos numerorum primæ, ut eorum ſunt dupli, qui apparent in ſecunda. Sed medii reſiſtentia maximum eſt obſtaculum, nec eam licet Phyſico in experimentis omittere. Quod ſi reſiſtentias haſce conſiderare velimus, cum tamen ſit earum prima = 82, cæteræ futuræ fuiſſe videntur, non quæ ponuntur in quarta, ſed quæ in columna quinta notantur. Si reſiſtentiam, ut docet columna quarta, experimenta aliquanto majorem nobis repræſentarunt, tribuendum hoc eſt vel cuidam errori, quem forſan inconſiderate experiundo commiſi, vel cuidam anomaliæ inſtrumentorum, quamvis utique ſimpliciſſima hæc eſſent, quibus uti placuit: poſſunt hæc omnia velocitatem projectilis minuere, ut ipſa aeris reſiſtentia. Quod ſi reſiſtentiæ in experimentis obſervatæ æquales eſſent reſiſtentiis calculo deductis, & idcirco numeri quartæ columnæ numeros æquarent quintæ,

numeri ſextæ evaneſcerent omnino, numerique ſeptimæ numeris ſecundæ æquales fierent. Attamen ſi differentia notetur, quæ intra 1440, & 1275 partes decimales intercedit, quæ maxima eſt inter numerum ſecundæ columnæ, & numerum columnæ ſeptimæ illi reſpondentem, clare patet totum effectum, quem præſtitit ſive experimentatoris negligentia, ſive inſtrumentorum defectus, fuiſſe diminutionem pedis unius, & quatuor pollicum cum ſemiſſe in amplitudine, quæ abſque ulla diminutione ſe ſe ad duodecim pedes extendiſſet. Profecto haud video, quomodo clarius experientia alloqui nos poſſit, dum eam interrogantes, eam cogimus nobis reſpondere tot impedimentis obſtrictam.

Videtis jam, Sodales ornatiſſimi, poſtquam periculum feceram de variis caſibus, ac varias in projectile velocitates induxeram, me etiam potuiſſe diverſas concedere projectili directiones, marmoreum planum ad diverſos angulos inclinando. Verum arbitratus ſum ab inclinatione, qua uſi ſumus, quæque maximam affert amplitudinem, ſatis colligi, quidquid eveniret de cæteris, quippe quia & eædem regulæ in omnibus directionibus valent, & eadem obſtacula.

Porro experimenta hucuſque per nos facta videbantur pauca. Attamen ſatis fuerunt mihi, ne vobiſcum omnino ſilerem de excogitata machinula, cujus ope, non modica ſpes mihi erat, ut ipſa experimenta felicius capi poſſent. Quam cum deſcribo, in primis, quæſo, animum diligenter attendite ad ejus exiguitatem, quæ ſane neque admodum altos caſus, neque amplitudines admodum longas haberi permittit. Exiguitas hæc eſt quædam ipſius machinæ elegantia. Hoc vero partim videtur opponi, partim favere ſententiæ Graveſandianæ; quoniam Philoſophus ſummus in deſcribenda illa projectilium machina, de qua ſupra egimus, ſic ait in paragrapho 210 primæ editionis jam citatæ; „ nec minori globo, aut machina, quam quæ hic „ deſcribitur, majori utendum: quo enim corpora ſunt mino„ ra, & motus celeriores, eo etiam magis, ſervata proportio„ ne, motus per aeris reſiſtentiam retardatur.„ Machina hæc autem, Sodales, quam vobis propono, ipſa ſui exiguitate motus velocitatem non admittit niſi modicam. Nam cum caſus per eam breviſſimi ſint, parvæ erunt projectilis velocitates, ideoque reſiſtentiæ adhuc parvæ. Quæ ſi rationem quadratorum velocitatum ſequantur, quem fugiet machinæ exiguitatis utilitas?

Sed ad machinam ipſam deveniamus. Sit (*Fig. ult.*) parallele-

lelepipedum ligneum ſatis robuſtum, ita longum, ut indicare poſſit amplitudinem pedum londinenſium duorum cum ſemiſſe, latum quatuor vel quinque, vel ſex pollices, profundum quantum ſufficiat ad ejus firmitatem. Sit ad alteram longitudinis extremitatem vanum quoddam portionem cylindri ſive marmorei ſive eburnei recipiens. Ut hæc cylindri portio determinetur, & methodus innoteſcat, qua vanum ipſam capiens quibuſdam numeris, ſeu gradibus exornetur, fingamus (*Fig.* 2.) O R planum ſuperius eſſe parallelepipedi, & circulum B E F eſſe maximam ſectionem globi, quo in experimentis utemur. O R tangat circulum B E F in E. Ex C centro circuli ducatur linea C D ſecans O R ad angulos rectos. Sumatur in ipſa C D pro libitu punctum D, & facto radio C D deſcribatur portio circuli P D I, quæ erit baſis portionis cylindri, quam quærimus. Deinde ab ipſo centro C ducatur radius C G, qui cum radio C D efficiat angulum $= 45^{\circ}$. Ad circuli portionem I D P addatur portio P H, quæ ſimul cum portione P G portionem G H comprehendat quadragintaquinque circuli gradibus conſtantem, quos gradus in ipſa G H notari oportet. Pro libitu, ut dictum eſt, ſumere poſſumus punctum D. Attamen præſtandum eſt, ut punctum hocce ſatis diſtet a puncto C, quod ſi non eſſet, chorda P I nimis anguſta nonnihil experimentis officeret; verum ne a puncto C tantum diſtrahatur punctum D, ut parallelepipedi robur multo minus fiat, eo præcipue in loco, quem corpus cadens impellit, dum maxima velocitate, ſcilicet vi maxima eſt præditum. Sed machinulæ imaginem perſequamur, (*Fig ult.*) ſicque hæ animadverſiones ſuamet natura ſe prodent. Eſt igitur in altera parallelepipedi extremitate vanum excavatum, atque octava parte circuli inſtructum in ſuos gradus diviſa, quorum poſtremus ſupra ſuperficiem parallelepipedi ſuperiorem extollitur ad altitudinem ſemidiametri globi, qui in ipſam cadet. Vanum, & cylindri portio congruunt, hæcque ab ipſo continetur. Perpendiculariter a primo alterum parallelepipedum inſurgit, ex cujus vertice parallelepipedum oritur tertium, quod cum ſecundo angulum efficit rectum, primo autem eſt parallelum. Ab hoc parallelepipedo tertio ſuſtinetur ſubtiliſſimi fili, vel crinis ope globus, vel marmoreus, vel eburneus, cujus diameter ſemiſſem pollicis æquat. Secundi parallelepipedi altitudo permittit caſum uſque ad pedem unum, & tres pollices longum. Cochleæ quinque machinæ adduntur. Harum una ſeſe in tertium paral-

rallelepipedum, & filum, & cum filo globum, qua opus ſit, movens, ſic centrum gravitatis ipſius globi dirigit, ut cadat ſupra majorem profunditatem vani in primo parallelepipedo excavati. Cochleæ tres hoc primum parallelepipedum confodiunt, ipſumque ad poſitionem horizontalem aptant. Cochlea vero quinta e media convexitate portionis cylindri ſe prodit, & per rimam tranſiens, quæ in curva ſuperficie vani invenitur, tandem a cochlea fœmina excipitur: ſicque planum ſuperius portionis cylindri in ea cum horizonte inclinatione, quæ libet, detinendum. Tum in primo, cum in ſecundo parallelepipedo diviſiones notantur, ut & caſus determinentur, & amplitudines.

Poſtquam de machina eſt dictum, dicendum eſſet de ejus uſu, niſi de hoc multa colligi poſſent ab experimentis, quæ ſine ipſa, utcumque inſtituimus; ipſa adhibita multo, ut clare patet, commodius. Nempe una hac machina & velocitas corpori tribui quævis poteſt, mutata, ut lubet, caſus altitudine, & directio quævis, marmorea ſcilicet, vel eburnea ſuperficie, unde reflecti corpus debet, per octavam peripheriæ partem converſa. Quæ antequam latius explico, quædam non inutilia conſideranda ſunt.

Certiſſimum eſt (*Fig.* 3.), cylindri portionem PDI, ſeu QKL, cum intra recipiens vanum volvatur, ſe ſe jugiter convertere circa punctum C centrum gravitatis globi, ſemperque ab hoc puncto æqualiter diſtare, ideoque punctum vel marmoreæ, vel eburneæ ſuperficiei, in quod globus per AC cadens incurrit, idem erit perpetuo, & perpetuo globus hoc punctum offendet, quando ejus centrum gravitatis ad eundem ſitum perveniat. Globus igitur reflectitur, cum ipſius centrum gravitatis a ſuperiori ſuperficie primi parallelepipedi diſtat ipſius globi radio. Ab eadem poſtea ſuperficie æqualiter diſtat, cum globus extremum punctum deſcriptæ parabolæ attigit. Sic commodum erit amplitudines parabolarum ex parallelepipedi diviſionibus dimetiri. In experimentis, quæ abſque hac machina capta fuere, centrum gravitatis globi non ſatis diligenter expendebatur. Hac etiam de cauſſa machinæ conſtructionem deſideravimus.

Verum quomodo in hac inclinandum ſit planum mobile, ſive ſuperior portionis cylindri ſuperficies, ad quamdam projectionis directionem obtinendam, dicatur. Hujus problematis ſolutione illud etiam oſtendetur, converſionem plani mobilis per octa-

octavam circumferentiæ partem ſufficere, ut omnes habeantur poſſibiles projectionis directiones, quæ intra verticalem, & horizontalem continentur. Attamen quod dicendum eſt in præſenti ſolutione parum differt ab iis, quæ loquens de plano marmoreo in inſtitutis experimentis adhibito jam dixi. Differt tamen aliquanto; & idcirco videtur non prætermittendum. Tunc de una inclinatione egimus; nunc de omnibus.

Jaciendum ſit igitur (*Fig.* 3.) corpus per directionem quamlibet CX, quæ efficiat cum verticali CA quemdam angulum ACX. Dico convertendum fore planum mobile per tot circumferentiæ gradus, quot comprehenduntur a ſemiſſe anguli ACX, ſeu BCX. Arcus XB anguli BCX quantitatem referens dividatur bifariam in M. Per puncta M, & C ducatur linea MC, quæ protracta ſit uſque ad ſuperficiem convexam portionis cylindri in K. Pariter linea AC protrahatur uſque in D, & linea XC uſque in V. Evidens eſt directionem QL, quæ tangit circulum in puncto T communi lineæ MK, & ipſi MK eſt perpendicularis, directionem eſſe plani reflectentis. Hoc poſito denominetur numerus graduum $BX = VD = n$. Erit $BM = KD = \frac{n}{2}$. Per ſuppoſitionem vero, atque per conſtructionem jam habemus $DP = KQ$; & $DG = KE = 45^\circ$. Igitur ſubtrahendo ab utraque parte eandem quantitatem, dicendum erit $DG - KG = KE - KG$; ideſt $DK = GE$; ſeu $GE = \frac{n}{2}$. En ergo demonſtratum & planum converſum eſſe per graduum numerum duplo minorem numero graduum anguli ACX, & converſionem per gradus 45 ſufficere plano, ut ex eo reflectatur corpus per directiones quaslibet, quæ a verticali uſque ad horizontalem dari poſſunt. Enimvero ſumatur ipſa horizontalis directio, quæ inter omnes majorem cum verticali conſtituit angulum. Tunc angulus $ACX = 90^\circ$; cujus ſemiſſis $= 45^\circ$: ſcilicet octavam partem circumferentiæ æquat.

Hæc eſt, Sodales optimi, machinula, quæ, quamvis ſimpliciſſima, attamen infinito ſive velocitatum ſive directionum numero, numerum parabolarum infinitum ſub oculos ponit. Immo parabolas etiam alias proderet numero, ſi volumus, infinitas. Superior (*Fig. ult.*) parallelepipedi, ex quo amplitudines cognoſcimus, ſuperficies nunc horizonti parallela, ad horizontem inclinari poſſet quocumque angulo etiam obtuſo.

Quo-

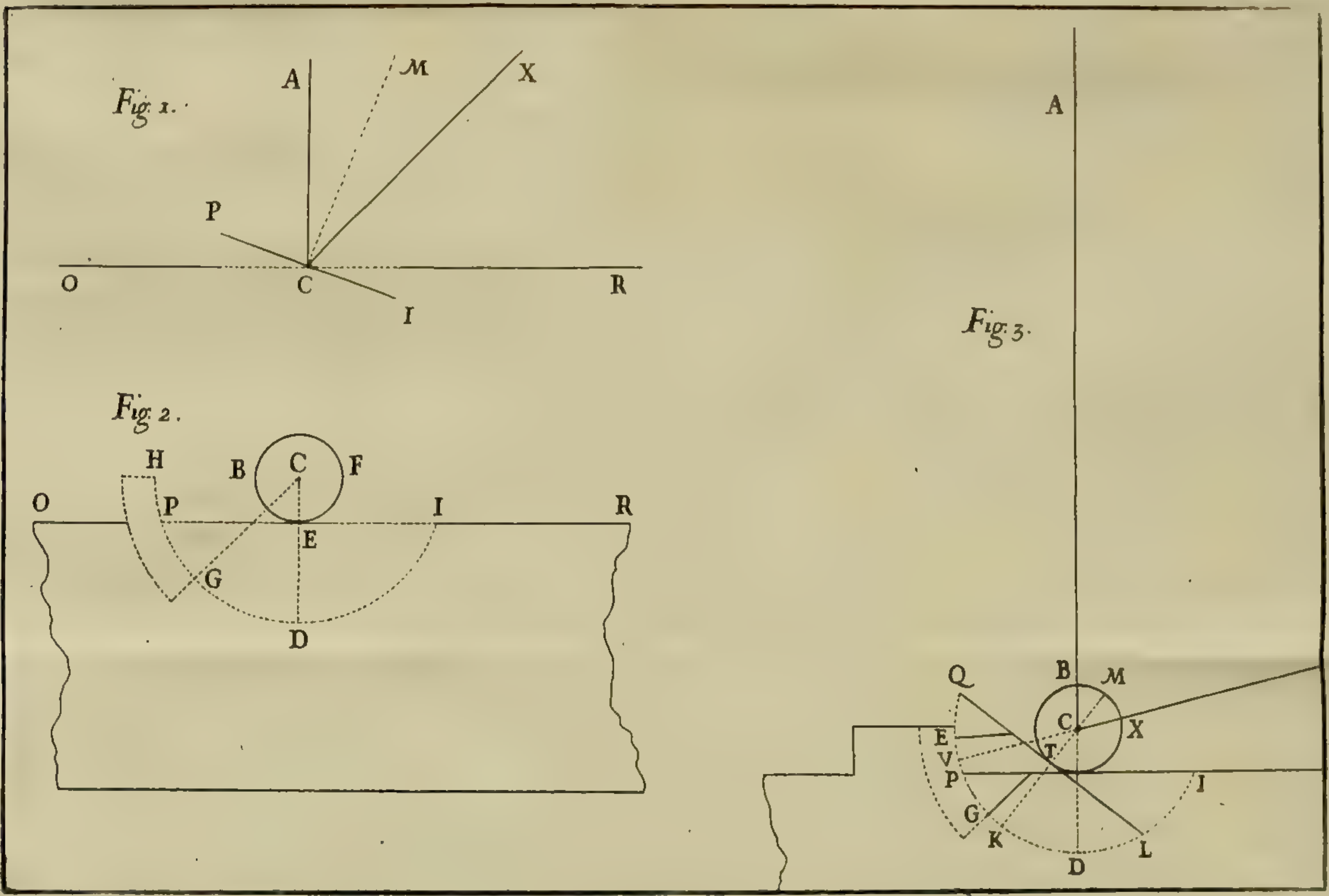
Quocirca (*Fig.* 3.) datum eſſet quæri directionem quamdam CX, quæ efficeret cum verticali angulum ACX > 90°, quo in caſu ſemper valebit $GE = \frac{n}{2}$.

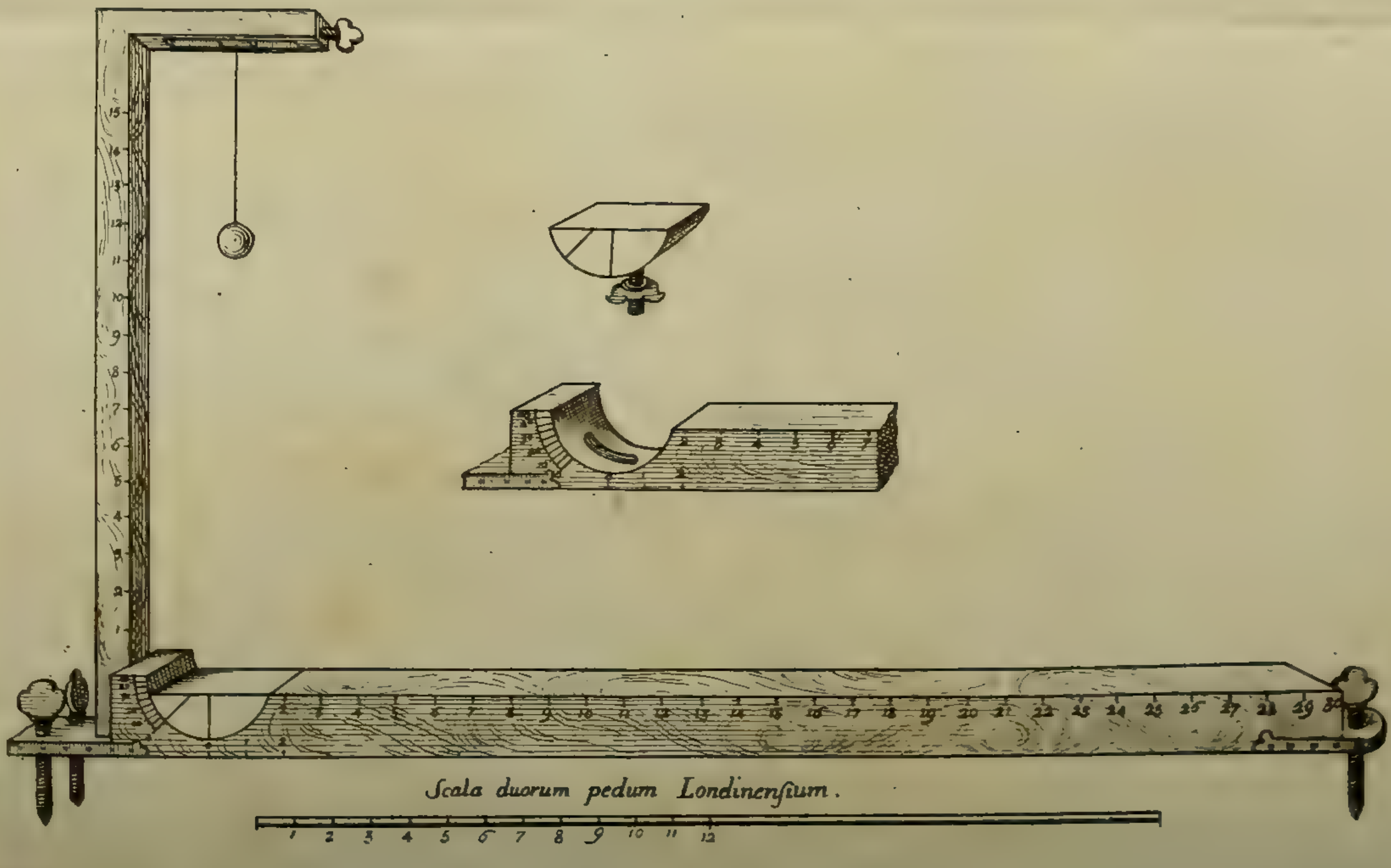
Animadvertite, quæſo, Sodales doctiſſimi, an verum ſit, ut ipſe arbitror, machinulam hanc, non modo oſtendere parabolicam ſemper eſſe viam, quam tenet projectile; ſed ipſam adhuc valere, directione projectionis jugiter verſa, ad oſtendendum maximum Galilei theorema, de quo ſupra mentionem fecimus, ideſt, amplitudines parabolarum ſub diverſis angulis deſcriptarum ſequi rationem ſinuum angulorum duplo majorum illis, quos efficit linea directionis ſive cum horizonte, ſive cum linea verticali; eamdemque ad demonſtrandum pariter valere, ſi caſuum linea mutetur, theorema utiliſſimum, quod exponit Graveſandus in paragrapho 550 Elementorum Phyſicæ, videlicet, amplitudines, manente eadem directione, eſſe ut altitudines, ex quibus corpora cadendo velocitates, quibus projiciuntur, acquirere poſſunt: quod idem eſt ac dicere, amplitudines eſſe ut quadrata celeritatum. Verum non omnia deſcribam, quæ hujus machinulæ ope vel confirmantur, vel inveniuntur. Theoremata hæc duo, alterum Galilei, alterum Graveſandi, commemoravi, quoniam horum demonſtratio nil aliud petit, niſi ut Phyſici oculus ad parallelepipedum amplitudinum convertatur. Quo quid facilius?

Hactenus machinulam novam experimentis commendare ſtudui. Veſtrum erit illam benigne excipere, atque emendare, ſi opus erit.

CAJE-

	1	2	3	4	5	6	7
Experimenta.	Caſus.	Amplitudines veræ.	Amplitudines in experimentis obſervatæ.	Reſiſtentiæ in experimentis obſervatæ.	Reſiſtentiæ quæ eſſent poſita prima 82.	Differentiæ inter reſiſtentias obſervatas, & reſiſtentias deductas.	Summæ reſiſtentiarum deductarum, & amplitudinum, quæ obſervatæ fuere.
I	120	240	158	82			
II	240	480	135	165	164	1	479
III	360	720	428	292	246	46	674
IV	480	960	558	402	328	74	886
V	600	1200	670	530	410	120	1080
VI	720	1440	783	657	492	165	1275





Scala duorum pedum Londinenſium.

CAJETANI TACCONII.

De Rachitide.

QUum in Cadaverum Sectionibus, obſervationes, meditationeſque noſtræ, multæ, ac frequentes, quæ in danda opera Medicæ, Chirurgicæque Arti occurrunt, nil aliud agere videantur, quam ut eliciant, atque aliquid exprimant, quod aut verum ſit, aut ad illud proxime accedat; arrepta occaſione tum ab illis rebus in cujuſdam Mulieris Cadavere viſis, & obſervatis, tum ab aliis, quæ anteactis temporibus vidimus in oſſibus Puerorum, qui Cyri, Cyphori, Lordi, Scholioſi appellantur, febri poſtea lenta, Maraſmo, ſimilibuſque morbis interemptorum, tum a ſententiis pene inter ſe diſſentientibus celeberrimorum Medicorum Mayowii, ſcilicet, Avers, Boerhawii, Heiſteri, Dolæi ac ceterorum, qui de rachitide verba fecerunt, arrepta, inquam, occaſione ab hiſce cauſſis, aliquid etiam nos de eadem adnotare voluimus, quod ſi parum emolumenti rachitico morbo attactis erit; Medicis vero, Anatomicis, Chirurgicæque arti addictis incitamento fortaſſe eſſe poterunt ad meliora, & utiliora (ut optamus) proferenda, & in medium producenda: ac ut ſtatim ad rem veniamus, ſeriem, cauſſarumque ordinem in viſis, & dictæ mulieris cadavere obſervatis primo tenebimus, deinde ad cætera explicanda deſcendemus.

Fœmina ergo quædam habitus corporis gracilis, temperamenti ad pituitoſum accedentis, circa tertium ſuæ ætatis annum tam in anteriori, quam in poſteriori thoracis parte incurveſcere cæpit. Forma curvaturæ ſterni, & dorſi, thoracem latum, brevemque, ac totam ſtaturam puſillam reddidit, humerorum, & brachiorum oſſa, ſpinæ, & coſtarum ſenſim inflecti cœperunt, & circa ſeptimum annum, omnibus ſignis veræ rachitidis, debilitate, videlicet, ignavia, mollitie, torpore in partibus infra caput, ad recte progrediendum diffi-

cultate, infimi ventris craſſitie, ceteriſque apparentibus, uſque ad ſecundum ſupra quadrageſimum annum vitam angoribus, & moleſtiis plenam traduxit, ſeptimoque Idus Decembris Anni 1754 mortua eſt.

Cadaver ſecuimus, & quum ejus infimum ventrem tactu durum, ſummeque craſſum antea cognoverimus, morbique cauſſam ibi quoque magis quam in aliis ſui corporis partibus ſuas vires exercuiſſe putaverimus, ad idem explorandum, obſervandumque animum, manuſque convertimus, & adaperto abdomine admirati ſumus molem quamdam ad album colorem accedentem, ſuperficie nonnihil ſcabra donatam, quæ ferme totam hanc cavitatem replebat, occupabatque. Hæc ab omento non operiebatur, & aliquam ſolummodo inteſtinorum tenuium partem circa pelvim utrimque in conſpectum venire conſpeximus.

Corpus hocce, quod nomine magni tumoris tunc appellare placuit, majori ex parte formam abdominis conſequebatur, ſupernaque ſui parte thoracem ingrediebatur, & intra concavam poſteriorem, gibbamque ejus ſedem jampridem forte paratam, intrudebatur, exacteque eamdem replebat.

Diaphragmatis pars anterior, quæ altior, poſterior autem longe declivior eſſe debet, modo circa coſtas ſpurias, & lumborum vertebras laxior extiterat, & quamquam vis tumoris ſurſum prementis contra ejus aponevroſim, quæ centrum dicti diaphragmatis conficit, (ut tunc cenſuimus) exerceri videbatur, tamen tumor producebatur ubi minorem invenerat reſiſtentiam, nempe in dictam concavam ſpinæ, & coſtarum partem, & figuram non declivem, ſed fere verticalem diaphragmati inurebat.

Non minoris forte momenti tunc putanda fuit vis tumoris prementis ſupra, & contra viſcera omnia imi ventris, dum patuit, inteſtina, ventriculum, lienem, illi locum dare debuiſſe, & in thoracis cavitatem ſe ſe recipere, & quod rarum viſum fuit, hepar in eodem thorace uſque ad claviculas protendi.

Hic tumor a tenui ſubtiliſſima membrana, a regione lumborum prope vertebras ejuſdem nominis profecta, veſtiebatur, quæ in vicinia renis ſiniſtri craſſior, molliorque evadebat, varicoſis vaſis valde referta. Prima facie hic tumor naturæ ſcirrhoſæ videbatur, & ratione nonnullorum ſulcorum, ſive mavis quatuor inæqualitatum externe quoque apparentium tactu

inæ-

inæqualium (nam aliæ duræ, ac renitentes, aliæ ferme molles manu contrectabantur) tumor ex quatuor tumoribus coagmentatus dici poterat.

Ut de natura tumoris, qui primus in conſpectum venerat, & vertebris lumborum (ubi exoriri videbatur) majori ex parte innitebatur, & poſtea de cæteris edoceremur, fere in media ejus parte, quæ magis prominebat, & antea umbilicum reſpiciebat, cultro illum aperire tentavimus, ſed incaſſum, nam quacumque vi adhibita, illum ſecare, aut dividere haud quaquam potuimus, quapropter nobis abunde innotuit, ipſum hic loci naturam oſſeam nactum fuiſſe: hinc ſerra adhibita, in crucis formam hunc ſecavimus, & rotundam veluti offendimus cavitatem, cavitati capitis humani ferme ſimilem, quæ ſicuti illa a cranio, ita hæc ab oſſea indicatá ſubſtantia veſtiebatur. Hæc oſſea pars in ſui ſuperficie, craſſitiem unius digiti tranſverſi æquabat, dum vero verſus baſim protendebatur, ſenſim, ſenſimque craſſior evadebat, ut mox dicemus.

Cavitas iſtius tumoris materia liquida, viſcoſa, fermeque oleaginea, coloris ſaturi, quantitate unius libræ cum dimidia repleta erat: in fundo autem ideſt ſupra ejus baſim ſimiliter oſſeam reperiebantur quædam protuberantiæ, ſive tumores ad naturam ſcirrhoſam accedentes, quorum longitudo, & altitudo erat duarum circiter unciarum, itemque operiebantur ſicuti & tota dictæ oſſeæ ſubſtantiæ interna ſuperficies a tenui membrana, quæ habito inquam reſpectu ad ſubſtantiam oſſeam, internum perioſtium dici poterat.

Baſis igitur oſſea, craſſitiem unius digiti cum dimidio æquabat; ſemidiameter autem inferior iſtius tumoris, ſive dictæ oſſeæ cavitatis, craſſitiem ſemidigiti. Natura iſtius oſſificationis erat ſpongioſa, & ſurſum verſus diaphragma longitudinem decem unciarum cum dimidia producebatur, & ſumpto principio a baſi dicti tumoris totum ejus ſemidiametrum occupabat, & aſcendendo in alio magno tumore, formam retuſæ pyramidis æmulando, immergebatur, quapropter ſi ejus longitudo erat, ut dictum eſt, unciarum decem cum dimidia, circa ejus baſim, oſſea ſubſtantia verticalis erat ſeptem unciarum cum dimidia; dum vero ſurſum producebatur ſenſim ſubtilior factus in naturam ſcirrhoſam deſinebat; attentaque ejus origine, tumorem meſenterii dici quoque poſſe credidimus,

Hic tumor parte ſui inferiore cum tumore altero in hypocondrio dextero locato conjungebatur. Hic autem externa facie ſimilis alteri credebatur, ſcirrhoſus enim erat, & ſaccatus, uti ajunt, tum humoris libras duas, & unciam ſemis intus ſervabat: ventriculi, hepatiſque ſedem occupabat; corticiſque iſtius craſſities duorum digitorum tranſverſorum erat.

Tertius tumor naturæ ſcirrhoſæ, altero in mole minor erat; reni ſiniſtro autem ita uniebatur, ut ren ipſe, tamquam gemma in annulo, in eodem reconderetur. Hic ren, altero minor duplo erat, ac ex ejus forti cum tumore adhæſione, complicationeque, dum omnem tumoris molem ex abdomine extrahere voluimus, etiam ille cum aliqua ureteris, & vaſorum uteri præparantium parte, quamvis invito, eductus fuit.

Ultimus, ſcilicet quartus tumor, in thorace pene totus conſiſtebat, & ſuperiorem magni tumoris partem efficiebat; hic tumor valde latus, & craſſus ad rotundam figuram, præſertim in extrema ſuperiori ſui parte, accedebat, naturamque ſcirrhoſam imitabatur, ac, ut dictum eſt, intra poſteriorem thoracis gibbam ſedem ſe intrudebat. Ab oſſeo tumore exordium habebat, ibique ſquamulas nonnullas oſſeas variæ figuræ, in ſui ſuperficie poſitas, gerebat, quæ dum in dicto thorace tumor producebatur, obliterabantur.

Omnis tumor neceſſario vim maximam exercebat ſupra inteſtina, quæ ſurſum verſus diaphragma contracta, valdeque preſſa obſervabantur. Inteſtinum autem colon a dicto pondere ſumme complanatum, coſtis ſpuriis hinc inde, vertebriſque lumborum innitebatur, inteſtinumque ſimiliter rectum in propria ſede compreſſum erat. Veſtigia denique nonnulla omenti ſi a ventriculi fundo non deprompſiſſemus, forte in ejus exiſtentia deliberanda judicium dubium manſiſſet.

A carie vertebrarum, & coſtarum, atque a cæteris pravis rachitidis affectibus recenſendis ac in iſtius Fœminæ Cadavere viſis, obſervatiſque modo abſtinemus, dumtaxat adnotantes quod diameter totius tumoris ex quatuor deſcriptis conflatum erat unciarum triginta quatuor, ejus altitudo unciarum viginti quatuor; & qui dextrorſum reperiebatur, quemque inferiorem abdominis partem occupare diximus, erat unciarum ſexdecim cum dimidia; longitudo autem oſſei tumoris unciarum decem cum dimidia. Lance ponderatus totus, triginta duas libras pendebat; attentaque ſede, e qua diſcedebat, tumorem, inquam, meſenterii dici poſſe arbitrati ſumus.

Hæc autem ſingula exactiſſime circumſpeximus cum aliis in re medica, & anatomica verſatis, unaque cum docto Viro Bartholomæo Riverio, (cujus ſolertiam, induſtriam, atque peritiam ſatis ſuperque, ut par eſt, verbis commendare non valemus) denique anatomicorum more, rogavimus D. Carolum Piſari in arte delineandi, ac pingendi bene verſatum, ut deſcriptum hunc tumorem ad rem, veritatemque figura & lineamentis ſuis traduceret, quumque humaniſſime (ut ſolet) nobis tunc obſequutus fuerit, dicti tumoris graphydem oculis omnium exhibemus.

Hiſtoria ergo morbi, ſectioneque Cadaveris luſtrata, atque completa, ad internam rachitidis cauſſam perquirendam acceſſimus, & pleroſque conſultavimus Doctores Medicos, qui de hoc morbo ſcripſerunt: noſtras obſervationes, meditationeſque, hac ſuper re, cum illis contulimus; tandem cum Clariſſimo Boerhawio rationabilius nobis viſum fuit, eamdem repeti poſſe a prava dyatheſi in ſanguine, humoribuſque ſen-
= ſim introducta, nempe e Cacochimia inerti, mucoſa, fri-
= gida, vappida, a latente forte labe venerea permiſta cum
= laxa partium firmarum fabrica, quæ peculiari ratione oſſa
= proximius ad male afficienda determinat. = Placuit quoque nobis una cum illo prælaudato Viro aſſerere, chilum ſatis elaboratum, & materiam ſolidis partibus compingendis deſtinatam, utpote Acceſſentem mutari debere in Alchaleſcentem, quatenus hæc apprehendit veluti elementa terreſtria, & compagem illam format, quæ aqua ſolvi nequit, & ad humores coercendos apta redditur. Hanc doctrinam ab eodem confirmatam fuiſſe novimus, dum ait, ſe a Ruiſchio accepiſſe; oſſa in alchalicis liquoribus ad tempus detenta, ſolida, duraque manere, in accidis vero molleſcere, & flexibilitatem contrahere, quia vis hæc mutandi acceſſentiam in alchaleſcentiam tunc defficit, & ſic oſſa, cartilagines, ligamenta laxa, & debilia, ut in rachiticis, fieri neceſſe ſit.

Hac igitur admiſſa ſententia, animadvertimus primo oſſa conſideranda eſſe, dum mollia, ac tenerrima ſunt, ut in recenter natis, dein quum ad aliquem ſoliditatis gradum accedunt, ut in pueris, ac demum dum ad hunc omnino pervenere, ut in adultis, ac ſenibus. Secundo adnotavimus, ſuccum nutritium, qui in progreſſa hominum ætate ad eorum oſſa nutrienda deſtinatur, minime canaliculos (ut plerique putant)

a fi-

a fibrillis oſſeis efformatos, oſſa perenni curſu ingredi, ac veluti circulo quodam per eoſdem fluere: tertio demum ultro confeſſi ſumus, nos quoddam glanduloſum corpus nuſquam inveniſſe (ut aliqui aſſerunt) quod ad oſſa puerorum, & adultorum hominum nutrienda apprime faciat.

Hiſce in gratiam nutritionis oſſium generatim deſcriptis, ne quis credat, nos in Rachiticis præſertim hoc nutritionis opus nimis fidentius, vel glandulis, vel arteriis, vel ſolis membranis tribuere velle (quamvis frequentius id in Fraxino, Caſtaneis, Moris, & quibuſdam aliis adultis arboribus accidere obſervemus) nam primis ætatis temporibus, aliquam forte partem nutritiam per canaliculos a fibrillis oſſeis efformatos, ac per poroſitates in iiſdem oſſibus inſculptas, oſſa forte ingredi arbitramur, nam ſi ſerra dentata ſecentur, hic illic apparent puncta rubra a ſanguine venientia: non modica unctuoſa materia viſitur: tenerrima reſpective ſunt; tenuiſſimi arteriolarum, venarumque rami perſpicui, & manifeſti apparent, ac tandem ſcimus, oſſa rubedine tingi mutuata a radice arida rubiæ in pullis, gallis, ſuibuſque, ut Samuel Sharpius Britannus, noſterque præclara, & abundanti doctrina, atque optimarum artium ſtudiis eruditus, & excultus Præceptor noſter Matthæus Bazzani, D. Behmer anno 1752, & anno 1757, D. Albertus de Haller, ſtudio, diligentia, & ope, D. Detlef anatomici proſectoris ſui, aliique forte demonſtrarunt; hæc, inquam, non ignoramus, ſicque & glandulis, & vaſis arterioſis, nerveiſque, multoque magis perioſtio negotium hocce primis præſertim ætatis temporibus tribuimus; at ſequentibus, in quibus & ob idoneam particularum elementarium formam, & ob aeris vim exterius prementem, arctiſſimeque particulas oſſium vincientem, forteque etiam ob alias cauſſas colligantem, oſſa duriſſima fiunt, nutrimentum peculiare, & peculiari modo oſſa idem recipere contendimus.

Porro quum nec ſenſuum fides ſine ratione, neque rationes ſine ſenſibus ferme ſint perquirendæ, ad id aſſerendum nos movent puncta illa ſanguinea ſupra indigitata, quæ in dies magna ex parte evaneſcunt; multa oſſium humiditas, & unctuoſitas, quæ ramificationibus una cum pleriſque arteriolarum e conſpectu auferuntur: laminæ oſſeæ, e quibus majori ex parte coagmentantur, quæ ad ſe ſe invicem approximant, & duriſſima oſſa efficiunt. Hæc præſertim ea ſunt, quæ

nu-

nutritionis & conſervationis, inquam, opus in oſſibus peculiari ratione perfici oſtendunt, dum ſcilicet ad perfectum ſoliditatis terminum perveniunt; & quamvis poruli, canaliculi, ramificationes aliquæ arteriolarum remaneant, quæ ſanguinem ad oſſa vehant (ut ex ſulcis, fiſtuliſque etiam in oſſibus rachiticorum inſculptis fit notum) tamen quum id ad alios uſus factum ſit, ut a nobis fuſius diſputatum eſt annis proxime elapſis, dum de oſſium fractorum unione, & coaleſcentia verba fecimus, modo ea repetere non vacat, nam Galenus quoque lib. 5. methodi ſcriptum reliquit, fracta oſſa non per unionem, ſed per Callum, quem Greci *Poron* appellant, ceu gluten cohærere, atque conjungi; lapidemque cum lapide, teſtam cum teſta numquam coire.

Quum vero hæc agerentur, & meditationes, obſervationeſque noſtræ omnes circum Rachiticorum oſſa, & eorum morbos eſſent converſæ, ad aures noſtras rumor quidam pervenit, pleroſque nempe in re medica, & anatomica exercitatos, ſed fortaſſe ab nimis antiquorum Medicorum ſententia præoccupatos, noſtræ ſententiæ minime aſſentiri, ideoque, ut ad veritatem aliquam, hac in re, cognoſcendam traducerentur, ab incepto Rachitidis ſermone aliquantulum diſcedere debuimus: & manus adiutrices ſtatim porrexit ſectio Cadaveris cujuſdam hominis, (cui ſectioni dicti homines increduli convenerunt) annorum quinquaginta, qui febre maligna in noſtro Sanctæ Mariæ de Morte Noſocomio vita deceſſit: Vir iſte quatuor tranſactis menſibus, fracturam paſſus fuerat in oſſibus tibiæ dexteræ: diffractio oſſium, quatuor digitis tranſverſis ſupra talum ſita, effecerat, ut pars inferior tibiæ diffractæ verſus finem muſculorum gaſterochnemiorum non recta, ſed quaſi triangulari linea, duobus digitis tranſverſis ſurſum elongaretur; pars autem reliqui ſuperioris oſſis exterius integumenta communia nonnihil elevaret: neceſſariis interea adhibitis præſidiis, quinquaginta octo tranſactis diebus bene ſe habebat homo, ſubalarium fulcrorum auxilio primis ſequentibus diebus, dein ſine illis, libere incedebat. Tranſacto poſtea uno menſe, & octo diebus a dicta febre correptus fuit, & vigeſima prima die mortuus eſt.

Secuimus Cadaver, & detractis integumentis, muſculiſque oſſa antea fracta obtegentibus, ſtatim offendimus corpus naturæ oſſeæ nonnihil ſpongioſæ, quod ſupponebatur cuidam an-

anteriori vacuitati tempore, quo os tibiæ fractum fuerat, relictæ, quam repleverat, partemque oſſis iſtius ſuperiorem cum inferiori colligabat: oſſea hæc appoſita ſubſtantia extendebatur quoque in parte poſtica, ſurſumque producebatur uſque ad finem cujuſdam productæ inæqualis rimulæ. In abradendo, medio cultro, maxima cum diligentia hoc oſſeo adnato corpore, clare patuit, iſtud efformari a fibris revera oſſeis non valde duris, quæ circellum inæqualis figuræ per omnem diffractionis locum ſe extendentem, omneſque ſcilicet oſſis diffiſſi partes operientem, qui tibiam ſatis ad incedendum aptam, firmamque reddebat.

At quum viderimus partem oſſis diffracti ſuperiorem nonnihil in dextera ſui parte fulciri a relicta inferiori oſſis parte, tunc animo inviſendi num hoc in loco fœdus (ut ita dicamus) cum illo iniiſſet, idque præſertim ob illos Viros, qui de hac re ſuaderi debebant, hanc quoque oſſis partem luſtravimus, abundeque innotuit nedum hanc ſtricte adglutinatam alteri ſuperiori oſſis parti, ſed diffractam, ita ut nulla vi adhibita, nudis quoque oculis patuit, capita horum oſſium diviſa eſſe: quapropter nemini locus fuit aſſerendi per canaliculos, aut poroſitates a fibrillis oſſeis efformatas, ſubſtantiam oſſificam ad oſſium fractorum unionem in adultis hominibus inducendam comparatam eſſe. Tophus autem, de quo eſt ſermo, tempore dicti morbi ad eam duritiem forte, ad quam perveniſſet, ſi æger alio veniente tempore vixiſſet, non pervenerat, & relictæ vacuitates, ac foraminula obſervata repleviſſet, magiſque compactam, duramque naturam oſſis (ut in aliis animalium, & hominum oſſibus, quæ apud nos aſſervantur) aquiſiviſſet.

Tanti interea fuit hæc obſervatio, ut illi, qui ſuccum oſſificum, ut dictum eſt, ingredi canaliculos, & poroſitates oſſium, (ut etiam ſemper in quibuſdam inſitionibus arborum ſequi) putabant, ſententiam ſuam mutarint, noſque perioſtium tamquam ſubjectum oſſificæ conglutinationis in oſſium fracturis, & præſertim hominum adultorum forte adſtruxiſſe intelleximus. Noveramus enim cur hortorum cultores *Inoculatione*, ſive, ut ajunt, *Emplaſtatione*, inſitionis loco interdum utantur, nam tunc ſcalpro nudato nonnihil arboris cortice, inter diducta vulneris labia, corticem alium gemma inſtructum reponunt, efficiuntque ut conveniant & mutua veluti

læti coeundi cupiditate facilique corticum amplexu coaleſcant; noveramus item in aliis inſitionibus, ramum aliqua gemma inſtructum, & arbori alicui inſertum, magis a cortice nutritionem, augmentumque recipere, quam ab humoribus a dicta arbore mutuatis; nam ſi locus inſitionis tandem non operiatur a dicto cortice, ramus inſertus reſiccatur; ſimiliter in amputationibus artuum humanorum, ut vulnus inflictum ſanitati perfectæ reſtituatur, ab integumentis (ut omnibus ſatis conſtat) operiri debet.

Sed ad Rachitidem redeamus, ac ut quid in illis hoc morbo laborantibus obſervavimus exponamus: vidimus enim primo, oſſa fere ſemper incurvari, ubi majores arteriæ in illis implantantur: ſecundo diametrum illarum latiorem in oſſium ingreſſu, illamque ſtatim conſtringi, & ad meditulium parteſque internas, medullamque, præſertim in oſſibus majoribus, transferri: tertio cellulas, & foramina ea ſcilicet in parte, quæ ſenſim, ſenſimque fit concava, & circum dictas arterias ſparſa, eorumque viciniam ſuperficiem ſanguine, in pueris præſertim, conſpurcatam: quarto haſce cellulas perioſtio carere: iſtudque ubi manifeſtari incipit ulcuſculis affectum: quinto demum, partem oſſis convexam nihil dempta convexitate, a naturali oſſium compage diverſam apparere.

Attentis poſtea hiſce obſervationibus, facile manuducti fuimus ad explicanda ſymptomata, quæ in rachiticis manifeſtari ſolent; animadvertimus enim ſanguinem mucoſis, inquam, inertibus, frigidis, vapidiſque partibus inquinatum tantum valere, ut ex ejus tardo motu, quem acquirit in oſſium tenerrimorum ingreſſu, ibi exundare poſſe, & parietes illarum arteriarum male afficere; circulo in vicinis perioſtii arteriolis impedimento alicui eſſe, & ex mora cellulas, cariem, & dicta parva foraminula producere.

Nec aliter, ut credimus, res ſe habere poteſt, ſi attendatur natura oſſium in pueris, perioſtii, ac tendinoſorum ſtaminum temperies, moduſque quo partes iſtæ oſſibus adglutinantur: notum enim eſt primis ætatis temporibus, oſſa ad glutinis liquati naturam accedere: perioſtium vero rei lentæ, & viſcoſæ non adeo firmiter adhærere: creſcente autem ætate, quum gluten illud induretur, & oſſium moleculæ ad ſe ſe magis accedant, perioſtium quoque magis iiſdem oſſibus ſimul uniri; nonnullos muſculorum tendines oſſibus immediate inſeri, ac perioſtium recta perforare; iſtudque ſupra oſſa

expandi, ut magis expandi non poſſit, idque magis ubi firmior, & planior eſt eorumdem oſſium ſuperficies; ac demum pleraque muſculorum filamenta in una oſſis parte continvata conſpici, in altera eorundem oſſium porulos, more fibrillarum perioſtii, ingredi: quum, inquam, ut anatomes docet, hæc medicis, anatomiciſque ſint nota, colligitur a labe inflicta oſſibus ubi arteriæ majores ea ingrediuntur, ibi oſſa debilitari debere, nam ceteræ vires muſculorum, tendinum, perioſtii impares redduntur ad impediendam oſſium flexionem, craſſitiem in articulis genuum, & carporum, alioſque morbos, qui in rachitide manifeſtantur, morbumque hunc abunde ſuas vires exercuiſſe oſtendunt.

De indicatis poſtea cellulis, quæ pro occulta carie accipi poſſunt, deque nonnullis aliis morbis cum Rachitide conjunctis, & ab indicata cauſſa venientibus verba quoque fecerunt Medici plerique celebres, atque inter hoſce Theophilus Bonetus Anat. Pract. lib. 2. ſec. 12. ubi de Gibboſitate, obſervatione 2. dum ait, ſe vidiſſe in Cadavere cujuſdem Adoleſcentis a pueris gibbi, qui mortuus fuit ſuæ ætatis anno 16. ſeptimam, octavam, & nonam vertebram dorſi carie exeſas: item Jo: Zacharia Platnerius (ut in Actis Eruditorum menſe Decembri Anni 1751. pag. 571. num. 209.) dicit, Pueros, Adultoſque gibberoſos obſervaſſe, in quibus vertebrarum corpora corrupta erant, & carie exeſa; quin immo pag. 576. de Infante quinque annorum loquens, veram gibboſitatem ſe vidiſſe ait, in qua plurima vertebrarum corpora carie exeſa erant: Hieronymus Mercurialis: Marcus Aurelius Severinus, aliique docent, innaſci tubercula non pulmonibus aliiſque in locis, ſed vertebrarum ligamentis, quorum cauſſa gibboſitates quoque fiant.

Neque incommodis iſtis perferendis obſtant majores arteriæ, in quibus ſanguinis curſus ad oſſa non intercipitur, nam reliqui arteriolarum rami illis vicini, nedum tenuiſſimum albidum rorem ad oſſa nutrienda (ut imaginati ſunt aliqui Medici) aſſervant, & exaratis pravis affectibus, ſubjiciuntur: & ſi aliqua oſſium accretio fiat (gracilia enim ſemper inveniuntur) hæc forte repeti poterit tum a particulis oſſeis ante morbum in oſſibus exiſtentibus, quæ explicantur, tum a deſcriptis Tendonibus, partibuſque oſſibus adglutinatis, quæ, quum majori earum parte ſanæ ſint, & mole ſua creſcant,

iſtæ

iſtæ conferre aliqua ratione poſſunt acretioni alicui, diſtenſioni, elongationique iſtorum oſſium.

At quum præſertim circa majorum oſſium capita, & medietatem foramina a primordiis in illis inſculpta, nerveas ramificationes, arterias, perioſtiumque admittant, quæ ad meditulium, medullamque feruntur, itemque per eadem foramina (ut præſertim in mandibulæ inferioris interna facie, ubi foramina ſunt majora, obſervari poteſt) venæ ſociæ foras exeant, quum, inquam, res ita ſit, attentis quoque arteriarum illarum diametro, & natura ſanguinis per eas percurrentis, facile intelligitur venoſi quoque ſanguinis regreſſum debilitari, & ejus exundationi, morbiſque indicatis apprime favere.

Pravi item effectus, qui Rachitidem comitantur, id ipſum confirmare videntur; nam in iſtius morbi initio debilis, vel nullus eſt dolor, nullus tumor in oſſibus, quæ poſtea incurvantur, apparet, nulla rubedo, & inflammatio, parteſque iſtæ ſolum circa articulationes (quum forte ſint molles, & ſpongioſæ), materiam oſſificam illac delatam facilius retinere poſſunt, & quo ad cæteras oſſium partes craſſeſcere, quod poſtea pro ſigno dicti morbi a medicis accipitur. Ex quibus omnibus colligitur lente cauſſam hanc agere, naturamque ſuam oſtendere; non ſic vero in progreſſu, nam vires acquirit, & adjuvantibus curſu, diſpoſitione, ingreſſu arteriarum, regreſſuque venarum, indicata caries augetur, febricula, aliique morbi enaſcuntur, & incurvatio oſſium manifeſtatur; nam a carie ſequuta reſiſtentia, inquam, & æquilibrium deperditur; hinc ſi a carie vertebræ dorſi ſint male affectæ, gibboſitas extrorſum apparet; ſi coſtæ ſurſum eleventur, & præſertim inferiores aliquæ, tunc ex ſuperioribus, ratione ipſiuſmet ſpinæ, deorſum comprimuntur verſus ſternum, & gibboſitatem antrorſum efficiunt; ſi autem proceſſus ſpinati ex. g. quartæ, & quintæ vertebræ dorſi nonnihil exterius prominere incipiant, coſtæ illis unitæ poſterius trahuntur, elevanturque, interius vero reliquâ ſuarum elongatione deprimuntur, ac denique contractiones, doloreſque tum in ſterno, tum in partibus pectoris ſentientibus inurunt; muſculi reſpirationi inſervientes conſtringuntur, vim non mediocrem, diſtenſionemque in nervis exercent, ac tandem ligamenta, tendineſque relaxantur, ac ita debilitantur, ut oſſa interdum e ſua ſede nonnihil dimoveantur.

Condilli interea vertebrarum exterius porriguntur, nec (ut cenſent aliqui anatomici) ratione muſculorum longiſſimorum dorſi, quia eorum tendines ſolum in proceſſus tranſverſales vertebrarum, & aliquot coſtarum implantantur: nec ratione ſemiſpinatorum, nam iſti in proceſſibus ſpinoſis primarum vertebrarum dorſi terminantur. Igitur in adducto morbo dictæ Mulieris, in qua gibboſitas manifeſtabatur circa quartam, & quintam dorſi vertebram, externe oſſa elevari, interius autem deprimi neceſſe fuit, nam coſtæ illis vertebris reſpondentes exterius erant acuminatæ, interius autem ſumme depreſſæ, & cauſſam hanc vertebris dorſi in earum ſcilicet parte interna primo male affectis fidentius tribuere poſſe credidimus.

Sed quum pars quo mollior, validiores quoque motus, impreſſiones, mutationeſque recipere poſſit, nil mirum ſi infantes magis quam juvenes, adulti, ac ſenes rachitidis morbo teneantur. Oſſa enim dum magis ſolideſcere incipiunt, ipſa cauſſa, quæ rachitidem facit in pueris, ſi adhuc in ſanguine, ac humoribus ſit, alios forte morbos gignere poterit, non vero tam facile incurvationes, oſſiumque prominentias, cariem, gibboſitates, & ſymptomata ſupra recenſita producit; hinc doctiſſimus Hippocrates ex Aſthmate, & Pleuritide interdum gibberoſos fieri dixit; & Galenus tertio de Locis, & ſecundo de cauſſis Pulſus cap. 11. incuſat plenitudinem, & denſitatem, ſpaſmos quoque, & ſiccitatem, ſqualores, frigus immodicum, tuberculos, inæqualem temperiem, & ſimilia.

Si igitur pro varia hominum ætate, variis quoque modis a morbis male affici poſſint eorundem corporis partes, (ſicque ſenſitivitas, & irritabilitas partium, de quibus tantum hiſce temporibus diſputatur hac ratione major, vel minor, vel nulla concipi poſſit) nos in antedictorum confirmationem, & præſertim illarum rerum, quas retulimus, ubi de oſſium natura, modo, ac tempore vario, in quo ſunt conſideranda, ac perpendenda, ſicque de eorum nutritione, cauſſaque, qua adaugeſcunt, ſtudioſi, addimus, partes oſſium in pueris aliqua de cauſſa denudatas, a fibrillis perioſtii, viciniſque muſcularibus operiri, non ſic vero in adultis, ac ſenibus, nam id a natura molliori in illis: ab contracta ariditate in iſtis, denegataque nutritione accidere poſſe cenſemus. Oſſa enim puerorum humore nutritio ſunt imbuta: cauſſâ qua au-

augeſcunt, quemadmodum forte ut in ſeminibus, & ovis viget, ac a muſculis, partibuſque, quibus veſtiuntur, adjuvatur: eorum oſſium pori ſunt latiores, materia unctuoſa, qua abundant, & a qua obliniuntur (ut etiam notat celeberrimus Heiſterus) ab ariditate, fragilitate, imbecillitateque eadem defendit, ab iiſdem exſudat, & fibrillarum ſtrata tendinoſa, & muſcularia hinc inde, ac circum oſſa denudata claviculis veluti ſuis tamquam manibus apprehendunt, & ideo ſupra partes oſsium denudatas, ſe ſe extendunt; in Adultis vero, in quibus oſſa ſumme reſiccata ſunt, unctuoſa materia minor eſt quantitate, & vetus illa nutritionis cauſſa deeſt, quocirca deſquamatio neceſſario eſt expectanda.

Quum, attentis inquam variis, diverſiſque hominum ætatibus, varia item ſit oſsium natura, & eorum compages, atque id maxima ex parte oſtendat, cur puerorum oſſa facilius a dicta rachitidis cauſſa vitientur, tamen cum ad oſsium adultorum deſquamationem ſermo noſter traductus ſit, atque pateat, partes medullæ propiores oleo medullari magis obliniri, quam illas, quæ eorundem oſsium ſuperficiem externam efformant, modo addimus, ſagacem, providamque naturam fortaſſe hac de cauſſa perioſtio ea exterius obvellaſſe, ſtructuramque iſtius talem reddidiſſe, ut neceſſitate expoſtulante, eorum oſſium fractorum cohæſioni præſto eſſet.

Et revera ſi in adultis hominibus oſſium, aliqua de cauſſa, denudatorum, deſquamatio conſequitur, circumpoſitæ perioſtii, & muſculares fibræ ſupra minus reſiccatas, & oſſi denudati ſubtus poſitas ſe ſe intrudunt, illique parti oſſis ſuperextenduntur, hinc ſenſim mole ſua creſcunt, & reſiccatam oſſis denudati ſquamulam partemque ideſt eorum oſſium ſupernam, frequentius nulla vi adhibita, nulloque alio remedio, elevant, ac tandem foras expellunt, jucundoque ſpectaculo, jam omnem oſsis partem ſubtus poſitam, operuiſſe luculenter exhibent.

De medullaris olei utilitate præ ceteris fidem facit illa laminarum oſſearum deſquamatio, quæ a terebra pyramidali obtinetur, nam materia illa nonnihil rubra, ſaturi nempe coloris, & oleaginea, quæ per foramina exacte oſſibus inflicta, aſſurgit, & cum vicinis perioſtio circumpoſitis muſcularibus fibris, integumentiſque conſociatur, ac interdum tanti valet, ut deſquamatio impediatur; quod etiam adnotavit

D. Bel-

D. Belloſt in ſuo Opere inſcripto *le Chirurgien d' Hôpital* cap. 12. p. 85., & os antea denudatum brevi opertum a fibris carneis, nerveis, ac tendinoſis conſpiciatur.

Verum quum vitia quædam interdum eſſe poſſint, vel in ovo, vel in utero matris, vel in ſemine patris, vel in humoribus eorundem puerorum, quæ primis ætatis annis oſſibus inuri poſſint, & ſic ſpinas ventoſas, ita dictas, teredines, exoſtoſin, alioſque morbos procreent, tamen ſi cauſſa illa ſolummodo interna lenta, mucoſa, frigida, vapidaque cum latente forte labe venerea commixta attendatur, illico patet, cur languor in artubus perſentiatur, vita ſedentaria, & quieta in iſtius morbi curſu a rachiticis ametur: cur eorum oſſa duriſsima evadant, cur partes in quibus arteriæ implantantur minus nutriantur, cur non omnia oſſa, omneſque eorum partes male afficiantur, ac demum cur materia illa, quæ faceſſere deberet in oſſa, per totum corpus circumeundo, ubi aliquam invenerit partium ſimilitudinem, ibi deponi poſsit (ut forte in deſcripto mulieris tumore factum conſpeximus) partibuſque illis adaptetur, & oſsificationes formet.

Et revera ſi oculos conjiciamus in dictorum puerorum cranium, iſtud particulas oſſeas ubertim admittit, & hac ratione citius quam par eſt in majorem molem adaugetur, atque interdum aliis in oſſium locis prominentiæ, tophi, & nodoſitates enaſcuntur, non diſſimili forte ratione ac in partibus fibroſis, carunculæ, dum filamenta nervea, carneaque ita male afficiuntur, ut ſuccus nutritius earundem extra earum cavum foras tranſudet, exeatque.

Cranii ergo firmitas, & magnitudo, partibus ſubtus illud poſitis, augmentum, dilatationem, & firmamentum concedit; cerebro, & cerebello ferme ut in ætate provectiori, famulatur, impedimento eſſe poteſt, ne major pars ſpirituum animalium deperdatur; tonum arteriis, vaſiſque omnis generis in meningibus, ac intra cerebrum ſparſis conciliat; hinc facies fit plenior, & floridior, ingenium præ ætate plus ſolito felicius; laboris, exercitiique, impetu quodam mentis, & voluntatis ſtudio, quæ in cauſſa ſunt, ut magis ad cognitionem intelligentiamque convertantur, alioſque ejuſdem ætatis pueros anteire videantur. Verum enim vero, quum hæc diu perdurare non poſſint, quia (ut in pleriſque aliis morbis) principiorum ametria pervertatur, fluidæ partes, vel con-

gruam cum ſolidis comparationem deperdant, parvulos meatus obſtruant, uno verbo (ut ajunt) in actu cauſſa illa magis ponatur, tunc ſymptomata recenſita, & ab omnibus medicis uſque adhuc obſervata, & deſcripta enaſcuntur, & jure merito a Doctiſſimo Sydenamio pag. 713., & a D. Burnet ſec. prima lib. 15. pag. 660., laceræ ægritudines appellantur, quæ niſi intra quartum, vel quintum ætatis annum tollantur, rachitici aut infirma, atque ægra valetudine toto ſuæ vitæ tempore torquentur, aut in mortem prolabuntur.

Si exaratæ rationes alicujus incitamenti nobis fuerunt, ut quæ uſque adhuc expoſuimus, notaremus, majus quidem incitamentum ad id faciendum addiderunt ſententiæ ambiguæ, ac ferme inter ſe diſſentientes plerorumque Medicorum, qui de hoc morbo ſcripſerunt; acceperamus ſcilicet, Gliſſonium, cui ſubſcribitur Heiſterus, appendice ſua de rachitide recurſum feciſſe (ut cauſſam rachitidis explicaret) ad inæqualem diſtributionem ſucci nutritii oſſibus ſolummodo competentis: Mayowium ad inæqualem ſimiliter ſucci nutritii diſtributionem, minorem tamen muſculis, majorem autem oſſibus, conceſſam: Dolæum ad virtutem ſpirituum animalium, majorem in una oſſium parte, minorem vero in altera: alios medicos ad obſtructiones, vel in nervis, vel in glandulis, vel in ſpinali medulla: aliquos ad differentiam quamdam intercedentem inter oſſium ſubſtantiam, & eorum formationem: alios ad alias cauſſas, quas ſi ſingulas numerare, ac referre vellemus, nimis longum eſſet enarrare. At quum nulla mentio a dictis optimis medicis fiat de morbis a nobis viſis, & obſervatis, oſſibus rachiticorum obvenientibus, ut (niſi fallimur) par eſt, & neceſſitas poſtulare videbatur, dubitavimus, eoſdem occaſionem non habuiſſe oſſa rachiticorum obſervandi, & examinandi; etiam in opinione noſtra ſaltem ab laudato experiſſimo Viro Clopton Awers confirmati fuimus, qui de ſe ipſo in ſua *Oſteologia* ingenue fatetur, ſe nunquam occaſionem hanc habuiſſe.

Si quæ uſque adhuc de Rachitide diximus, alicui forte pauca videri poſſent, pauca etiam de remediis ad illam impediendam, tollendamque comparatis: hinc cauteria, enemata mercuriales purgationes, exſicantia quædam, ab doctoribus medicis deſcripta, & præ cæteris radix filicis florida, oſmunda regalis dicta; flores ſalis amoniaci cum vitriolo cipri calcinato

nato commixtis: Ens Veneris appellati, aliaque hujus cenſus ut pote materiam pravam ſupra deſcriptam corrigunt, ac eliminant, in illis examinandis, & referendis non immoramur, nam D. Lemeri in ſuo tractatu univerſali de Aromatibus pag. 262., oſmundæ regalis radici vim tribuit apertivam, inciſivam, & vulnerariam, quod apprime concordat cum experimento a nobis inſtituto, quatenus a libra una dictæ oſmundæ regalis aridæ, & per retortam deſtillationi expoſitæ, eduximus uncias tres cum dimidia phlegmatis cum pauco ſpiritu; drachmas tres olei fœtidi, & quinque cineris, e qua extraximus grana quadraginta ſalis: itemque dictus auctor in ſuo Curſu Chimico pag. 362. Enti Veneris, vim aperitivam, attenuantem, ac diaphoreticam habere docet, quin immo toties laudatus Boheraawe arbitratur, bonos effectus polliceri ab iſto remedio in iis morbis, qui a nimia debilitate ſtaminum ſolidorum pendent, ut etiam multo antea adnotaverat celeberrimus Helmontius.

In adverſa vero opinione nos ſumus cum illis, qui emollientia remedia partibus concavis oſſium rachiticorum, & corroborantia convexis apponunt, nam pars concava a recenſitis incommodis, & præcipue ab occulta carie debilitata, corroborantia: convexa vero, ut pote durior facta, emollientia exigere videtur; idem de frictionibus, palis, vectibus, machinamentis, & ferramentis dici poſſe credidimus, nam ſi ad æqualiter oſſa in eorum figura, vel retinenda, vel reſtituenda inventa, & comparata ſunt, hæc parti concavæ magis, quam convexæ apponenda videntur, ea ratione qua Agricolæ palos, vecteſque arboribus junioribus parti inclinatæ, vel quæ inclinari incipit, apponunt, minime vero oppoſitæ.

Si ergo & a morbo gravi, mortiferoque dictæ mulieris, & ab indicatis cauſſis, occaſionem arripuimus ad hæc ſcribenda, tamen quum ad finem pervenimus, ultro confiteri debuimus, nonnullorum ſymptomatum, quæ eamdem morbi cauſſam forte reſpiciunt, ſive ab eadem neceſſario pendere videntur, adhuc formam eorum, ſpeciemque perſpectam nos cernere non potuiſſe: ideoque ſtudio, ac ſolertia illorum, qui medicarum, chirurgicarum, atque anatomicarum artium ſunt amantiſſimi, eamdem cauſſam, & reliqua e tenebris in lucem vocare modo committimus.

De

De Rachitide tandem quamvis nonnulla addere in animo eſſet attentis præſertim iis, quæ anno 1758. D. Hallerius, ubi de oſſium formatione, publici juris fecit, tamen quum alio tunc evocati fuerimus, ad medicinam ſcilicet præſtandam variis hominibus a Cane vere rabido demorſis: (agebatur enim de morbo, ut omnes ſciunt, cujus ſymptomata heu nimium truculentiora ſatis manifeſta, remedia vero ad debellandam, ac profligandam luem uſque in hunc diem, vel nulla, vel ſaltem valde dubia) hinc attentis iis, quæ dietim acciderunt, ea item notavimus, & quum utilitatis non modicæ id eſſe arbitrati fuimus, quæ tunc ſcriptioni mandavimus, aliis tempore, & loco ad facultatis medicæ decus, & incrementum, noſtræ Academiæ notum faciemus.

EXPLICATIO FIGURARUM.

FIG. I.

A. Magni Tumoris facies externa.
B C D. Minores Tumores.
E. Pars ſuperior, quæ Thoracem ingrediebatur.
F. Alter Tumor in Hypocondrio dextero locatus.
G. Alter Tumor mole minor Reni ſiniſtro counitus.
H. Ultimus Tumor in Thorace pene totus incluſus, & ab oſſeo Tumore exortus.
h h h. Squamulæ oſſeæ.

FIG. II.

A. Magnus Tumor.
B C D. Minores Tumores.
E. Ren ſuccenturiatus.
F. Uteri vaſa aliqua.
G. Ureteris portio.

FIG. III.

A. Facies externa magni Tumoris in crucis formam adaperti.
B. Superna pars Tumoris, quæ Thoracem ingrediebatur.
b b b. Oſſea ſubſtantia.
C. Cavitas cavitati capitis humani ferme ſimilis.
D. Tumores ad naturam ſcirrhoſam accedentes ſupra baſim magni Tumoris locati.
E. Oſſea ſubſtantia verticalis.

FIG. IV.

A A. Oſſea ſubſtantia.
B. Membrana, ſive portio Meſenterii.
C. Tumores ad naturam ſcirrhoſam accedentes.
D. Membrana interna, quæ Perioſtium æmulabatur.
E. Unus ex cæteris Tumoribus.

JOAN-

Fig. 1.

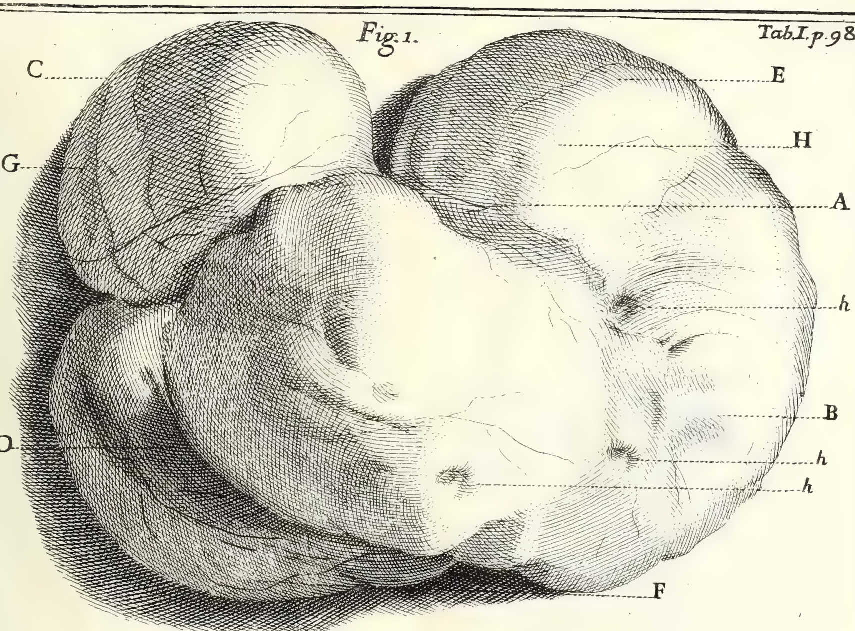


Fig. 2.

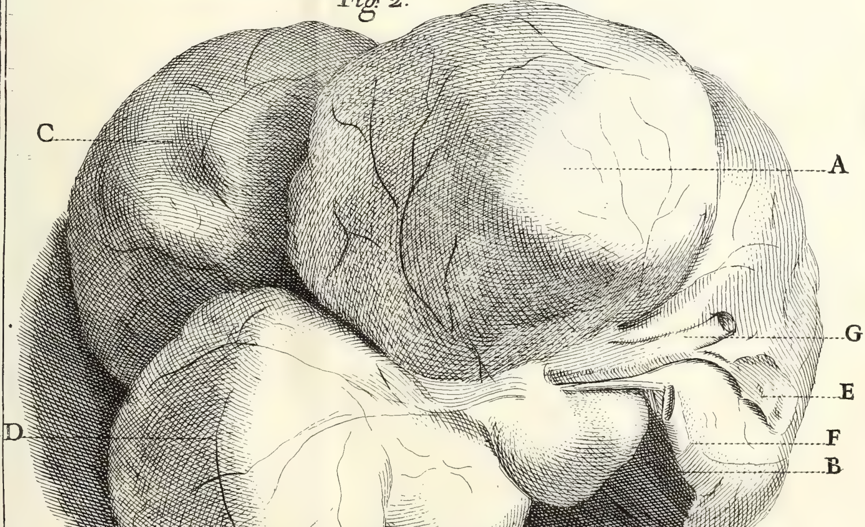


Fig. 3.

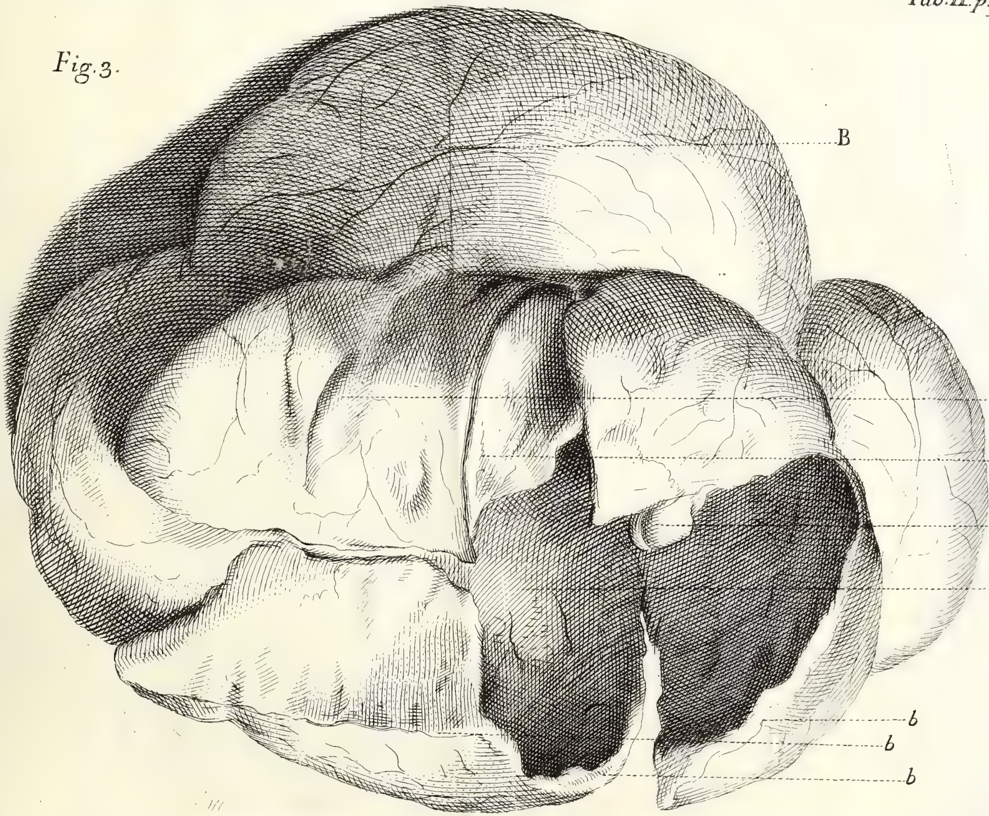
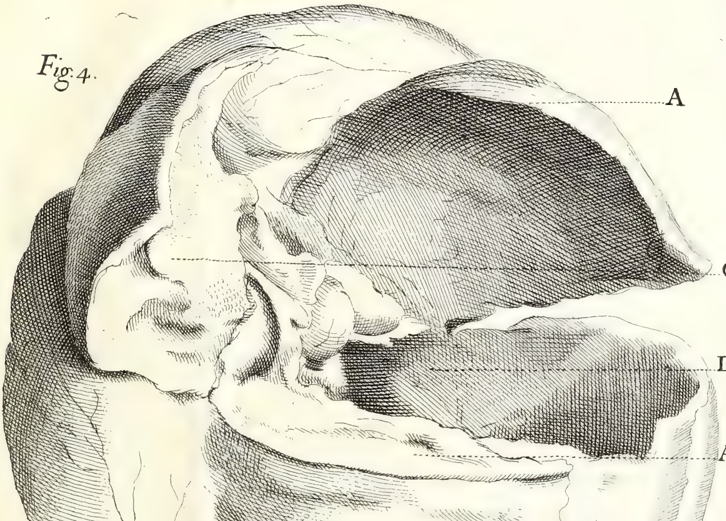


Fig. 4.



JOANNIS BACIALLII.

De Fluminibus in Mare influentibus.

Quid fluminibus in mare influentibus accidere ſoleat, in quam illa inclinent ſcilicet partem, quam arena, & cæno muniant, quamve prætereant, jure optimo, ac merito hydroſtatici exquirunt: maxime enim ad illos attinet probe iſta dignoſcere, ut ex iis fluminis oſtium, & oſtii ipſius ſitum, formam, ac magnitudinem conſtituant, quibus totius fluminex aquæ menſuram, & copiam aſſequantur, in primiſque illam tanti faciendam ſuperioris alvei declivitatem.

At in definiendis viis, legibuſque, quibus flumina in mare recipiuntur, non una eademque videtur hydroſtaticorum ſententia; quod enim ad Hadriaticum ſpectat, de quo noſtri multa in hanc rem obſervavere, Geminianus quidem Montanarius exiſtimavit, flumina Æmiliæ in mare influentia oſtia ſua ad ſiniſtram conſtanter, perpetuoque obvertere, Dominicus Gulielminus contra ad dexteram.

Magna equidem inter utramque opinionem diſſenſio, ac repugnantia apparet, ac tanta, ut in quæſtione facti nulla inſanabilior oriri poſſit. Neque enim alterutrius autoritas, ac fama, quæ par certe in utriſque eſt, ac graviſſima, nos movere poteſt, ut unam potius, quam alteram ſententiam ſequamur. Nam etſi alicui videri poſſet, ut audivimus, Montanarium Gulielmino anteferendum eſſe, magiſtrum ſcilicet diſcipulo, norunt tamen cæteri omnes, Gulielminum hydroſtaticis omnibus magiſtrum fuiſſe, neque Montanarium hæc de fluminibus excogitaſſe, & inveniſſe, dum Gulielminus in ejus diſciplina erat, neque huic poſtea, quantum conſtat, communicaſſe: nempe invenit, dum jam eſſet in Patavina Univerſitate, non amplius in Bononienſi, Magiſter, neque in Bononienſibus fluviis invenit, ſed in Venetis, & in privatos

graviſſimi illius Senatus uſus, Gulielmino abſente, triginta annos nato, atque in ſcientiis adeo provecto, ut nedum a Montanarii ſchola jam diu abeſſet, ſed ipſe ſuam aliis aperiret.

Magiſtri igitur auctoritas hic nihil evincit, ubi magiſtri officium non evincitur. At enim, inventum illud ſuum Montanarius Gulielmino familiariter, & amice communicavit, licet poſtea omnes videant aut non didiciſſe, aut oblitum fuiſſe. Equidem non liquet quemquam alium de eo privatim monuiſſe, præter Cardinalem Baſadonnam literis ad eum datis triennio ante quam Montanarius ſupremum diem obiret; atque id ipſum ignoraretur, niſi eæ literæ poſt annos triginta, & amplius, anno ſcilicet 1715., e tenebris in publicam lucem emerſiſſent, Montanario ipſo itemque Gulielmino jam mortuo.

Sed demus, quod cæteroquin non conſtat, una etiam monuiſſe Gulielminum. Homini certe acerrimi ingenii, neque deterioris judicii communicavit, & ei, quem Montanarius ipſe negare ſolebat, præclariore, aut promptiore ingenio noviſſe quemquam. Si igitur Gulielminus Montanarii ſententiam perſpectam habens ab ea tamen nihilominus inſigniter adeo receſſit, quis id faciendi cauſas ſatis probabiles habuiſſe doctum hominem, & eruditum non exiſtimabit? Quod ipſum de Montanario exiſtimandum eſſet, ſi illum Gulielminus antevertiſſet. Neque enim alterutrum adeo immemorem, ac ſoccordem effingere licet, ut quæ alter ab altero hac ſuper re accepiſſet, obſervationem deinde in fluminibus recenſens, voluerit, ea, oculis ipſis repugnantibus, in contrariam partem detorquere. Nam quæſtio facti eſt, & hujuſmodi, ut non præſtantiam ingenii, neque minutam in obſervando ſubtilitatem, ſed nudam oculorum aciem eamque etiam ſatis mediocrem, quippe in experimento vulgari, ac communi, requirit, quo fit, ut obſervator majorem fidem inveniat, cum ſciens quid antea de eadem re detectum, & animadverſum ſit, prioribus obſervationibus nihilominus non acquieſcit, & novam denunciat.

Res igitur eo adducta eſſet, ut Montanarii, vel Gulielmini in obſervando negligentiam incuſaremus, aut fidem; quod cum in nobiliſſimos obſervatores hujuſce Univerſitatis Profeſſores ſine matura cauſæ diſquiſitione intentare nefas ſit,

rem

rem facturum me eſſe exiſtimavi utriuſque doctoris famæ accommodatam, ſi eam de fluminibus mare intrantibus, quæ videtur eſſe inter eorum opiniones, repugnantiam tollerem, aut certe minuerem, quod facere in præſentia adnitar.

Ac primo quidem duplex eſſe poteſt exitus fluminum in mare conſideratio. Sicuti enim hæc ſolidis, & fluidis partibus componuntur, ita qui de eorum natura ſcripſerunt, nunc in ſolidis, nunc in fluidis partibus fluminum affectiones ſunt perſecuti: illas quidem in alvei, riparum, fundique conformatione, ſtabilitate, diſpoſitione, ac ſitu, has vero in aquarum motu, viribus, copia, & directione: quod cum in univerſo flumine quæſitum ab illis, & explicatum ſit, tum in extrema, atque ultima illius parte, quæ fluminis oſtium dicitur, potiſſima certe, ſi quæ alia, non erat omittendum, ſi maxime quædam naturæ conſtantia, & perpetuitas agendi, ut accidit, in ea obſervaretur.

Porro dum Montanarius in ſuo illo de curſu maris Hadriatici ſcripto, primus ſtatuit, flumina, cum mare ſubeunt, ad eorum ſiniſtram torqueri, reſpexiſſe ſane videtur ad extremam illam fluminis partem, terra, & arena compactam, qua hiant in mare: Nam totus in eo eſt, ut illius partis fabricam conſtitutionemque deſcribat, cauſaſque adferat, ob quas tanta ibi arenarum aggeſtio invehatur ad dexteram fluminis partem, quæ ibi aſſurgens flumen ex ea parte impediat, detorqueatque in ſiniſtram, ad quam propterea illius fauces obvertat. Id ex illius verbis, ut mihi quidem videtur, ſatis aperte colligitur. = Ma quì s' oſſervi (inquit ille) che = quello ſcanno mentre a poco a poco ſi forma ſulla deſtra = del fiume va ſervendo di riva, o riparo da quella parte = deſtra, onde le acque di eſſo fiume, che ſulla parte ſiniſtra = non hanno riva alcuna, che a guiſa d' alveo le contenga, = in quel ſito facilmente piegano il corſo verſo la ſiniſtra, = dal che naſce, che tanto più creſce lo ſcanno de' ſabbioni ſulla deſtra, e la punta che fanno maggiormente va = avanzandoſi verſo la ſiniſtra predetta; quindi ne ſiegue, = che il fiume tanto più piegando quivi ſolo forma la ſua = foce, *dove da un lato i ſabbioni ſteſſi, e dall' altro la riva* = *del mare gli ſervono di ſponda al ſuo corſo*, ed ecco mani= feſta la cagione, perchè per tutto l'Adriatico, ov'è tal cor= rente del mare da ſiniſtra a deſtra, i fiumi, che vi ſcari-

= ca-

= cano, voltano la foce verſo la ſiniſtra, e mettono i ſab-
= bioni ſulla deſtra.

Montanarius itaque fluminum affectiones in maris litore contemplatus, in quam partem ibi alveorum extrema, quæ veluti finem fluminibus videntur imponere, obvertantur, definivit: quod illi ſatis fuit ad rem, quam quærebat, & ad laudem ſibi ex hoc invento comparandam.

Verum ſcire licet flumina, ubi ad maris litus deveniunt, non ibi ſtatim deperire, nec ſicuti nomen, ita curſum, quem habent, prorſus amittere. Licet enim alveo omni, qui eorum aquas contineat, quantum quidem apparet, in litore ſpolientur, tamen ſe intra marinas aquas colligunt, ac ſervant, & vim omnem, quæ illis in litore reſtat, conando, propellendo, penetrando, uno verbo in eas excurrendo inſumunt.

Hujus ſane rei habemus argumenta certa, & pervulgata, ut Varennius, (*lib.* 1. *c.* 13. *prop.* 10.) & Furnierius (*Hydroſ. lib.* 9. *c.* 9.) teſtantur. Nautæ enim iſtorum fluminum excurſiones longe etiam a litore in mari perſentiunt, & illorum aquas a marina probe diſcernunt pondere, ſapore, colore etiam ipſo, iiſque tamquam ducibus portum, aut litus, quamvis non videant, tutiſſime capiunt: quæ quidem omnia cum in minoribus quoque fluminibus, & in litore, & ad quandam ab eo diſtantiam manifeſto obſerventur, in majoribus tamen, multo longius ab ipſo, ad quinque, ſcilicet, ad duodecim, & in inſignioribus ad quadraginta milliaria, & amplius: nempe in his tanta vis erumpendi, & intercurrendi excellit, ut marinam aquam disjiciant, & alio repellant; quod Poetæ ipſi noverunt; Statius enim Nilum primo veris tempore affluentem, ſeque in mare exonerantem, mirifice deſcribit his verſibus:

Scindit fontis opes, ſeptemque patentibus oris
In mare fert hyemes: penitus ceſſere fugatæ
Nereides, dulcique timent occurrere ponto.

Neque iſta fluminum virtus ſuccreſcente, aut æſtuante mari reſtinguitur. De magnis, ac furentibus quiſque, ut arbitror, conjiciet: de exilibus, & pacatis, de quibus dubitari poſſet, ego obſervavi. Cum enim ad oram Hadriatici maris olim veniſſem, ubi flumen Paduſæ mare ſubit, unaque eſſet celeberrimus Vir Euſtachius Manfredius, reſtitare, ac reſilire

in

in ipſo oſtio flumen leniſſimum viſum eſt mihi, & a mari, quod tunc manifeſtiſſime ſuccreſcebat, repelli, ac reſpui: qua de re ut ſine errore judicare poſſem, appoſite me admonuit humaniſſimus ille Vir ut Oſtio fluminis juſtæ molis, ac ponderis lignum injicerem; cumque injeciſſem, in aqua ſubſedit, ut ſolent quæ innatant, aliqua ſui parte demerſum, tum e fluminis oſtio veluti navicula primævam fluminis ſemitam tenens leviter in mare deceſſit: quo facile tunc intellexi flumen ſub maris ſuperficie latitans ad ligni partem demerſam allidere, lignumque rapere eadem via, quam flumen ante maris æſtum ſequebatur.

Itaque ſi id fluminibus mare ſubeuntibus in univerſum accidit, ut a litore non præcidantur, ſed longius etiam ab ipſo vigeant, & excurrant, jure quæri poteſt, quam in extremo illo curſu directionem ſint habitura.

Porro flumen in Hadriaticum primo ingrediens cum neceſſe ſit in adverſantis maris curſum a ſiniſtra in dexteram venientem incurrere, fit quædam virium, illinc maris, hinc fluminis, colluctatio, quæ licet in flumine magna quandoque, & ferox a principio, tamen cum perſeverare nequeat ſine aſſidua virium jactura, ſenſim flumen de via languere, tum a maris curſu retundi, & deflecti, tandem eadem via convolvi, & rapi, quam mare ſequitur, a ſiniſtra nimirum in dexteram.

Cum igitur flumina, quæ in Hadriaticum mare influunt, ſuæ illi perpetuæ excurſioni tandem obſequi cogantur a ſiniſtra in dexteram, idem quoque erit finis illorum de quibus agimus, Galliæ togatæ, ſeu Æmiliæ, & cæterorum ejuſdem maris, quorum curſum non in litore intercidi, ſed ultra illud patere Montanarius ipſe agnoſcit: illud igitur fiet, quod Gulielminus dixerat, ut illic ad dexteram torqueantur.

Neque huic ſententiæ, quæ cæteroquin verum fluminum finem, & terminum conſtituit, Montanarius ipſe repugnat. Quamvis enim ſtatuiſſet flumina in litore ad eorum ſiniſtram converti, tamen aliquantum ab eo egreſſa facile cognovit de via deflectere, & ad dexteram redire, ut aperte innuit his verbis (*pag.* 92.): = Il fiume laſcia bensì (in litore) l'acqua mor-
= ta ſulla deſtra (ubi ſcilicet cumulum arenæ ſibi efformat,
= qui flumen in ſiniſtram urget) ma non impediſce, che
= il mare dalla ſiniſtra non corra fino a lui, ove giunto lo
= di-

= divertiſce dal primo corſo (igitur in dexteram) e lo con-
= duce ſeco verſo l'alto mare.

Atque ita mihi quidem videtur aperiri, atque explicari poſſe ſententia de iſtis fluminibus a Gulielmino tradita Coroll. 7., propoſ. 4., cap. 8. nobiliſſimi illius libri de Fluminum Natura: quæ ſic explicata, ut arbitror, non reprobabitur; fit enim cum Montanarii ſententia conſentiens, aut ſaltem non repugnans. Res enim in promptu eſt. Gulielminus flumina ad dexteram rapi exiſtimavit in mari: Montanarius ad ſiniſtram in litore. Locus igitur quæſtionem dirimit.

Ac ne hujuſmodi explicatio arbitratu meo conficta eſſe videatur, enitar oſtendere eandem ex Gulielmini ſcriptis, & præceptis omnem colligi, & cum ipſis apte conſentire.

Porro in Coroll. illo ſuo de fluminibus Æmiliæ in mare dextrorſum influentibus, quid tantum accidat, exponit, nihil tunc aperte demonſtrat: demonſtratio enim, ut in omnibus fere Corollariis fit, eruitur ex præcedentibus; præcedentia autem, quibus Corollarium illud innititur, ſunt hujuſmodi. Flumen, quod in aliud influat, ita ſe huic obvertere, ut & curſu, & alvei ſui extremo curſui fluminis, a quo recipitur, obſecundet.

At id probat, ac ſtatuit, dummodo tamen duæ veluti conditiones accedant. Altera quidem eſt, ut flumen, quod recipit, inſignius ſit vi, & curſu fluminis, quod recipitur. Altera ut flumen, quod recipitur, alveo conſtet non inexpugnabili, qui ſcilicet ab alio comminui poſſit, & erodi.

Jam vero flumina, quæ intrant in mare, multo velociora ſunt quam mare, in quod impingunt. Licet enim mare ob eum curſum, de quo loquitur Montanarius, ad certam ſemper, ac definitam plagam deducatur, magnique cujuſdam fluminis naturam, & formam induat, tamen tarde adeo, & languide fluit, ut ſaltem in Hadriatico, de quo loquimur, non amplius quam quatuor milliaria ad ſummum conficiat quolibet die, teſte Montanario ipſo: quod igitur flumen, qui amnis in Hadriaticum influet, a quo curſus maris inſigniter non vincatur, maxime autem in litore, e quo erumpit? Cum itaque flumen, quod e litore ingreditur in Hadriaticum, maris viribus prævaleat, conditio, quam ſibi Gulielminus propoſuit, ibi locum non habet, ergo nec Corollarium, cui illam affixit.

At

At ubi amnis, vel flumen litus prætergreſſum, in obſtantia maris vada occurrit, & quem ſæpe memoravimus curſum ex adverſo trajicit, ſenſim, ut ſupra etiam indicavimus, retundi, viribus debilitari, languere neceſſe eſt: mari interea latius a litore excurrente pugnamque advenienti firmiter redintegrante: quo fit ut ad eam tandem virium tenuitatem flumen deveniat, quam poſuit Gulielminus, ut maris curſui obſequatur. Ea igitur conditio non in litore quærenda eſt, ſed remotius ab ipſo, ibique illius dictum valet de fluminibus Æmiliæ, & fidem facit etiam de cæteris.

Neque minus altera conditio, quam ſibi Gulielminus ſtatuit, propoſitæ explicationi favere videtur. Si enim alveum fluminis ingredientis ex facili materia, quæ aquarum vi exedi poſſit, conſtare voluit, ut flumini recipienti obſequatur, equidem alveum talis naturæ in Hadriatici litore non reperias, cum Montanarius ſtatuerit omnia flumina, quæ hiant in illud, munitionibus adeo ad dextrum eorum latus augeri, & continua arenarum aggeſtione compleri, & renovari, ut non modo fruſtra in eam partem flumen conetur, ſed etiam hujuſmodi impedimentis in oppoſitam, ideſt in ſiniſtram depellatur.

Ob eam igitur cauſam a Montanario notatam, ob quam flumina Æmiliæ in litore ſiniſtrorſum torquentur, ob eamdem ipſam eis non licebit legem a Gulielmino in eo Corollario conſtitutam ſequi in litore; nec ille ibi voluit ut uteremur, dum acute præſenſit attendendam eſſe alvei conditionem, quæ in eo loco, uti vidimus, talis eſt ut impediat.

Atque ubi impedit, egregie animadvertit, flumen nihilominus in eam partem maxime adniti, & curſu ſuo propendere. Quod cum ab nemine, quod ſciam, uſque adhuc obſervatione aliqua fuerit confirmatum, unam affero, quam ad eam rem probandam plurimum facere exiſtimo.

Cum præſtantiſſimi Viri Euſtachius Manfredius, & Bernardinus Zendrinius ad fauces Bedeſis, & Utentis, fluminum Ravennæ, ubi ea unitim devolvuntur in mare, obſervaſſent prælongum, & altum arenarum tumulum, qui veluti ſcamnum quoddam, ſic enim appellant, ad dexteram oſtii fluminis ſupra litus efferebatur, & altius in mare longiuſque protendebatur, quam illud quod ad ſiniſtram aſſurgebat (omnino ut Montanarius in aliis Hadriatici fluminibus obſervaverat) alti-

tudinem aquæ in communi eorum fluminum oſtio ſecus litus poſito dimenſi ſunt tribus in locis: ad ſiniſtrum latus oſtii, in quod ſe fluminis alveus cæteroquin flectebat, eam invenerunt pedis unius, & unciarum ſex: in medio ipſius pedum duorum, & unciæ unius; pedum item duorum, & unciæ unius ad dexterum latus, ut in diario obſervationum a prædictis Viris factarum in illis fluminibus recenſetur. Igitur oſtii illius fundus ſic diſpoſitus, ac diſtributus erat, ut ſublimior ad ſiniſtram, profundior eſſet in medio, & ad dexteram: ergo ex hac parte flumen validius aquam urgebat, quam ex altera, ut Galielminus præſenſit, fundum enim ibi plus effoderat, & in profundiorem depreſſerat altitudinem: quod ſi idem contingat in aliis fluminibus, haud ſcio quid iſtud tandem ſit flumina in mare ingredi ad ſiniſtram cum eorum aquæ, quibus flumina potiſſimum exiſtunt, copioſius, & vividius e dextera ripa, vix etiam e litore egreſſæ, prorumpant. Quod dum dico nihil detrahi Montanario volo, ejus enim obſervatio potiſſimum alveos fluminum ſpectat, non fluentium aquarum vim, qua per eos exonerantur: ac ſi quod ille obſervavit, perpetuum, & conſtans ſit, venuſtatem certe habet, & momentum.

Quamquam, ne quid diſſimulem, Montanarii obſervatio non ab omnibus omnino aſſenſum extorquet. Ipſe certe in aliquibus ſolum Hadriatici fluminibus, Venetis præſertim, eam notavit. Polenus autem graviſſimus ſane Philoſophus, & rerum Venetarum gnarus de ea obſervatione ambigere in univerſum videtur. Zendrinii obſervationes ad Padi, & Amonis fauces diſſentiunt. Quid ſi idem quæreretur in aliis maribus, Neapolitano, Etruſco, & aliis, in quibus nihilominus Montanarius ſperat idem contingere quod in Hadriatico? Benedicti Caſtellii obſervationes partim adverſantur, partim favent. Lanciſii itidem de faucibus Tyberis. Omnino hanc fluminum oſtiorum in litore obverſionem vel ad ſiniſtram, vel ad dexteram alii tribuunt ventis, alii maris æſtibus, & fluentis, alii aliis cauſis: addi poſſent etiam litora ipſa, quæ huc, illucque in mare exporrecta, flumina nunc a dextris, nunc a ſiniſtris a ventis protegunt, & ad ſe alliciunt, ſtagna etiam, & vada parant, in quæ libentius efferantur.

At enim: ignoſcendum Montanario, ſi in quibuſdam locis ob peculiares quaſdam cauſas nec lex ab eo lata valet,

nec

nec obſervatio: Valeat ut plurimum. Ita ſit. At idem etiam potiori jure concedatur Gulielmino, cujus doctrina de fluminibus confluentibus in univerſum valet etiam, uti vidimus, ad Mare Hadriaticum traducta. Quod ſi eam quis ex Montanarii obſervationibus in maris litore putet locum non habere, nobis quidem videtur Gulielminus ex iis, quæ poſuit, litus excepiſſe.

JOHANNIS ANTONII ANDREÆ CASTELVETRI.

De proprietate numerorum diviſibilium per 11, 111, 1111, 1.... *&c.*

IN quarto Tomo Commentariorum Academiæ Bononienſis Inſtituti Scientiarum & Artium egi de quadam proprietate numerorum numeri 9 multiplicium, ac demonſtravi, non eſſe unice numero 9 adſcribendam, ſed aliis omnibus numerorum 99, 999, 9999, 9.... multiplicibus, certa quadam naturali lege conſideratis, eſſe tribuendam. Quod tunc præſtiti occaſione cujuſdam theorematis a doctiſſimo P. Frederico S. Vitali e Soc. Jeſu in Hiſtoria Litteraria Italiæ demonſtrati. Nunc breviter dicendum cenſui de generali proprietate numerorum multiplicium numeri 11, de qua in quodam opuſculo *della letteratura oltramontana* egit doctiſſime R. P. G. H. Soc. Jeſu. Hanc proprietatem vir doctiſſimus deduxit a quadam ſerie geometrica pro numerorum diviſione ab ipſo tradita, ac fatetur a nemine, quantum ipſe ſciat, fuiſſe unquam obſervatam. Ego proprietatem ſuppono, ac directe demonſtro. Ceterum de hac proprietate prius ego egi in quodam libello uſque ab anno 1749 Bononiæ edito, in quo ea tantum ſcripſeram, quæ praxi conſulebant, ac proprietatem eandem ad quoſvis numeros numerorum 11, 111, 1111, 1... multiplices accommodaveram. Quod de hac re meditatus ſum, ad Vos, doctiſſimi Academici, defero, ac judicio veſtro ſubjicio; ac rogo, ut, cum leviſſima re a graviſſimis meditationibus confidentius Vos abducam, veſtra humanitate mihi parcatis.

Gene-

Generalis proprietas numerorum per 1, 11, 111, 1111, 1.... *diviſibilium*.

1. Cujuſcumque numeri notæ arithmeticæ omnes in ſummam redigantur; hujus aggregati notæ, ſi pluribus conſtet, & ipſæ colligantur, & ſic deinceps uſque dum aggregatum ſit unius tantum notæ. Hæc erit unitas, vel multiplex ſimplex unitatis. Hoc evidens eſt, nec indiget demonſtratione.

Cujuſcumque numeri diviſibilis per 11 notæ arithmeticæ, initio dextrorſum ſumpto a prima pro unitatibus alternatim colligantur, ac reliquæ ſimiliter pro decadibus. Aggregati notæ, ſi plures ſint quam duæ ſimiliter alternatim colligantur, ac ſic deinceps uſquedum in aggregato duæ tantum obtineantur notæ. Hæ vel numerum 11, vel hujus numeri multiplicem ſimplicem exhibent.

Cujuſcumque numeri diviſibilis per 111 notæ, initio dextrorſum ſumpto a prima pro unitatibus, tum a ſecunda pro decadibus, tum a tertia pro centenariis, alternatim aggregentur. Aggregati notæ ſi plures ſint quam tres, ſimiliter alternatim eodem ordine colligantur, & ſic ſemper donec in aggregato tres tantum habeantur notæ. Hæ vel numerum 111, vel hujus multiplicem ſimplicem exhibent.

Cujuſcumque numeri per 1111 diviſibilis notæ, initio dextrorſum ducto a prima pro unitatibus, a ſecunda pro decadibus, a tertia pro centenariis, tum a quarta pro millenariis, alternatim in ſummam redigantur. Aggregati notæ, ſi plures ſunt quam quatuor, ſimiliter colligantur, ac ſic deinceps donec in aggregato quatuor tantum ſuperſint notæ. Hæ vel numerum 1111, vel hujus numeri multiplicem exhibent.

Sic in infinitum progreditur hæc proprietas pro numeris 1.... diviſibilibus, ſi proceſſu, ut ſupra, verſentur.

2. Quod ut demonſtrem aſſumo numerum ....11111111, quem in ſuas reſolvo partes in hunc modum:

Pro

Pro diviſore 11		*Pro diviſore* 111		*Pro diviſore* 1111	
1.	1	1.	1	1.	1
10.	10	10.	10	10.	10
100.	1	100.	100	100.	100
1000.	10	1000.	1	1000.	1000
10000.	1	10000.	10	10000.	1
100000.	10	100000.	100	100000.	10
1000000.	1	1000000.	1	1000000.	100
10000000.	10	10000000.	10	10000000.	1000
...11111111		...11111111		...11111111	

& obſervo, quod ſi hæ per 11 dividantur, pro reſiduis haberi ſemper vel 1, vel 10; 1 pro prima dextrorſum parte, 10 pro ſecunda, & ſic deinceps. Quod ſi partes hæ dividantur per 111, pro reſiduis haberi ſemper vel 1, vel 10, vel 100; & ſi per 1111 haberi vel 1, vel 10, vel 100, vel 1000, & ſic deinceps ſemper eodem ordine, ac progreſſu pro quibuſcumque diviſoribus 1....

3. Ex hac obſervatione colligitur, quod ſi numeri dividendi, ac per diviſores 11, 111, 1111 &c. diviſibiles notis arithmeticis ſimplicibus, & cujuſcumque valoris conſtent, tunc ex diviſione partium eorumdem reſiduum eſſe præciſe valoris notæ ſiniſtræ; cum hic valor, ex obſervatione jam facta, colligi debeat multiplex unitatis; & hinc fluit notas arithmeticas cujuſcumque numeri per 11, vel 111, vel 1111 &c. diviſibilis, colligendas eſſe, initio dextrorſum ſumpto, iis reſpective alternationibus, quas ſupra deſcripſimus, ut hic apparet pro diviſoribus 11, 111, 1111, ſi numerus ſit *hgfedcba*

a	*a*	*a*
b o	*b* o	*b* o
c	*c* o o	*c* o o
d o	*d*	*d* o o o
e	*e* o	*e*
f o	*f* o o	*f* o
g	*g*	*g* o o
h o	*h* o	*h* o o o

cum autem numeri dividendi ex hypotheſi multiplices ſint ſuorum reſpective diviſorum, neceſſe eſt, ut tandem reſiduum ſit vel ipſe diviſor, vel multiplex ſimplex diviſoris. Q. E. D.

4. Pro

4. Pro colligendis numeri dividendi notis, ſecentur hi numeri, initio ſemper dextrorſum ſumpto, in binarios pro diviſore 11, in ternarios pro diviſore 111, in quaternarios pro diviſore 1111 &c., & numeri ſectionum reſpective aggregentur, & ſic ſemper in novo aggregato, uſquedum obtineantur aggregatorum notæ vel duæ, vel tres, vel quatuor &c. reſpective. Res eadem eſt, & praxis commodior.

Quod ſi numerum quemcumque habeamus per 11, vel per 111, vel per 1111 dividendum, & in eo praxim expoſitam inſtituamus, ac tandem eveniat, ut reſiduum non adæquet diviſores, vel diviſorum multiplices ſimplices, numerus ille non erit multiplex ſui diviſoris. Quod autem remanet, ablato majori multiplici ſimplici diviſoris, reſiduum erit diviſionis. Pro exemplo ſint numeri 78365430, 83976426643, 93297809286 dividendi, primus per 11, ſecundus per 111, tertius per 1111. Fiat

<table>
<tr><th>pro primo</th><th>pro ſecundo</th><th>pro tertio</th></tr>
<tr><td>30</td><td>643</td><td>9286</td></tr>
<tr><td>54</td><td>426</td><td>9780</td></tr>
<tr><td>36</td><td>976</td><td>932</td></tr>
<tr><td>78</td><td>83</td><td>1|9998</td></tr>
<tr><td>1|98</td><td>2|128</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>9999</td></tr>
<tr><td>99</td><td>130</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>111</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>19</td><td></td></tr>
</table>

Cum primi & tertii reſiduum ſit multiplex ſimplex diviſorum ſuorum, eorumdem diviſorum erunt & ipſi numeri multiplices. Cum autem ſecundi reſiduum 130 non adæquet diviſorem ſuum, nec multiplex ſit diviſoris, ſi ab eo detrahatur in hoc caſu diviſor 111, remanet 19 reſiduum diviſionis.

5. Ab eodem principio praxis faciliſſima fluit eruendi diviſionis quotum, & hæc ad oculum ſe offert, ſi ſingulas partes numeri aſſumpti 11111.... dividamus. En diviſionis typus per diviſores 11, 111, 1111.

Pro

	Pro diviſore 11	*Pro diviſore* 111	*Pro diviſore* 1111
1=	1	1	1
10=	10	10	10
100=	9. 1	100	100
1000=	90.10	9. 1	1000
10000=	909. 1	90. 10	9. 1
100000=	9090.10	900.100	90. 10
1000000=	90909. 1	9009. 1	900. 100
10000000=	909090.10	90090. 10	9000.1000
100000000=	9090909. 1	900900.100	90009. 1
1000000000=	90909090.10	9009009. 1	900090. 10
10000000000=	909090909. 1	90090090..10	9000900. 100

Si ergo per ea, quæ diximus n. 2, initio ducto a tertia dextrorſum nota pro diviſore 11, alternatim colligantur numeri dividendi notæ, & aggregatum ducatur in 9, habebimus primam dextrorſum quoti notam; quod ſi ſimiliter ordinatim pro reliquis dividendi notis efficiamus, omnes quoti notas reperiemus. Non alio modo pro diviſoribus aliis 111, 1111 &c. praxis inſtituenda eſt, ſi tantum in colligendis numeri dividendi notis dextrorſum incipiamus a quarta dividendi nota pro diviſore 111, a quinta pro diviſore 1111 &c., & iis utamur alternationibus, quæ prædictis diviſoribus conveniunt, ut ſuperius notavimus.

6. Numerorum proprietates ſubinde nobis ſe produnt, ſi operationes arithmeticas generaliter inſtituamus. Etenim numerorum notæ generaliter deſignatæ relationes, quas inter ſe habent, in veſtibulo veluti exhibent, & proprietates clare oſtendunt. Jamdudum cum in diviſiones numerorum inquirerem, aliæ numerorum per 11, 111, 1111 &c. dividendorum proprietates non inelegantes ſe mihi obtulerunt, quas novas puto, ac a nemine obſervatas. Progreſſum inquiſitionis hic exponere non inutile exiſtimo, ac per eum rem clare oſtendere, quem, ne vobis moleſtus ſim, breviter ac curſim aggredior.

7. Sit pars numeri dividendi $l0000\ldots$ Eam divido per $10+1$, tum per $100+10+1$, tum per $1000+100+10+1$ &c. Diviſio per $10+1$ præbet quotum $l-l\ \ l-l\ \ l-l\ \ l-l$ &c. cum reſiduo $\mp l$. Si ergo numerus dividendus ſit $l\,i\,h\,g\,f\,e\,d\,c\,b\,a$, erunt omnes quoti partes cum reſiduis extenſæ, quemadmodum oſtendunt hæ duæ formulæ, quarum ſecunda eſt prioris inverſa.

$\dot{l}$	i	$\dot{h}$	g	$\dot{f}$	e	$\dot{d}$	c	$\dot{b}$	a
l	$-l$	l	$-l$	l	$-l$	l	$-l$	l.	$-l$
	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$.	i
		h	$-h$	h	$-h$	h	$-h$	h.	$-h$
			g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$.	g
				f	$-f$	f	$-f$	f.	$-f$
					e	$-e$	e	$-e$.	e
						d	$-d$	d.	$-d$
							c	$-c$.	c
								b.	$-b$
									a

$\mathring{l}$	i	$\mathring{h}$	g	$\mathring{f}$	e	$\mathring{d}$	c	$\mathring{b}$	a
l	i	h	g	f	e	d	c	b.	a
	$-l$	$-i$	$-h$	$-g$	$-f$	$-e$	$-d$	$-c$.	$-b$
		l	i	h	g	f	e	d.	c
			$-l$	$-i$	$-h$	$-g$	$-f$	$-e$.	$-d$
				l	i	h	g	f.	e
					$-l$	$-i$	$-h$	$-g$.	$-f$
						l	i	h.	g
							$-l$	$-i$.	$-h$
								l.	i
									$-l$

8. Diviſio numeri $nmlihgfedcba$ per $100 + 10 + 1 = 111$ præbet has duas formulas, quarum ſecunda eſt prioris inverſa.

$\dot{n}$	m	l	$\dot{i}$	h	g	$\dot{f}$	e	d	$\dot{c}$	b	a
n	$-n$	o	n	$-n$	o	n	$-n$	o	n.	$-n$	$-n$
	m	$-m$	o	m	$-m$	o	m	$-m$	o.	m	o
		l	$-l$	o	l	$-l$	o	l	$-l$.	o	l
			i	$-i$	o	i	$-i$	o	i.	$-i$	$-i$
				h	$-h$	o	h	$-h$	o.	h	o
					g	$-g$	o	g	$-g$.	o	g
						f	$-f$	o	f.	$-f$	$-f$
							e	$-e$	o.	e	o
								d	$-d$.	o	d
									c.	$-c$	$-c$
										b	o
											a

ṅ	m	l	i̇	h	g	ḟ	e	d	ċ	b	a
n	m	l	i	h	g	f	e	d	c.	b	a
	−n	−m	−l	−i	−h	−g	−f	−e	−d.	−c	−c
			n	m	l	i	h	g	f.	e	d
				−n	−m	−l	−i	−h	−g.	−f	−f
						n	m	l	i.	h	g
							−n	−m	−l.	−i	−i
									n.	m	l
										−n	−n

9. Ejuſdem numeri *nmlih* &c. diviſio per 1000 + 100 + 10 + 1 = 1111 has exhibet formulas.

ṅ	m	l	i	ḣ	g	f	e	ḋ	c	b	a
n	−n	o	o	n	−n	o	o	n.	−n	−n	−n
	m	−m	o	o	m	−m	o	o.	m	o	o
		l	−l	o	o	l	−l	o.	o	l	o
			i	−i	o	o	i	−i.	o	o	i
				h	−h	o	o	h.	−h	−h	−h
					g	−g	o	o.	g	o	o
						f	−f	o.	o	f	o
							e	−e.	o	o	e
								d.	−d	−d	−d
									c	o	o
										b	o
											a

ṅ	m	l	i	ḣ	g	f	e	ḋ	c	b	a
n	m	l	i	h	g	f	e	d.	c	b	a
	−n	−m	−l	−i	−h	−g	−f	−e.	−d	−d	−d
				n	m	l	i	h.	g	f	e
					−n	−m	−l	−i.	−h	−h	−h
								n.	m	l	i
									−n	−n	−n

Ex his formulis manifeſtus eſt reliquarum progreſſus pro diviſoribus 11111 .... in infinitum.

10. Ex nuda harum formularum inſpectione oculis ſe ſubjicit elegans horum numerorum proprietas. Secemus numeri dividendi notas in ſectiones, initio dextrorſum ſumpto, quarum quælibet tot contineat notas, quot habet diviſor; una ſui nota diminutus; ac ſectiones omnes una dividendi nota intermiſceantur. Proprietas hæc eſt: numeros diviſorum 11,

111,

111, 1111 &c. fore multiplices, ſi ſectionum notæ colligantur, & ab aggregato tollatur notarum interjacentium ſumma ducta in diviſorem nota una diminutum. Reſiduum erit vel 0, vel multiplex poſitivus, vel negativus diviſoris. Quod ſi numerus dividendus non ſit multiplex diviſoris, quod reſiduum eſt, ſi ſit negativum, a proximo majori multiplici diviſoris auferatur, pro aſſequendo vero diviſionis reſiduo. Sint pro exemplo numeri 73486529466, 32149012821l, primus dividendus per 111, ſecundus per 1111.

66		211	
29	$\overline{4+5+4}\,.\,11=143$	012	$\overline{3+9+8}\,.\,111=2220$
86		214	
73			
254		437	
−143		−2220	
111		−1783	
		2222	
		439	

Primus multiplex eſt diviſoris 111, ſecundus non item diviſoris 1111.

Hanc proprietatem pro numeris per 11 diviſibilibus eruit ex ſua ſerie doctiſſimus Pater G. H. Non autem illam enunciavit, ut ab ea tranſitum fieri poſſet ad numeros per 111, 1111 &c. diviſibiles.

Quoto aſſequendo ſuperſedeo, cum ex formulis lex adeo clara ſit, ut ſatis ipſa per ſe loquatur, & doceat nos.

11. Ad aliam, ut puto, novam proprietatem horum numerorum tranſitum facio. Hanc ex transformatione ſuperiorum formularum eruo. Primam partem quoti prioris formulæ num. 7 $l-l$ $l-l$ $l-l$ $l-l$ $l.-l$ divido in has duas partes $lolololol.o$, $lolololo.l$, & hanc poſteriorem demo a priori, & oritur reſiduum $l-1$ $10-l$ $l-1$ $10-l$ $l-1$ $10-l$ $l-1$ $10-l$ $l-1\,.\,11-l$

$$\begin{array}{cccccccccccc} l & o & l & o & l & o & l & o & l & . & o & \\ & l & o & l & o & l & o & l & o & . & l \\ \hline l-1 & 10-l & l-1 & 10-l & l-1 & 10-l & l-1 & 10-l & l-1 & . & 11-l \end{array}$$

quod ſi fiat de aliis ejuſdem formulæ partibus oriuntur hæ duæ aliæ formulæ, quarum ſecunda prioris eſt inverſa.

l	i	h	g	f	e	d	c	b	a
$l-1$	$10-l$	$l-1$	$10-l$	$l-1$	$10-l$	$l-1$	$10-l$	$l-1$	. $11-l$
	$i-1$	$10-i$	$i-1$	$10-i$	$i-1$	$10-i$	$i-1$	$10-i$	. i
		$h-1$	$10-h$	$h-1$	$10-h$	$h-1$	$10-h$	$h-1$	. $11-h$
			$g-1$	$10-g$	$g-1$	$10-g$	$g-1$	$10-g$	. g
				$f-1$	$10-f$	$f-1$	$10-f$	$f-1$	. $11-f$
					$e-1$	$10-e$	$e-1$	$10-e$	. e
						$d-1$	$10-d$	$d-1$	. $11-d$
							$c-1$	$10-c$	. c
								$b-1$	. $11-b$
									a

l	i	h	g	f	e	d	c	b	a
$l-1$	$i-1$	$h-1$	$g-1$	$f-1$	$e-1$	$d-1$	$c-1$	$b-1$	. a
	$10-l$	$10-i$	$10-h$	$10-g$	$10-f$	$10-e$	$10-d$	$10-c$	. $11-b$
		$l-1$	$i-1$	$h-1$	$g-1$	$f-1$	$e-1$	$d-1$	. c
			$10-l$	$10-i$	$10-h$	$10-g$	$10-f$	$10-e$	. $11-d$
				$l-1$	$i-1$	$h-1$	$g-1$	$f-1$	. e
					$10-l$	$10-i$	$10-h$	$10-g$	. $11-f$
						$l-1$	$i-1$	$h-1$	. g
							$10-l$	$10-i$	. $11-h$
								$l-1$	. i
									$11-l$

Formulæ autem numeri 8 novam hanc induunt formam.

n	m	l	i	h	g	f	e	d	c	b	a
$n-1$	$10-n$	0	$n-1$	$10-n$	0	$n-1$	$10-n$	0	$n-1$	. $10-n$	$11-n$
	$m-1$	$10-m$	0	$m-1$	$10-m$	0	$m-1$	$10-m$	0	. m	0
		$l-1$	$10-l$	0	$l-1$	$10-l$	0	$l-1$	$10-l$	. 0	l
			$i-1$	$10-i$	0	$i-1$	$10-i$	0	$i-1$	. $10-i$	$11-i$
				$h-1$	$10-h$	0	$h-1$	$10-h$	0	. h	0
					$g-1$	$10-g$	0	$g-1$	$10-g$	. 0	g
						$f-1$	$10-f$	0	$f-1$	. $10-f$	$11-f$
							$e-1$	$10-e$	0	. e	0
								$d-1$	$10-d$	. 0	d
									$c-1$	. $10-c$	$11-c$
										b	0
											a

n	m	l	i	h	g	f	e	d	c	b	a
$n-1$	$m-1$	$l-1$	$i-1$	$h-1$	$g-1$	$f-1$	$e-1$	$d-1$	$c-1$	. b	a
	$10-n$	$10-m$	$10-l$	$10-i$	$10-h$	$10-g$	$10-f$	$10-e$	$10-d$	. $10-c$	$11-c$
			$n-1$	$m-1$	$l-1$	$i-1$	$h-1$	$g-1$	$f-1$	. e	d
				$10-n$	$10-m$	$10-l$	$10-i$	$10-h$	$10-g$	. $10-f$	$11-f$
						$n-1$	$m-1$	$l-1$	$i-1$	. h	g
							$10-n$	$10-m$	$10-l$	. $10-i$	$11-i$
									$n-1$	. m	l
										$10-n$	$11-n$

Simi-

Similiter illæ numeri 9 in has trasformantur.

n	m	l	i	h	g	f	e	d	c	b	a
$n-1$	$10-n$	0	0	$n-1$	$10-n$	0	0	$n-1$	. $10-n$	$10-n$	$11-n$
	$m-1$	$10-m$	0	0	$m-1$	$10-m$	0	0	. m	0	0
		$l-1$	$10-l$	0	0	$l-1$	$10-l$	0	. 0	l	0
			$i-1$	$10-i$	0	0	$i-1$	$10-i$	. 0	0	i
				$h-1$	$10-h$	0	0	$h-1$	. $10-h$	$10-h$	$11-h$
					$g-1$	$10-g$	0	0	. g	0	0
						$f-1$	$10-f$	0	. 0	f	0
							$e-1$	$10-e$	. 0	0	e
								$d-1$	. $10-d$	$10-d$	$11-d$
									. c	0	0
										b	0
											a

n	m	l	i	h	g	f	e	d	c	b	a
$n-1$	$m-1$	$l-1$	$i-1$	$h-1$	$g-1$	$f-1$	$e-1$	$d-1$	. c	b	a
	$10-n$	$10-m$	$10-l$	$10-i$	$10-h$	$10-g$	$10-f$	$10-e$	. $10-d$	$10-d$	$11-d$
				$n-1$	$m-1$	$l-1$	$i-1$	$h-1$	. g	f	e
					$10-n$	$10-m$	$10-l$	$10-i$	. $10-h$	$10-h$	$11-h$
								$n-1$	. m	l	i
									$10-n$	$10-n$	$11-n$

Ex his formulis apparet aliarum formularum progreſſus pro diviſoribus 11111, 111111 &c. Ab his ergo alia proprietas numerorum, de quibus agimus, fluit, illos ſcilicet omnes eſſe diviſorum 11, 111, 1111 &c. multiplices, ſi, ſectis numerorum dividendorum notis, ut num. 10 tradidimus, ſectionum notæ aggregentur, & aggregato addantur primo differentiæ a numero 11 ſingularum notarum ſectiones diſtinguentium, ac ulterius decuplum differentiarum earumdem notarum a numero 10 ductum in diviſorem duabus notis imminutum. Hoc aggregatum adæquat vel diviſorem, vel multiplex eſt diviſoris. Quod ſi aggregatum hoc multiplex non ſit diviſoris, vel reſiduum erit diviſionis, vel fiet, ſi ab eo proxime major multiplex diviſoris auferatur. Hæc proprietas exemplis eſt illuſtranda.

Sit numerus 8743603 per 11 dividendus.

Aggregatum ex notis ſectionum = 21

Notæ ſingulæ ſectionibus interceptæ ab 11 ablatæ, & in diviſorem duobus notis imminutum, qui propterea hic omnino deficit, ductæ efficiunt = 23

Decuplum differentiarum earumdem notarum a numero 10 hic deficit —

Aggregatum ergo erit = 44

quod

quod cum multiplex ſit diviſoris, multiplex ejuſdem quoque erit numerus propoſitus.

Sit numerus 5815723645 2 per 111 dividendus.

Sectionum notæ in ſummam collectæ =	203
Differentiæ omnes ſingularum notarum inter ſectiones jacentium a numero 11 =	26
Decuplum differentiarum earumdem notarum a numero 10 in diviſorem duobus notis imminutum, nempe in 1 =	230
Erit ergo aggregatum =	459
a quo ſi ſubducas 444 multiplex diviſoris, remanet	444
	15

15 verum diviſionis reſiduum. Numerus ergo propoſitus non eſt multiplex diviſoris.

Sit numerus 487424586 per 1111 dividendus.

Aggregatum ex notis ſectionum =	1332
Differentiæ omnes a numero 11 ſingularum notarum ſectiones diſtinguentium =	10
Decuplum differentiarum earumdem notarum a numero 10, nempe 80 in diviſorem duobus notis imminutum, ſeu in 11 =	880
Erit ergo aggregatum =	2222

quod cum multiplex ſit diviſoris, ejuſdem quoque multiplex erit numerus propoſitus.

Sit demum numerus 7504288276237764 dividendus per 1111111.

Aggregatum ex notis ſectionum =	666666
Omnes differentiæ a numero 11 notarum inter ſectiones jacentium =	16
Decuplum earumdem differentiarum a numero 10 nempe 140 in 11111 ductum =	1555540
Erit ergo aggregatum =	2222222

quod cum multiplex ſit diviſoris, ejuſdem quoque multiplex erit propoſitus numerus.

Ab his, ac ſuperioribus formulis inferri poſſet generalis proprietas numerorum per 11, 111, 1111 &c. diviſibilium primo loco demonſtrata, ut unuſquiſque facile perſpiciet.

12. Quod de numeris numerorum 11, 111, 1111 &c. mul-

multiplicibus demonſtravimus generaliſſime convenire, ac applicari poſſe quibuſcumque numeris numerorum *mm*, *mmm*, *mmmm* &c. multiplicibus ex iis, quæ ſupra tradidimus, demonſtrari poteſt, ſive *m* ſit numerus ſimplex, ſive compoſitus. Etenim numerus quivis numerorum *mm*, *mmm*, *mmmm* &c. multiplex, etiam multiplex eſt reſpective numerorum 11, 111, 1111 &c., ac inſuper numeri *m*; ac propterea eidem proprietates ſupra enunciatas convenire manifeſtum eſt. Pro exemplo ſit numerus 128367393 multiplex numeri 28083 = 111 . *m* = 111 . 253. Erit ergo

Per num. 4	*Per num.* 10	*Per num.* 11
393	93	93
367	67	67
128	28	28
888	188	188
	−77	26
	111	230
		444

Nimis longus eſſem, ſi alias aliorum plurimorum numerorum proprietates perelegantes perſequi vellem. Unuſquiſque ulterius progredi poteſt, ſi vacuum ipſi ſit, ac placeat in his minutiſſimis rebus temporis otium oblectare. Reperiendis per ſuperiores diviſores quantitatum quotis ſuperſedi, cum res hæc adeo ex formulis in aperto ſit, ut nulla opera dignoſcatur; & ſatis habui, ſi quæ expoſui unica ex formularum demonſtratione demonſtrarem &c.

HIE-

HIERONYMI SALADINI MONACHI CÆLESTINI.

Methodus Bernoulliana de reducendis quadraturis tranſcendentibus ad longitudinem curvarum algebraicarum, a quibus inutilis ſæpe redditur, imaginariis quantitatibus liberatur, atque ejuſdem reductionis innumeræ aliæ viæ indigitantur.

§. 1. UTilitatem ſummam pro conſtruendis formulis differentialibus capi ex indeterminatarum ſeparatione unicuique vel leviter in ſublimioris analyſeos doctrina verſato compertum eſt; ſiquidem redactis formulis ad unicam variabilem in promptu eſt methodus exhibendi earum conſtructionem ſuppoſita curvarum algebraicarum vel quadratura, vel rectificatione; quarum prior cum ſit magis obvia præ altera, quippe quia formula quæcumque differentialis unicam variabilem continens ad exprimendum elementum ſpatii curvilinei abſque ullo artificio reducitur, idcirco factum fuit, ut analyſtæ fere omnes, parum ſoliciti de altera, in priorem methodum perficiendam diligentiam omnem poſuerint. Verum enim vero methodus conſtruendi formulas differentiales unicam variabilem continentes per curvarum algebraicarum rectificationem, quamquam exigat induſtriam, & ſagacitatem pro reducenda formula ad expreſſionem elementi arcus curvæ algebraicæ, cujus nota ſit deſcriptio; nihilominus, tali reductione peracta, cum nullo negotio curvarum rectificatio habeatur, filum nempe ipſis curvis circumvolvendo, quod non evenit de quadraturis, quæ praxim longe difficiliorem requirunt; ideo viri in rebus algebraicis eximii hanc methodum haud negligendam, quin potius ſummo ſtudio excolendam optarunt, potiſſimum rati, quod multa ad analyſim infiniteſimorum ſpectantia eſſent ex hoc lucem, & perfectionem acceptura; quapropter ſolutionem problematis celeberrimi deſiderarunt, quo proponitur reducere formulam differen-

ferentialem unicam variabilem continentem, ad aliam formulam, quæ exprimat arcum elementarem curvæ algebraicæ.

§. 2. Primus omnium, (quantum mihi conſtat) qui Mathematicis tale problema enodandum propoſuit, fuit clariſſimus Jacobus Hermannus in Actis Eruditorum Lipſiæ anno 1719; de quo problemate ſententiam ſuam aperit clariſſimus Nicolaus Bernoulli Johannis filius in Actis Eruditorum ſequentis anni:
= Accedo, *inquit*, ad Problema Hermannianum, quo petuntur
= curvæ algebraicæ A, quarum indefinita rectificatio depen-
= deat a quadratura cujuſcumque alterius curvæ B algebrai-
= cæ, quæ tamen habeant tot, quot libuerit arcus particula-
= res abſolute rectificabiles, & independenter a quadratura,
= a qua ipſarum rectificatio dependet. Quod ſi clariſſimus
= Proponens intelligat per curvam B, quamlibet datam al-
= gebraicam .... fatemur libenter ſolutionem problematis non
= eſſe in noſtra poteſtate... Judicamus ab illo multum præ-
= ſtari, qui vel partem tantum hujus problematis ſolveret,
= docendo ſcilicet modum inveniendi curvam algebraicam A,
= a cujus rectificatione indefinita dependeat quadratura inde-
= finita curvæ algebraicæ datæ B... hujus ſolutio ingentem
= haberet utilitatem in conſtructionibus problematum, quæ
= poſt ſeparationem indeterminatarum ad quadraturas redacta
= ſunt. Quæ verba induxerunt clar. Hermannum ad propoſiti problematis ſolutionem exhibendam in Actis Lipſienſibus menſis Aprilis anno 1723, quæ tamen parum arridet Johanni Bernoullio, utpote quia videtur difficilis, & ad uſum parum accommodata. = Recurrere enim, *ait ipſe*, ad evolutarum natu-
= ram, atque auxilium petere ab inclinatione linearum ad ſe
= invicem, mihi videtur via indirecta, & parum naturalis,
= per quam in operoſum adducimur calculum, ut fieri ſolet,
= ſi mere analytica cum geometricis præter neceſſitatem com-
= miſcemus: damnat certe Newtonus in Elem. Alg. pag. 282,
= & 315 tamquam inſigne peccatum contra bonam metho-
= dum conſuetudinem illam geometrarum unum cum altero
= confundentium. Ex quo factum eſt, ut vir ingenioſiſſimus de alia via magis plana, atque ad uſum magis accommodata excogitaverit.

§. 3. Leonhardus Eulerus analyſta noſtri temporis facile princeps Tom. 5 Comm. Academ. Scientiarum Imperialis Petropolitanæ agens de Curvis rectificabilibus algebraicis, & de

Trajectoriis reciprocis algebraicis viam indicat idipſum præſtandi, atque ſimul inveniendi omnes curvas algebraicas poſſibiles problemati inſervientes; at formulæ ſuper omnem credibilitatem prolixæ, & ab uſu valde remotæ, nec non difficultates ſeſe a quantitatibus imaginariis extricandi me induxerunt ad hanc methodum relinquendam, atque ad bernoullianam amplectendam utpote præ cæteris elegantiorem, & magis expeditam; nihilominus, cum & ipſa a quantitatibus imaginariis inutilis ſæpe reddatur, & ejus extenſio intra quoſdam limites reſtringatur; hinc rem haud ſpernendam me facturum eſſe confido, ſi eam ab hiſce defectibus valeam liberare; ad quod præſtandum novam demonſtrationem adducam Theorematis Bernoulliani de reducendis formulis differentialibus unicam variabilem continentibus ad rectificationem curvarum algebraicarum, quod ita a cl. Auctore expoſitum eſt, in Actis Lipſienſibus anno 1724.

§. 4. Deſignante p quantitatem datam utcumque per x & conſtantes, ſi deſcribatur curva coordinatarum $\frac{dx}{dp}.\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}} = y$, & $\frac{dx}{dp}.\overline{p-p^3} - x = u$; arcus hujus curvæ erit $\frac{dx}{dp}.\overline{1-pp} - \int p\,dx = \int\sqrt{du^2+dy^2}$.

§. 5. Ad hoc Theorema demonſtrandum pono $dx = s\,dp$, tum invenio coordinatarum elementa, quæ ſunt, facta ſubſtitutione quantitatis s pro $\frac{dx}{dp}$, $ds.\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}} - 3spdp.\overline{1-pp}^{\frac{1}{2}} = dy$, & $ds.\overline{p-p^3} + sdp - 3sp^2dp - dx = du$. In his pro sdp ſcribo dx, ut perveniant coordinatarum elementa $ds.\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}} - 3pdx.\overline{1-pp}^{\frac{1}{2}} = dy$; & $ds.\overline{p-p^3} - 3p^2dx = du$; Horum quadrata ſunt $ds^2.\overline{1-pp}^3 - 6pdsdx.\overline{1-pp}^2 + 9ppdx^2.\overline{1-pp} = dy^2$, & $ds^2.\overline{p-p^3}^2 - 6pdsdx.\overline{p^2-p^4} + 9p^4dx^2 = du^2$; Accipiatur horum quadratorum ſumma $ds^2.\overline{1-pp}^2 - 6dsdxp.\overline{1-pp} + 9p^2dx^2 = dy^2 + du^2$; Hujus radix quadrata, quæ eſt elementum arcus, erit $ds.\overline{1-pp} - 3pdx = \sqrt{dy^2+du^2}$; Huic addo & demo quantitatem differentialem $sD\,\overline{1-pp}$, ut fiat $ds.\overline{1-pp} + sD$

1 −

$\overline{1-pp} + 2spdp - 3pdx = \sqrt{dy^2 + du^2}$, & pro $2sdp$ ſcribo $2dx$ ut ſit $ds.\overline{1-pp} + sD\,\overline{1-pp} - pdx = \sqrt{dy^2 + du^2}$, æqualis ſcilicet elemento arcus; ergo integrando fiet, vocato curvæ arcu $= L = \int \sqrt{dy^2 + du^2}$, $s.\overline{1-pp} - \int pdx = L$: quod erat demonſtrandum.

§. 6. Advertendum eſt in hoc calculo liberum eſſe coordinatas aſſumptas accipere vel negative, vel poſitive, quia idem quadratum reſultat, quum earum elementa ad ſecundam poteſtatem elata ſimul conjunguntur, ut habeatur $dy^2 + du^2$; ſimiliter dum radix extrahitur incertum eſt utrum elementum $\sqrt{du^2 + dy^2} = dL$ debeat affici ſigno $+$ an ſigno $-$, quod dicendum eſt etiam de arcu L facta integratione; quapropter in ſingulis caſibus opportunum erit præfigere arcui L ſignum ambiguum, tum determinare utrum $+$ an $-$ ſit accipiendum. Advertendum eſt etiam ad conſtantem addendam, vel deducendam ſi opus fuerit, quæ omnia cum aliis integrandi modis ſunt communia.

§. 7. Ut innoteſcat quomodo auxilio hujus Theorematis quantitates differentiales unicam variabilem continentes reducantur ad rectificationem curvarum algebraicarum abs re non erit nonnulla exempla proponere. Formula reducenda ſit $dx.\frac{\sqrt{xx-aa}}{x}$; hæc in Theoremate comparetur cum pdx, ex hac comparatione fiet $p = \frac{\sqrt{xx-aa}}{x}$, & $pp = \frac{xx-aa}{xx}$, & $2pdp = \frac{2aadx}{x^3}$, & $dp = \frac{aadx}{xx\sqrt{xx-aa}}$, & $s = \frac{dx}{dp} = \frac{xx\sqrt{xx-aa}}{aa}$, & $1 - pp = 1 + \frac{aa-xx}{xx} = \frac{aa}{xx}$; adeoque $s.\overline{1-pp} = \sqrt{xx-aa}$; ergo arcus curvæ $= L = s.\overline{1-pp} - \int pdx$ erit æqualis $\sqrt{xx-aa} - \int dx.\frac{\sqrt{xx-aa}}{x}$; coordinatæ vero facta ſubſtitutione erunt $s.\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{x}\sqrt{xx-aa} = y$, & $s.\overline{p-p^3} - x = -\frac{aa}{x} = u$, ex quibus elicitur $yy = \frac{aa}{xx}.\overline{xx-aa}$, & $xx = \frac{a^4}{u^2}$ adeoque $yy = aa - uu$; quæ æquatio eſt ad circulum. Ergo ſi ex quantitate algebraica $\sqrt{xx-aa}$ ſubtrahatur

tur arcus circuli cujus radius eſt a obtinebitur conſtructio formulæ $\int dx . \frac{\sqrt{xx - aa}}{x}$.

§. 8. Ut arcum, quo indigemus, recte determinemus, inveniamus lineam æqualem x: ex puncto B (*Fig.* 1.) agatur tangens circuli BE, & ducatur ſecans CDE; erit $CE = x$, quia CF : CD :: CB : CE, ſeu $u = \frac{aa}{x} : a :: a : CE = x$, & $BE = \sqrt{xx - aa}$: ergo BD erit arcus ille, qui creſcit creſcente x. Hujus autem arcus differentia erit $\frac{a^2 dx}{x\sqrt{xx - aa}}$; ſumo differentiam $\sqrt{xx - aa}$, quæ eſt quantitas conjungenda cum arcu ad inveniendam integrationem propoſitæ formulæ; ea autem erit $\frac{x dx}{\sqrt{x^2 - aa}}$, ex qua differentia arcus eſt detrahenda, ut proveniat formula propoſita; quare habebimus $\int dx \frac{\sqrt{xx - aa}}{x} = \sqrt{xx - aa} - BD$, ſcilicet differentiæ arcus & tangentis.

§. 9. Ope hujus Theorematis Bernoulliani reducitur ad rectificationem curvæ algebraicæ formula logarithmica $\frac{adx}{x}$; nam, facta collatione cum formula $p dx$, provenit $p = \frac{a}{x}$, $dp = \frac{-a dx}{xx}$, & $s = \frac{dx}{dp} = \frac{-xx}{a}$. Præterea $1 - pp = \frac{xx - aa}{xx}$, & $s . \overline{1 - pp} = \frac{-1}{a} . \overline{xx - aa}$. Coordinatæ curvæ, cujus arcus ſumendus eſt, inveniuntur $-\frac{\overline{xx - aa}^{\frac{3}{2}}}{ax}$, & $\frac{-2xx + aa}{x}$, ſive $\frac{\overline{xx - aa}^{\frac{3}{2}}}{ax}$, & $\frac{2xx - aa}{x}$. Ergo ex theoremate erit $\frac{-1}{a} . \overline{xx - aa} \mp L = \int \frac{adx}{x}$.

§. 10. Ut definiam quodnam ſignum ſumere oporteat, accipio duarum coordinatarum differentias, elevo ad quadratum, & ſimul duo quadrata conjungo, & invenio $\frac{4x^4 + 4a^2x^2 + a^4}{a^2x^2} . dx^2 = dL^2$, extracta radice $\frac{2x^2 + a^2}{ax} . dx = dL$, differentio $-\frac{1}{a} . \overline{x^2 - a^2}$, ut habeam $-\frac{2xdx}{a}$, quam addo

addo ſuperiori, ex quo provenit formula propoſita. Ergo vera formula eſt $-\frac{1}{a}.\overline{xx-aa}+L=\int\frac{adx}{x}$, in qua ita accipitur L, ut creſcat creſcente x; etenim ſi $dL=\frac{2x^2+a^2}{ax}$. dx non accipiatur poſitiva, tunc conjuncta cum $-\frac{2xdx}{a}$ differentia ſcilicet quantitatis algebraicæ $-\frac{1}{a}.\overline{xx-aa}$, non reſtitueret formulam $\frac{adx}{x}$: æquatio noſtræ curvæ non niſi prolixo calculo poteſt elici; verum parum ſoliciti eſſe debemus de hac difficultate, dummodo facile ſit deſcribere curvas cum coordinatis x & $y=\frac{\overline{xx-aa}^{\frac{3}{2}}}{ax}$, atque x & $u=\frac{2xx-aa}{x}$ ex quibus, ut conſtat ex elementis algebraicis, habetur curvæ adhibendæ deſcriptio.

§. 11. Exemplum tertium conſtruat formulam $\frac{-a^m du}{\overline{a^{2m}+x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$, facta collatione cum theorematis formula canonica invenio $p=\frac{-a^m}{\overline{a^{2m}+x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$, $1-pp=\frac{x^{2m}}{a^{2m}+x^{2m}}$, $dp=\frac{ma^m x^{2m-1}dx}{\overline{a^{2m}+x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}$. Præterea $s=\frac{dx}{dp}=\frac{\overline{a^{2m}+x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{ma^m x^{2m-1}}$, $s.\overline{1-pp}=x.\frac{\overline{a^{2m}+x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}{ma^m}$. Coordinatæ ejus curvæ, cujus arcus formulam integrat, inveniuntur eſſe $\frac{x^{m+1}}{ma^m}=y$, & $\frac{m+1}{m}x=u$. Hujus curvæ arcus, qui creſcit creſcente x, vocetur L; calculus ipſe docebit formulam hoc modo ſcribendam eſſe $\int\frac{-a^m dx}{\overline{a^{2m}+x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}=x.\frac{\overline{a^{2m}+x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}{ma^m}-L$. Si curvam quæras, quam inventæ coordinatæ ſufficiunt, eleva ad poteſtatem $m+1$ ordinatam $\frac{m+1}{m}x=u$, ut fiat $x^{m+1}=\frac{m^{m+1}}{\overline{m+1}^{m+1}}.u^{m+1}$, & facta ſubſtitu-

tio-

tione in ordinata $\frac{x^{m+1}}{m a^m} = y$ erit $a^m y = \frac{m^m}{\overline{m+1}^{\,m+1}} \cdot u^{m+1}$; quæ æquatio eſt ad infinitas parabolas, & hyperbolas.

§. 12. Quamquam Theorema propoſitum maxima gaudeat utilitate, inutile tamen a quantitatibus imaginariis aliquando redditur, quum ſcilicet eſt $pp > 1$; tunc enim ordinata $s \cdot \overline{1 - pp}^{\frac{3}{2}}$ evadit imaginaria. Ut huic incommodo remedium tutum afferam, ſequentem methodum adhibeo demonſtrando nimirum, quod ſubditur, theorema. Poſita $dx = sdp$ deſcribatur curva coordinatarum $s \cdot \overline{pp - 1}^{\frac{3}{2}} = y$, & $s \cdot \overline{p^3 - p} + x = u$; ajo fore $\sqrt{du^2 - dy^2} = s \cdot \overline{pp - 1} + \int p\,dx$.

§. 13. Hoc Theorema demonſtro eodem modo ac Bernoullianum demonſtravi. Sumantur enim coordinatarum elementa $ds \cdot \overline{pp - 1}^{\frac{3}{2}} + 3spdp \cdot \overline{pp - 1}^{\frac{1}{2}} = dy$, $ds \cdot \overline{p^3 - p} + 3sppdp - sdp + dx = du$. In his ſubſtituo dx pro sdp, ut evadant $ds \cdot \overline{pp - 1}^{\frac{3}{2}} + 3pdx \cdot \overline{pp - 1}^{\frac{1}{2}} = dy$, $ds \cdot \overline{p^3 - p} + 3ppdx = du$. Elevo ad ſecundam poteſtatem $\overline{pp - 1} \cdot \overline{ds \cdot \overline{pp - 1} + 3pdx}^2 = dy^2$, $pp \cdot \overline{ds \cdot \overline{pp - 1} + 3pdx}^2 = du^2$. Quoniam ſemper eſt $pp > pp - 1$, liquet fore ſemper $du^2 > dy^2$; quadratum primum detrahe a ſecundo, ut habeas $\overline{ds \cdot \overline{pp - 1} + 3pdx}^2 = du^2 - dy^2$, & extracta radice quadrata $ds \cdot \overline{pp - 1} + 3pdx = \sqrt{du^2 - dy^2}$. In prima æquationis parte addatur, & dematur $s \cdot D \cdot \overline{pp - 1}$, ut ſit $ds \cdot \overline{pp - 1} + s \cdot D\,\overline{pp - 1} - 2spdp + 3pdx = \sqrt{du^2 - dy^2}$; pro sdp ſubſtitue dx, & invenies $ds \cdot \overline{pp - 1} + s \cdot D\,\overline{pp - 1} + pdx = \sqrt{du^2 - dy^2}$, & facta integratione $s \cdot \overline{pp - 1} + \int pdx = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$. Q. E. D.

§. 14. Hoc primum invento, advoco Theorema Bernoullianum ad inveniendam integrationem formulæ $\sqrt{du^2 - dy^2}$ per rectificationem curvæ algebraicæ. Ut hoc fiat, pono $dy = q\,du$,

ut

ut formula evadat $du.\sqrt{1-qq}$, in qua eſt $qq < 1$, quia $du^2 > dy^2$. Ergo quæ in Theoremate Bernoulliano eſt p, nunc fit $= \sqrt{1-qq}$. Ergo $qq = 1 - pp$, quæ poſitiva eſt, nam ponitur eſſe $pp > 1$, quæ vero in Theoremate Bernoulliano eſt x hic eſt u; quæ vero ibi eſt s, hic vocetur $= z$; quare in eas formulas introductis his valoribus habebis $du = -\frac{zqdq}{\sqrt{1-qq}}$ pro $dx = sdp$; & pro coordinatis curvarum habebis zq^3, $zq^2.\sqrt{1-qq} - u$, & demum pro arcu curvæ habebis $L = zq^2 - \int du\sqrt{1-qq}$, ſive $zq^2 - L = \int du\sqrt{1-qq}$; $= \sqrt{du^2 - dy^2}$, quod numero ſuperiori demonſtravi æquale $s.\overline{pp-1} + \int pdx$; ergo $zq^2 - L = s.\overline{pp-1} + \int pdx$, ſive $\int pdx = zq^2 - s.\overline{pp-1} - L$, quam in hypotheſi $pp > 1$ imaginaria nulla turbare poſſunt. Hoc modo patefactum eſt ſine dubitatione quamlibet formulam differentialem per rectificationem curvæ algebraicæ conſtrui poſſe.

§. 15. Hæc omnia oportet exemplis illuſtrare. Sit primo conſtruenda formula $\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$; Theoremate Bernoulliano uti non licet, quia poſita $\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = p$, fieret $1 - pp = \frac{-a}{x-a}$ quantitas negativa; nam x accipi ſemper debet maior a alioquin formula propoſita eſſet imaginaria. Quare confugiendum eſt ad noſtram methodum; erit itaque $pp - 1 = \frac{a}{x-a}$, &

$$dp = \frac{adx}{2.x^{\frac{1}{2}}.\overline{x-a}^{\frac{3}{2}}}, \ \& \ s = \frac{dx}{dp} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}.\overline{x-a}^{\frac{3}{2}}}{a}. \text{ Ergo } s.\overline{pp-1}$$

$= 2\sqrt{x}.\sqrt{x-a}$. Præterea coordinatæ curvæ adhibendæ inveniuntur eſſe $2\sqrt{ax} = y$, $-x = u$, ſive $x = u$. Ergo ex Theoremate noſtro habebimus $2\sqrt{x}.\sqrt{x-a} + \int \frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = \int \sqrt{du^2 - dy^2}$. Huic radici calculus indicabit ſignum + eſſe apponendum.

§. 16. Jam vero per ea, quæ dicta ſunt numero 14, conſtruamus formulam $\sqrt{du^2 - dy^2}$ rectificato arcu curvæ algebrai-

braicæ: quoniam $u = x$, & $y = 2\sqrt{ax}$, & ſumptis differentiis $du = dx$, $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, formula in ſequentem tranſmutabitur, nempe $dx\sqrt{1 - \frac{a}{x}} = \frac{dx\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}$; ergo $q = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, & $1 - qq = \frac{x-a}{x}$. Ergo $D\sqrt{1-qq} = \frac{a\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}\cdot\overline{x-a}^{\frac{1}{2}}}$, & $z = \frac{du}{D\sqrt{1-qq}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}\cdot\overline{x-a}^{\frac{1}{2}}}{a}$; quantitas curvæ jungenda $= zq^2$ erit æqualis $2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a}$. Coordinatæ curvæ inveniuntur $2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x-a}$, $x - 2a$. Deſcripta hac curva ejus arcus, qui ita accipiendus eſt, ut creſcat creſcente x, vocetur $=$ L ſubſtitutis congruis ſpeciebus in formula $zq^2 - L = \int\sqrt{du^2 - dy^2}$ erit $2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a} - L = \int\sqrt{du^2 - dy^2}$. Quare hoc valore ſubſtituto in formula numeri 15 erit $2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a} + \int\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a} - L$, ſive $\int\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = -L$, ſive $\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = L$, quæ oſtendit formulam integrari per ſolum arcum curvæ algebraicæ ſine ulla additione quantitatis algebraicæ.

§. 17. Determino modo curvam. Primam ordinatam voco $= m$, ſecundam $= n$. Erit ergo $4a\cdot\overline{x-a} = mm$, & $x - a = n + a$; adeoque (*Fig.* 2.) $4a\cdot\overline{n+a} = mm$, quæ eſt ad parabolam apollonianam. Parametro $= 4a$ deſcribatur parabola AFC, cujus abſciſſæ $=$ AE $= a + n$, in qua ſecta AI $= a$, erit IE $= n$, & ordinatæ EF $= m$. Produc EA in D, donec AD $= a$, erunt DE $= n + 2a = x$; quare exiſtentibus DE $= x$ erit AF $= \int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$.

§. 18. Reaſſumo pro ſecundo exemplo formulam logarithmicam $\frac{a\,dx}{x}$ numeri 9, quæ per Bernoullianum Theorema ad integrationem perduci non poteſt, quando eſt $x < a$; nam in hoc caſu $1 - pp = \frac{xx - aa}{xx}$ eſſet quantitas negativa, adeo-

que

que $s.\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}} = y$ eſſet ordinata imaginaria; recurſus igitur habendus erit ad noſtrum Theorema, in quo habetur $pp-1 = \frac{aa-xx}{xx}$ quantitas poſitiva, & $dp = \frac{-adx}{xx}$, $s = \frac{dx}{dp} = \frac{-xx}{a}$, & $s.\overline{pp-1} = \frac{xx-aa}{a}$; coordinatæ vero noſtræ curvæ erunt $s.\overline{pp-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{\overline{aa-xx}^{\frac{3}{2}}}{-ax} = y$, $s.\overline{p^3-p} + x = \frac{2xx-aa}{x} = u$; & $s.\overline{pp-1} + \int\frac{adx}{x} = \sqrt{du^2-dy^2}$ erit $\frac{xx-aa}{x} + \int\frac{adx}{x}$. Quantitati radicali ſignum affirmativum præponere debes, quippe quia ſumptis coordinatarum y, u differentiis, invenies $dy = dx.\frac{2xx+aa}{axx}.\overline{aa-xx}^{\frac{1}{2}}$, & $du = \frac{2xx+aa}{xx}dx$, atque exiſtente $q = \frac{dy}{du}$, facta ſubſtitutione habebis $q = \frac{\overline{aa-xx}^{\frac{1}{2}}}{a}$, & $1-qq = \frac{xx}{aa}$, $\sqrt{1-qq} = \frac{x}{a}$, atque $du\sqrt{1-qq} = \sqrt{du^2-dy^2} = \frac{2xx+aa}{ax}dx$, quod eſt differentiale quantitatis $\frac{xx-aa}{a} + \int\frac{adx}{x}$.

§. 19. Ut pervenias ad optatam conſtructionem calculum ulterius promoveas oportet, inveniendo nempe $D\sqrt{1-qq} = \frac{dx}{a}$, & $z = \frac{du}{D\sqrt{1-qq}} = \frac{2ax^2+a^3}{x^2}$, $zqq = \frac{2ax^2+a^3}{xx}.\frac{aa-xx}{aa}$ quantitatem algebraicam arcui curvæ quæſitæ conjungendam; ex quo fit $\int\frac{adx}{x} = zqq - s.\overline{pp-1} + L = \frac{3xx+aa}{axx}.\overline{aa-xx} + L$; coordinatæ vero curvæ adhibendæ ſunt $zq^3 = \frac{2ax^2+a^3}{x^2}.\frac{\overline{aa-xx}^{\frac{3}{2}}}{a^3}$, & $zqq\sqrt{1-qq} - u = \frac{2a^4-2x^4-a^2x^2}{a^2x}$. Quantitati L ſignum + affiximus; nam ſumptis coordinatarum differentiis $\overline{2a^4+aaxx+6x^4}.\frac{dx\,a\sqrt{aa-xx}}{-a^3x^3}$, & $\overline{2a^4+aaxx+6x^4}.\frac{axdx}{-a^3x^2}$, & ad qua-

dratum elevatis, atque in unam ſummam collectis; extractaque inde radice quadrata exurgit $\frac{2a^4 + a^2x^2 + 6x^4}{ax^3}.dx$ æquale $\frac{adx}{x} - D\frac{3x^2+a^2}{ax^2}.\overline{aa-xx}$; quod indicat ſignum radicis eſſe poſitive accipiendum.

§. 20. Exemplum tertium doceat reducere ad rectificationem curvæ algebraicæ formulam differentialem $dx\frac{\sqrt{aa+xx}}{a}$; facta collatione cum formula generali pdx habebis $p = \frac{\sqrt{aa+xx}}{a}$, adeoque $pp = \frac{aa+xx}{aa}$, & $1-pp = \frac{-xx}{aa}$ quantitatem negativam, & per conſequens ordinatam $s.\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}} = y$ imaginariam; methodo Bernoulliana, tamquam inutili ſepoſita, adhibe noſtram, pro qua invenies $pp-1 = \frac{xx}{aa}$ quantitatem poſitivam, & cum ſit $dp = \frac{xdx}{a\sqrt{aa+xx}}$, atque inde $s = \frac{dx}{dp} = \frac{a\sqrt{aa+xx}}{x}$, reperies $s.\overline{pp-1} = \frac{x}{a}\sqrt{aa+xx}$ quantitatem algebraicam $\int\sqrt{du^2-dy^2}$ jungendam; erit itaque $\frac{x}{a}.\sqrt{aa+xx} + \int\frac{dx\sqrt{aa+xx}}{a} = \int\sqrt{du^2-dy^2}$, ut noſtrum præcipit Theorema; coordinatæ vero curvæ adhibendæ erunt $s.\overline{pp-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{xx}{aa}.\sqrt{aa+xx} = y$, & $s.\overline{p^3-p} + x = \frac{x^3+2a^2x}{a^2} = u$. Si deſideras rationem, qua $\int\sqrt{du^2-dy^2}$ affirmativam accepimus, ſume differentialia coordinatarum y, u; ſcilicet $\frac{xdx}{aa}.\frac{3xx+2aa}{\sqrt{aa+xx}} = dy$, & $\frac{3x^2+2a^2}{a^2}dx = du$, ex quo erues $q = \frac{dy}{du} = \frac{x}{\sqrt{aa+xx}}$, $qq = \frac{xx}{aa+xx}$, & $1-qq = \frac{aa}{aa+xx}$, atque $\sqrt{1-qq} = \frac{a}{\sqrt{aa+xx}}$, cum itaque ſit $du\sqrt{1-qq} = \sqrt{du^2-dy^2}$, ex noſtro Theoremate, erit debita ſubſtitutione peracta $\sqrt{du^2-dy^2} = \frac{3x^2+2a^2}{a\sqrt{aa+xx}}dx = D\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2}}$

$\sqrt{a^2 + xx} + \frac{dx\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ quod demonſtrat $\sqrt{du^2 - dy^2}$ poſitive ſumendam eſſe.

§. 21. Remanet modo pro integratione perficienda conſtruere $\sqrt{du^2 - dy^2}$ per integrationem curvæ algebraicæ; ad hunc finem invenio, ut noſtrum Theorema poſtulat, $D\sqrt{1 - qq} = \frac{-axdx}{\overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}}$, ut eliciam $z = \frac{du}{D\sqrt{1 - qq}} =$
$\frac{\overline{3x^2 + 2a^2} \cdot \overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}}{-a^3 x} dx$, & $zqq = \frac{-x}{a^3} \cdot \overline{3x^2 + 2a^2} \cdot$
$\overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$ quantitatem nempe algebraicam arcui quæſitæ curvæ conjungendam, cujus coordinatas reperies $zq^3 = \frac{-x^2}{a^3} \cdot \overline{3x^2 + 2a^2}$, & $zqq\sqrt{1 - qq} - u = -\frac{4x}{aa} \cdot \overline{x^2 + a^2}$. Ergo ex Theoremate numeri 14 erit $\int \frac{dx\sqrt{aa + xx}}{a} = zqq - 1 :$
$\overline{pp - 1} + L = -\frac{x}{a^3} \cdot \overline{3xx + 2a^2} \cdot \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{a} \cdot$
$\sqrt{aa + xx} + L = -\frac{3x}{a^3} \cdot \overline{xx + aa}^{\frac{3}{2}} + L$ vocato ſcilicet arcu curvæ $= L$, cui apponitur ſignum $+$ calculo indicante; nam ſumptis coordinatarum differentiis $\frac{-4dx}{a^3} \cdot \overline{3x^3 + a^2 x}$, & $-\frac{4dx}{a^3} \cdot \overline{3x^2 a + a^3}$, & ad quadratum elevatis, atque in unam ſummam collectis, extractaque radice quadrata fit $\frac{4dx}{a^3} \cdot \sqrt{\overline{3x^3 + a^2 x}^2 + \overline{3x^2 a + a^3}^2} = \frac{dx\sqrt{aa + xx}}{a} +$
$D\frac{3x}{a^3} \cdot \overline{xx + aa}^{\frac{3}{2}} = \frac{4dx}{a^3} \cdot \sqrt{\overline{3xx + aa}^2 \cdot \overline{aa + xx}}$.

§. 22. Pro ultimo exemplo aſſumo conſtruendam per rectificationem curvæ algebraicæ formulam $\frac{a^m dx}{\overline{a^{2m} - x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$ ex qua provenit $1 - pp = \frac{-x^{2m}}{a^{2m} - x^{2m}}$ quantitas negativa, & ordinata

$s.\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}}$ imaginaria; adeoque methodus Bernoulliana inutilis redditur; facto igitur recurſu ad noſtram, erit $pp-1 = \frac{x^{2m}}{a^{2m}-x^{2m}}$ poſitiva, & $dp = \frac{ma^m x^{2m-1}}{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{3}{2}}} dx$, ex quo eruitur $s = \frac{dx}{dp} = \frac{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{ma^m x^{2m-1}}$, & $s.\overline{pp-1} = x.\frac{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}{ma^m}$, quantitas algebraica jungenda; coordinatæ curvæ adhibendæ ſunt $s.\overline{pp-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{x^{m+1}}{ma^m} = y$, $s.\overline{p^3-p}+x = \frac{m+1}{m}.x = u$. Ergo per noſtrum Theorema erit $x.\frac{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}{ma^m} + \int\frac{a^m dx}{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}} = \int\sqrt{du^2-dy^2}$. Calculus docet ſignum poſitivum quantitati $\int\sqrt{du^2-dy^2}$ eſſe præfigendum; quandoquidem ſumptis coordinatarum y, u differentiis reſultat $\frac{m+1}{ma^m}x^m dx = dy$, & $\frac{m+1}{m}dx = du$. Ergo $\frac{dy}{du} = \frac{x^m}{a^m} = q$, & $1-qq = \frac{a^{2m}-x^{2m}}{a^{2m}}$, ejuſque radix $= \sqrt{1-qq} = \frac{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}{a^m}$. Quoniam vero ex Theoremate noſtro habetur $\sqrt{du^2-dy^2} = du\sqrt{1-qq}$, erit igitur $\sqrt{du^2-dy^2} = \frac{m+1}{ma^m}dx\sqrt{a^{2m}-x^{2m}} = D x.\frac{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}{ma^m} + \frac{a^m dx}{\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$, quod argumento eſt $\sqrt{du^2-dy^2}$ ſignum affirmativum eſſe præponendum.

§. 23. Præterea erit $D\sqrt{1-qq} = \frac{-mx^{2m-1}dx}{a^m.\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$, atque inde $z = \frac{du}{\sqrt{1-qq}} = \frac{m+1}{-m^2x^{2m-1}}.a^m.\overline{a^{2m}-x^{2m}}^{\frac{1}{2}}$, adeoque quantitas algebraica arcui conjungenda $= zqq = \frac{m+1}{-m^2a^m}x.\sqrt{a^{2m}-x^{2m}}$; coordinatæ vero ſunt $zq^3 = \frac{m+1}{-m^2a^{2m}}.x^{m+1}.$

$\sqrt{a}$

$\sqrt{a^{2m} - x^{2m}}$, & $zqq\sqrt{1 - qq} - u = \frac{m+1}{-m^2 a^{2m}}$.
$\overline{a^{2m}x - x^{2m+1} + ma^{2m}x}$; tandem erit $\int \frac{a^m\,dx}{\overline{a^{2m} - x^{2m}}^{\frac{1}{2}}} =$
$zqq - s.\overline{pp - 1} + L = \frac{m+1}{-m^2 a^m}.x\sqrt{a^{2m} - x^{2m}}$
$-\frac{x\sqrt{a^{2m} - x^{2m}}}{m a^m} + L = \frac{2m+1}{-m^2 a^m}x.\overline{a^{2m} - x^{2m}}^{\frac{1}{2}} + L$; arcui L apponitur ſignum +, nam acceptis coordinatarum differentiis $-dx\,\frac{m+1}{m^2 a^{2m}}.\frac{\overline{m+1}.a^{2m}x^m - \overline{2m-1}.x^{3m}}{\overline{a^{2m} - x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$, & $-dx\,\frac{m+1}{m^2 a^{2m}}$.
$\overline{\overline{m+1}.a^{2m} - \overline{2m-1}.x^{2m}}$, & ad quadratum elevatis, atque in unam ſummam collectis, ex qua extracta radice quadrata provenit $\frac{m+1}{m^2 a^m}.\frac{\overline{m+1}.a^{2m} - \overline{2m-1}.x^{2m}}{\overline{a^{2m} - x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}dx$, cui addito
$D - \frac{2m+1}{m^2 a^m}.x.\overline{a^{2m} - x^{2m}}^{\frac{1}{2}}$ reſtituitur formula $\frac{a^m\,dx}{\overline{a^{2m} - x^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$.

§. 24. Quamquam Theorema Bernoullianum, aut ipſum per ſe ſe, aut conjunctum cum artificio a nobis addito, patefaciat nullam eſſe formulam differentialem unicam variabilem continentem, quæ conſtrui non poſſit rectificato arcu curvæ algebraicæ; tamen quia calculus ſæpe evadit maxime implexus, ſæpe deducit ad curvas altiores, quam par eſt, utile eſſe judicavi aliquot Theoremata Bernoulliano ſimilia proponere, & ſimul methodum indicare, qua alia infinita nullo negotio conſtrui poſſint.

§. 25. Sit curva algebraica, cujus coordinatæ ſint $u = sP$, $y = sQ + mx$. P, Q ſunt quantitates variabiles determinandæ per p, & conſtantes, p data ſupponitur utcumque per x, & conſtantes, atque $s = \frac{dx}{dp}$, m eſt coefficiens conſtans determinandus ex arbitratu. Sumantur coordinatarum differentiæ nempe $sdP + Pds$, $Qds + sdQ + mdx$. Ponatur $dP = Mdp$, $dQ = Ndp$, factaqua ſubſtitutione elementa coordinatarum erunt $Pds + Msdp$, $Qds + Nsdp + mdx$; ſed eſt

eſt $s\,dp = dx$; ergo $P\,ds + M\,dx$, $Q\,ds + \overline{N + m}\,dx$ erunt coordinatarum elementa; horum quadrata ſunt $P^2 ds^2 + 2PM\,ds\,dx + M^2 dx^2$, & $Q^2 ds^2 + 2Q.\overline{N + m}\,ds\,dx + \overline{N + m}^2\,dx^2$, quorum quadratorum ſumma hæc proveniet $\overline{P^2 + Q^2}.ds^2 + \overline{PM + Q.\overline{N + m}}.2ds\,dx + \overline{M^2 + \overline{N + m}^2}.dx^2$; radix quadrata hujus ſummæ $= \sqrt{du^2 + dy^2}$ eſt elementum arcus curvæ algebraicæ. Ut autem ex hac ſumma radix quadrata actu extrahi poſſit, oporteret ut $\sqrt{PP + QQ}.\sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2} = PM + Q.\overline{N + m}$; & quadrando $\overline{PP + QQ}.M^2 + \overline{PP + QQ}.\overline{N + m}^2 = P^2M^2 + 2PMQ.\overline{N + m} + QQ.\overline{N + m}^2$; ergo $QQM^2 - 2PMQ.\overline{N + m}$ $PP.\overline{N + m}^2 = 0$; Quoniam autem quantitas hæc eſt quadratum completum, extrahatur ejus radix, ut ſit $QM - P.\overline{N + m} = 0$, ſeu $\frac{N}{Q} + \frac{m}{Q} = \frac{M}{P}$, & ſubſtitutis valoribus M & N erit $\frac{dQ}{Q} + \frac{m\,dp}{Q} = \frac{dP}{P}$. Si ita determines Q per p, ut ſit $\frac{m\,dp}{Q}$ differentiale logarithmicum, palam eſt, integrata ſuperiore æquatione, factoque tranſitu a logarithmis ad numeros, inveniri P datam algebraice per p; datis vero algebraice P, Q per p invenientur etiam M & N.

§. 26. Hoc modo peracta determinatione ſpeciei Q, & vocato curvæ arcu $= L$, extrahatur quantitatis inventæ radix quadrata $ds\sqrt{PP + QQ} + dx\sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2} = dL$; addatur $sD\sqrt{P^2 + Q^2}$, & dematur æquale $\frac{dx\,D\sqrt{P^2 + Q^2}}{dp}$ ut fiat $ds\sqrt{P^2 + Q^2} + sD\sqrt{P^2 + Q^2} - \frac{dx}{dp}D\sqrt{P^2 + Q^2} + dx\sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2} = dL$, quæ integrata exhibet $s\sqrt{P^2 + Q^2} - \int dx.\overline{\frac{D\sqrt{P^2 + Q^2}}{dp} - \sqrt{M^2 + \overline{N + m}^2}} = L$. Ex hac, & ſuperioribus formulis quamplurima Theoremata Bernoulliano ſimilia proficiſcuntur.

§. 27.

§. 27. Sit primo $Q = p$, erit in formula logarithmica numeri ſuperioris $\overline{m+1}\cdot\frac{dp}{p} = \frac{dP}{P}$, & integrando $\overline{m+1}\cdot lp = lP$, factoque tranſitu a logarithmis ad numeros, ponendo cauſſa facilioris calculi protonumerum vel ſubtangentem $= 1$, erit $P = p^{m+1}$. Ergo $M = \frac{dP}{dp} = \overline{m+1}\cdot p^m$, & $N = \frac{dQ}{dp} = 1$, $\sqrt{P^2+Q^2} = p\sqrt{p^{2m}+1}$, & $\frac{D\sqrt{PP+QQ}}{dp} = \sqrt{p^{2m}+1} + \frac{mp^{2m}}{\sqrt{p^{2m}+1}} = \frac{\overline{m+1}\cdot p^{2m}+1}{\sqrt{p^{2m}+1}}$, & $\sqrt{M^2+\overline{N+m}^2} = \overline{m+1}\sqrt{p^{2m}+1}$. Itaque hiſce ſubſtitutis oritur.

§. 28. Theorema: $sp\sqrt{p^{2m}+1} + \int\frac{m\,dx}{\sqrt{p^{2m}+1}} = L$, exiſtente L arcu ejus curvæ, cujus coordinatæ ſunt $s\cdot p^{m+1}$, $sp + mx$.

§. 29. Reducenda ſit per hoc Theorema ad rectificationem curvæ algebraicæ formula $\frac{ma^m\,dx}{\overline{x^{2m}+a^{2m}}^{\frac{1}{2}}}$. Facta comparatione cum $\frac{m\,dx}{\sqrt{p^{2m}+1}}$ invenies $p = \frac{x}{a}$: ergo $dp = \frac{dx}{a}$, & $s = \frac{dx}{dp} = a$. Itaque fiet $\frac{x\sqrt{x^{2m}+a^{2m}}}{a^m} - \int\frac{ma^m\,dx}{\sqrt{x^{2m}+a^{2m}}} = L$. Coordinatæ vero curvæ, cujus arcus L accipiendus eſt, inveniuntur $\frac{x^{m+1}}{a^m} = u$, $\overline{m+1}\cdot x = y$, ex quibus habetur facili negotio æquatio curvæ $y^{m+1} = \overline{m+1}^{\,m+1}\cdot a^m u$, quæ eſt ad infinitas parabolas ſi $m+1$ ſit poſitiva, ad infinitas hyperbolas ſi $m+1$ ſit negativa. Propoſitæ autem formulæ reductio ad arcum curvæ algebraicæ ferme nihil diſtat ab ea, quam deduximus ex Theoremate Bernoulliano numero undecimo.

§. 30. Si poneres $Q = p - p^3$, & $m = -1$ fieret $\frac{dQ}{Q} + \frac{m\,dp}{Q} = \frac{-3p\,dp}{1-pp} = \frac{dP}{P}$; ergo integrando $\frac{3}{2}\,l\,\overline{1-pp} = lP$,

&

& tranſeundo ad numeros $\overline{1-pp}^{\frac{3}{2}} = P$. Præterea $dQ = dp - 3p^2 dp$, $dP = -3pdp . \overline{1-pp}^{\frac{1}{2}}$; ergo $N = \frac{dQ}{dp} = 1 - 3p^2$, $M = \frac{dP}{dp} = -3p . \overline{1-pp}^{\frac{1}{2}}$. Inſuper $\sqrt{P^2 + Q^2} = 1 - p^2$, & $\frac{D\sqrt{P^2+Q^2}}{dp} = -2p$; ſimiliter $\sqrt{M^2 + \overline{N-1}^2} = -3p$: His poſitis naſcitur.

§. 31. Theorema $s . \overline{1-pp} - \int p\,dx = L$, exiſtente L arcu ejus curvæ, cujus coordinatæ ſunt $s . \overline{1-pp}^{\frac{3}{2}}$, $s . \overline{p - p^3} - x$; quod idipſum eſt Bernoullianum Theorema de quo ſupra.

§. 32. Novum Theorema conſtitues, ſi ponas $Q = pp - \frac{mm}{4}$, ex quo habetur $dQ = 2p\,dp$. Ergo $\frac{dQ}{Q} + \frac{m\,dp}{Q} = \frac{2p\,dp}{pp - \frac{mm}{4}} + \frac{m\,dp}{pp - \frac{mm}{4}} = \frac{2\,dp}{p - \frac{m}{2}} = \frac{dP}{P}$; ergo integrando $lP = 2l\,\overline{p - \frac{m}{2}}$, & $P = \overline{p - \frac{m}{2}}^2$; ex his eruitur $N = \frac{dQ}{dp} = 2p$, $M = \frac{dP}{dp} = 2p - m$. Itaque $\sqrt{PP + QQ} =$

$$\sqrt{\overline{p-\frac{m}{2}}^4 + \overline{pp - \frac{mm}{4}}^2} = \overline{p - \frac{m}{2}} \sqrt{\overline{p-\frac{m}{2}}^2 + \overline{p+\frac{m}{2}}^2} =$$

$\overline{p - \frac{m}{2}} \sqrt{2pp + \frac{mm}{2}}$. Ex quibus invenies $\frac{D\sqrt{P^2+Q^2}}{dp} -$

$\sqrt{M^2 + \overline{N+m}^2} = \frac{-m . \overline{p + \frac{m}{2}}}{\sqrt{2pp + \frac{mm}{2}}}$. Ergo proveniet.

§. 33. Theorema $s . \overline{p - \frac{m}{2}} . \sqrt{2pp + \frac{mm}{2}} - \int \frac{-m\,dx . \overline{p + \frac{m}{2}}}{\sqrt{2pp + \frac{mm}{2}}} = L$. exiſtente L arcu curvæ, cujus coordinatæ ſunt $s . \overline{p - \frac{m}{2}}^2$, $s . \overline{pp - \frac{mm}{4}} + mx$.

§. 34.

§. 34. Si eſſet $p = \frac{x}{a}$ haberemus $\int \frac{m\,dx \cdot \overline{x + \frac{ma}{2}}}{\sqrt{2xx + \frac{m^2a^2}{2}}} = L - \frac{\overline{x - \frac{ma}{2}}\,\sqrt{2xx + \frac{m^2a^2}{2}}}{a}$. Coordinatæ autem curvæ, cujus arcus eſt L ſunt $\frac{\overline{x - \frac{ma}{2}}^2}{a} = u$, $\frac{xx - \frac{m^2a^2}{4}}{a} + mx = y$; ergo $x - \frac{ma}{2} = \sqrt{au}$, & $x + \frac{ma}{2} = \sqrt{ay + \frac{m^2a^2}{2}}$. Ergo detracta prima a ſecunda æquatione habetur $ma = \sqrt{ay + \frac{m^2a^2}{2}} - \sqrt{au}$, ſeu $m\sqrt{a} + \sqrt{u} = \sqrt{y + \frac{m^2a}{2}}$, quæ liberata a radicalibus fiet $4m^2au = \overline{y - u - \frac{m^2a}{2}}^2$, quam conſtat eſſe ad parabolam. Igitur propoſita formula dependet a rectificatione parabolæ.

§. 35. Poſtremum Theorema propono faciendo $Q = \frac{pp+1}{p}$; ergo $\frac{dQ}{Q} + \frac{mp\,dp}{pp+1} = \frac{dP}{P}$, & integrando $lQ + \frac{m}{2} \cdot l\overline{pp+1} = lP$, & facto tranſitu ad numeros $\overline{pp+1}^{\frac{m}{2}} \cdot Q = P$, & ſubſtituto valore Q, erit $\frac{\overline{pp+1}^{\frac{m+2}{2}}}{p} = P$. Ex quibus facto opportuno calculo colliges $M = \frac{dP}{dp} = \frac{\overline{pp+1}^{\frac{m}{2}}}{p^2} \cdot \overline{m+1 \cdot pp - 1}$, & $N = \frac{dQ}{dp} = \frac{p^2 - 1}{p^2}$. Præterea $\sqrt{PP + QQ} = \frac{pp+1}{p}\sqrt{\overline{pp+1}^m + 1}$, & $D\sqrt{PP + QQ} = \frac{\overline{m+1} \cdot \overline{pp-1} \cdot \overline{pp+1}^m + pp - 1}{pp\sqrt{\overline{pp+1}^m + 1}} \cdot dp$. Inſuper $\sqrt{M^2 + \overline{N+m}^2}$ =

$$= \frac{\sqrt{\overline{pp+1}^{m} \cdot \overline{\overline{m+1} \cdot pp-1}^{2} + \overline{\overline{m+1} \cdot pp-1}^{2}}}{p^{2}} =$$

$$\frac{\overline{\overline{m+1} \cdot pp-1} \cdot \overline{p^{2}+1}^{m} + \overline{m+1} \cdot pp-1}{pp\sqrt{\overline{pp+1}^{m}+1}}$$. Quapropter naſcitur hoc:

§. 36. Theorema: $s . \frac{pp+1}{p} \sqrt{\overline{p^{2m}+1}^{m}+1} - \int \frac{-m\,dx}{\sqrt{\overline{p^{2}+1}^{m}+1}} = L$, exiſtente L arcu curvæ, cujus coordinatæ ſunt $\frac{s \cdot \overline{pp+1}^{\frac{m+2}{2}}}{p}$, & $s . \frac{pp+1}{p} + mx$.

§. 37. Eadem methodo determinans Q, ut $\frac{m\,dp}{Q}$ ſit quantitas differentialis logarithmica alia Theoremata poteris invenire Bernoulliana ſimilia, quæ ad conſtruendas formulas per curvarum rectificationem ingentem præbebunt utilitatem.

GUS-

Fig. 1.

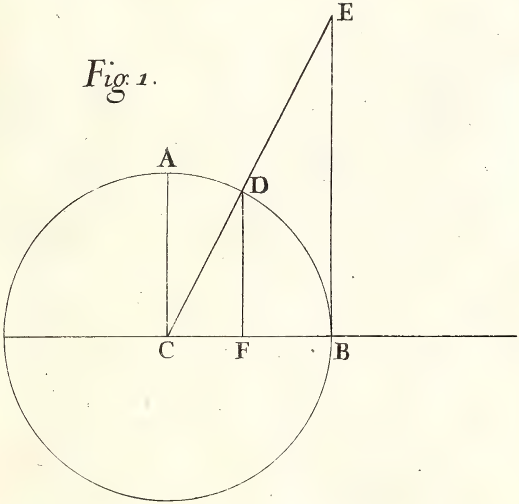
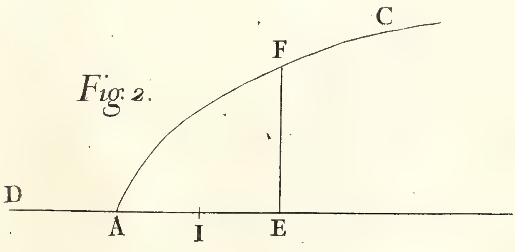


Fig. 2.



[illegible] HISTORY.

GUSMANI GALEATII.

Hiſtoriæ duæ mirabiles calculorum in ureteribus exiſtentium.

QUamquam calculorum in renibus exiſtentium hiſtoriæ frequentes, & copioſæ admodum ſint, & ſymptomata, quæ ab iiſdem in corpore excitantur, adeo manifeſta, ut Medici ſigna, & indicia quædam, quibus hujuſmodi morbi a cæteris diſtinguantur, afferre non dubitent, caſus tamen plurimi adſunt, a quibus aperte docemur, vel calculorum in renibus exiſtentiam per effectus ſuos ſatis cognoſci non poſſe, vel, licet cognoſcatur, de effectibus tamen, qui aut in renibus, aut in aliis abdominis partibus per ipſos produci queunt, certum aliquod judicium proferendum non eſſe. Id certe, ſi non aliunde, ab aſſidua Cadaverum ſectione manifeſte dignoſcitur; in his enim ſæpe reperiuntur ea, quæ nec morbi, nec ſymptomatum, quæ per ipſum excitantur, diligens, & attenta obſervatio ſatis oſtendere valuit; ut propterea Medici cautiores eſſe debeant in curandis hujuſmodi morbis, aut in eorum eventibus prænunciandis, cum juxta cauſarum varietatem diverſi admodum, & incerti eſſe queant. Prædicti aſſerti veritatem comprobare videntur, tum ea, quæ de alterata renum ſtructura alias vobis attuli, tum quæ de peculiaribus renalium calculorum effectibus in præſenti vobis exponam. Sicuti enim in primis nephriticos dolores, & alia plura ſymptomata, quæ calculorum in renibus exiſtentiam indicare videbantur, a ſola vitiata renum compage ortum ſuum habuiſſe compertum eſt, ita in ſecundis tumores, & abſceſſus, qui a renalibus calculis nunquam oriri poſſe credebantur, ab iiſdem revera productos eſſe oſtendam.

Sexagenarius itaque Homo temperamento ſanguineobilioſo, & pinguiore corporis habitu præditus, cum anteactis ſuæ virilitatis annis nephriticis doloribus modo ad dextrum, modo ad ſiniſtrum dorſi latus frequenter obnoxius fuerit, quibus

poſt variæ magnitudinis calculos, non ſine diuturnis cruciatibus, emittere ſolebat, poſtquam inquietam, & laboribus deditam in ſedentariam, & quietam vitam mutare cœpit, atque a vino, cui admodum indulgere ſolebat, aliquantulum abſtinere, loco ipſius aquam, ex roſarum ſylveſtrium fructuum decoctu paratam, ſæpe bibens, quindecim, aut ſexdecim ante ejus obitum annis; nullum amplius calculum, ſed tenuvia tantum arenæ granula per urinam ejecit, licet adhuc nephriticis doloribus interdum adeo acutis corriperetur, ut ad eos minuendos ad repetitas ſanguinis miſſiones, ad balnea emollientia, & ad efficaciora alia remedia ſæpe recurrere oporteret: dolores enim ſic interdum protrahebantur, ut & febres acutæ, & urinarum ſuppreſſio, & pejora alia ſymptomata ſupervenirent, quæ Medicis inflammationis metum interdum incutere videbantur. Imo ſi alius quipiam morbus Ægrum invaderet, nempe febris aliqua lenta, & intermittens (hujuſmodi enim febribus fere quotanis obnoxius erat) raro ab ipſis liberari ſolebat, quin ad renes dolorem aliquem perſentiret, præſertim vero ad ſiniſtrum, in quo, etiam dum bene valebat, obtuſiore quodam dolore plerumque afficiebatur, qui in violentioribus motibus adeo exaſperabatur, ut ultimis ſuæ ætatis annis equitare amplius non poſſet; hinc non præter rationem ſuſpicatum fuit in ſiniſtro rene calculum aliquem craſſiorem latitare, qui, uretheris principium obturando, impedimento eſſet, ne in nephriticis inſultibus calculi alii minores per urinam, ut ſolebat, expellerentur.

Circa æſtatis finem notabiliori quadam febre, ex illarum tamen genere, a quibus antea affici ſolebat, vexari cœpit, quæ initio tertianæ duplicis intermittentis Typum ſervabat, cujus periodi ut plurimum ad occaſum Solis quotidie manifeſtabantur; eoque ordine, ut alternatim unus altero major eſſet; omnes vero non ita primis diebus graves erant, quin e lecto ſurgere, & libere incedere aliquantiſper poſſet; ſed poſt octo, aut decem dies moleſtiores, & graviores facti ſunt, ut in febris augmento, calorem urentem in cute, gravedinem ſummam in capite, laſſitudinem in muſculis, ſitim non modicam, inquietudines, & vigilias plurimas Æger quotidie pateretur, quibus allevandis non ſemel ſanguinem mittere oportuit. A repetitis ſanguinis miſſionibus, a recto vitæ, & victus regimine, & a leniorum purgantium, aliorumque al-

te-

terantium remediorum uſu febriles paroxiſmi minores facti fuerunt, & mitiora etiam ſymptomata eoſdem comitabantur; ſed memorati periodi, qui alternis diebus exacerbabantur, nunquam omnino auferri potuerunt, ideoque, elapſis 20 circiter diebus a primo febris acceſſu, opportunum duximus ad peruvianum corticem, qui in ſimilibus caſibus magno ipſi fuerat levamento, iterum recurrere, exhibitoque ad plures dies hujuſmodi cortice, tota fere evanuit febris, nihilo ipſius remanente, quam aliqua membrorum laſſitudine, moleſto capitis ligamine, & gravi lumborum dolore horis præſertim, queis antea febris exacerbari conſueverat; imo, evaneſcentibus febrilibus paroxiſmis, dolor hic lumborum præſertim ad ſiniſtrum latus ſenſibilior factus eſt. Urinæ autem, quæ in febrium principio paucæ admodum, & rubræ eſſe ſolebant, poſt peruviani corticis, & largiorum potionum uſum, copioſiores, & albidiores factæ fuerunt, turbidæ tamen valde, & confuſæ apparebant, & ſolum poſt longiorem in vitris moram claritatem aliquam acquirebant; depoſita ſcilicet ad fundum vaſis denſiore, & inſtar puris albicante quadam materia, cujus partes non ſimul unitæ, & conglutinatæ apparebant, ſed ad leviorem vaſorum concuſſionem divulſæ, & in tot veluti parvula filamenta diviſæ. A majore, aut minore hujuſmodi materiæ copia majus, aut minus Ægri levamentum pendere videbatur; decreſcentibus ſemper, aut remittentibus febrili calore, lumborum dolore, & quibuſcumque aliis ſymptomatibus, quæ ipſum vexare ſolebant, quotieſcumque major prædictæ materiæ quantitas in urinis reperiebatur; imo ſi hæc omnino deficeret, atque urinæ iterum fierent rubicundæ, non multo poſt recurrere obſervabantur febriles paroxiſmi, & ſiniſtri lateris dolores, quibus minuendis opus fuit menſem etiam poſt primum morbum, ſanguinis miſſionem aliquoties repetere.

Quamvis autem urinarum copia, & materiæ purulentæ quantitas, quam cum illis emittebat, ad allevandas febres, & ſymptomata, quæ ipſas comitabantur, multum tribuerit, hæ tamen nunquam eum liberare valuerunt a tenſivo, atque interdum punctorio ſiniſtri lateris dolore, propter quem difficulter admodum in eo decumbere poterat, neque a pleriſque aliis ſimilibus doloribus, qui a dicta parte ad inguen, atque etiam ad urinariæ veſicæ regionem extendi ſolebant,

ure-

uretheris directionem quodammodo ſervantes. Quin immo, poſtquam hujuſmodi urinæ apparuerunt, extabeſcere, & viribus debilitari cœpit Æger, atque unius, & ultra, menſis ſpatio, in quo urinæ dictæ perdurarunt, adeo crevit macies, ut vix in corporis ambitu veſtigium ullum eſſet illius pinguedinis, quæ antea in eo valde abundare ſolebat; & creſcente macie augebantur etiam in eo dolores dorſi, aliarumque partium cum ipſo connexarum, propter quos incommode in lecto decumbere poterat; præſertim ab ortu ſolis uſque ad mediam noctem, quibus horis a parvis quibuſdam internis rigoribus, qui illum in primis vexabant, a carnium calore, qui poſtea ſequebatur, & a majori aliqua pulſus frequentia inditium non obſcurum habebatur lentioris, & periodicæ cujuſdam febris adhuc perdurantis.

Medicis hæc omnia obſervantibus non levis ſuſpicio orta eſt, ſiniſtri ſaltem renis ſubſtantiam paulatim diſſolvi, ideoque dorſalem tabem, quæ remediis curari non poſſet, jam jam imminere timentes, modo lactis uſu, modo ranarum juſculo, chinæ dulcis, & ſalſæ radicibus alterato, modo viperatis remediis, modo denique ſimplicibus abſorbentibus, & dulcificantibus, cum vulnerariis, & corroborantibus conjunctis, hujuſmodi morbi progreſſum impedire curarunt; ſed ab his omnibus hiemalibus, & vernis menſibus uſurpatis, nihil aliud, quam præcipitii prolatio, obtineri potuit. Enim vero circa veris initium minui cœperunt urinæ, & paulo poſt materia illa albicans, ac purulenta, quæ in ipſis innatare ſolebat, omnino evanuit; & quanquam a tali urinarum imminutione, & puris ceſſatione ſperari poſſe videbatur, inchoatam ſolidarum partium diſſolutionem aliquantulum retardari, in reliquis tamen nullum fere ſolamen invenit Æger; immo, præter memorata incommoda, dolorem quendam punctorium, & moleſtum ad pubis regionem, & ad ſiniſtrum hipogaſtrium perſentire cœpit, cui minuendo parum, vel nihil juvare potuerunt unctiones, & balnea, quæ aſſidue uſurpari ſolebant.

Non multo poſt ultimi hujuſce doloris adventum obſervatum eſt, prædictas partes paulatim elevari, atque in iis parvos, & inæquales tumores, duros tamen, & veluti ſtrumoſos, apparere, quorum ad tactum nullo, aut vix ſenſibili dolore afficiebatur Æger. Judicantes autem quod, ſi ad maturi-

turitatem ducerentur tumores iſti, & ſi aliqua ex iis materia educeretur, non parvum ſolamen perciperet in incommodis aliis, quæ ipſum cruciabant, opportunum duximus, poſt unctiones inutiliter peractas, emplaſtra emollientia, & reſolventia iiſdem apponere, quæ ad plures dies applicita nihil, aut parum admodum juvarunt ad eos reſolvendos, aut emolliendos, ſolumque ex ipſis obtineri potuit, ut illa tumorum pars, quæ magis ſuperficialis, & cutanea videbatur, quæque ſiniſtro inguini propior erat, aliquanto mollior, & acuminata evaderet, ita ut apta fieret, quod Lanceola perforaretur. Minima tamen puris quantitas, una cum aliquibus ſanguinis guttis, ex aperto foramine exiit, remanente reliqua tumoris mole, quæ, quatuor circiter tranſverſos digitos lata, ad longitudinem fere unius palmi verſus pubem extendebatur, omnino turgida, & dura. Intra foramen introducta turunda apertum ejuſdem ope illud ſervare curavimus; ſed non multo poſt, ob doloris acutiem, ipſam extrahere oportuit, ut quietem, & ſomnum ob dolorem amiſſos recuperare poſſet. Extracta tamen turunda purulentus aliquis ichor adhuc e vulnere exibat, qui, appoſito cerato ex gummis confecto, ita abunde in dies effluere cœpit, ut linteis, aut faſciis, quibus obtegebatur, totus abſorberi non poſſet. Fecit autem hujuſmodi ichoris exitus, ut non multos poſt dies tumor omnis evaneſceret, apparente tantum in hyppogaſtrio ſiniſtro parvo illo foramine, quod, ablata turunda, ibidem remanſerat.

Verum, diſſipatis tumoribus, prædictæ materiæ e foramine exitus adhuc perduravit, eaque copia, ut plurima lintea parti aſſidue appoſita ad illam colligendam, aut coercendam non ſufficerent.

Menſem circiter poſt hunc copioſiorem materiæ effluxum valde melius ſe habere cœpit Æger, evaneſcente omnino febrili illo calore, qui nocturnis præſertim horis ipſum agitare ſolebat, & imminutis etiam ſiniſtri lateris, & pubis doloribus. Nutriri quoque, & quieſcere melius potuit, ita ut, creſcentibus viribus, e lecto ſurgeret, & aliquantulum ambularet; erectus tamen incedere, & ſiniſtrum femur extendere non valebat, ſed ſupra ipſum, dum moveretur, valde curvari cogebatur. Spectabilis hæc morbi in melius mutatio adeo illius animum erexit, ut non ſolum magnam diei partem lecto abſtinere, ſed etiam urbanum aerem in ruralem mutare ſe

poſſe

poſſe crediderit; præſertim cum, antequam ægrotaret, ruri diutius vivere conſueverit. Illuc igitur translatus quotidie magis convaleſcere cœpit, priſtinas vires, & naturalem ſuam pinguedinem paulatim recuperans; ita ut, ſi non pedibus, aut equo, curru ſaltem iter ingredi, & domeſticis rebus, in quibus aſſidue occupari ſolebat, facile iterum incumbere poſſet. Obſtabat autem, ne pedibus libere adhuc incederet, materiæ e memorato foramine jugiter effluentis exitus, & copia; hinc timens, ne copioſior ejuſdem materiæ effluxus, & ipſa ulceris exiſtentia, unicum eſſent impedimentum, propter quod ſalutem, & vires omnino acquirere non poſſet, æſtatis initio iterum Bononiam rediit conſulturus Medicos, num remedium aliquod eſſet, quo, foramine clauſo, prædictæ materiæ exitus plane ſiſteretur. Explorato igitur attente a Medicis ulcere, inventum eſt, illud eſſe ſinuoſæ fiſtulæ ſpeciem, ad quam ſanandam, atque claudendam via alia non foret, quam major apertio, & dilatatio ſinus: dilatato enim, & expurgato ſinu, abſumptiſque calloſis, ſi quæ eſſent, omnibus illius partibus, facilius eſſe putabant ipſum prorſus occludere. Æger tamen cum neque vellet, neque tunc poſſet talem curationem admittere, ad rus denuo ſe contulit, ibique conſtitit uſque ad auguſti finem abſque ulla notabili mutatione, quamvis, ſtimulante fame, magis adhuc, quam ante deſcriptum morbum, cibo, & potui indulgeret, nihil de recta, aut prava eorum qualitate, & quantitate ſolicitus.

Verum circa Septembris initium lentiore iterum febre correptus utrinque ad lumborum regionem dolere cœpit, atque univerſali quadam moleſtia, & laſſitudine conqueri; hinc lectum primum petere, deinde in Urbem transferri, & Medicorum opem rurſus quærere coactus fuit. Vix in Urbem translato dextri lateris dolor, ùna cum febri, adeo crevit, ut & ſanguinem mittere, & dulcium amygdalarum olei uſum ſæpe illi præſcribere opus fuerit. Exterius quoque unctiones, & emollientia balnea aſſidue adhibita fuerunt; ſed hæc omnia nullum, aut modicum levamen eidem attulerunt; imo nephriticis doloribus adjunctus eſt vomitus, urinarum diminutio, & rubedo; nulla ciborum appetentia, & aſſidua fere ad ſomnum propenſio, quæ ſymptomata, in toto ſupra deſcripti morbi decurſu, parum, aut nihil ipſum vexaverant. Triginta & ultra dies in hoc ſtatu perduravit Æger, donec creſcente

fe-

febri, urinis fere omnino ceſſantibus, & decreſcentibus notabiliter viribus, ſomno in lethargum mutato, circa Octobris dimidium, appoplexia correptus, mortem objit.

Sequenti die Cadaveris ſectio inſtituta fuit, & relicto capite, in quo licet præcipuam mortis cauſam exiſtere putaremus, nihil tamen in eo reperiri poſſe credebamus, quod ab infimi ventris morbo productum non foret, ad hunc ipſum ventrem obſervationes, & diligentias omnes noſtras potiſſime contulimus; neglecto etiam thorace, in quo nihil ſpectabile inventum fuit præter parvam ſanguinis copiam in poſteriore pulmonum parte ſtagnantem. Aperto igitur abdomine, id quod oculis noſtris primo ſe ſe obtulit obſervandum, fuerunt inteſtina, quæ licet, non minus ac meſenterium, & tota cutis, pinguedine multum obſita forent, in tenui tamen eorum parte livida admodum, & atra flavedine tincta apparebant. Ventriculus autem, & inteſtina craſſa conſiſtentia, & colore vix a naturali ſtatu diſtabant, & naturalis quoque erat hepatis, & pancreatis ſubſtantia; non ſic vero lienis, qui flacidior admodum, & quaſi tabidus videbatur. Sed quæ magis a nobis perveſtiganda, & perſcrutanda eſſe putavimus, fuerunt organa urinaria, ut pote in quibus præcipuam deſcriptorum omnium ſymptomatum ſedem ſitam eſſe judicavimus. Sejunctis itaque, & ablatis ex abdominis cavo viſceribus omnibus, præter renes, & veſicam urinariam, ad renes ipſos oculos convertimus. Erat ergo ren dexter, qui ſupra lumbos præ altero multum eminebat, tumidus admodum, & levi aliqua inflammatione correptus: proveniebat autem intumeſcentia hæc ab urina non ſolum intra pelvim, ſed in canaliculis etiam, & in tota renis ſubſtantia ſtagnante: ſtagnabat vero urina ipſa in rene propter calculum ureteris cavum occludentem; invenimus enim, ad diſtantiam duorum circiter tranſverſorum digitorum a pelvi, inſignem calculum ex plurium minimorum calculorum congerie conflatum; ureteris vero partem illam, quæ inter calculum, & renem exiſtebat, ab urina in ipſa ſtagnante ita diſtentam, ut minimi digiti craſſitudinem æquaret.

A dextro rene ad ſiniſtrum tranſitum fecimus, ipſumque omnino vitioſum invenimus; tota enim ejus corticalis, & medullaris ſubſtantia in denſiorem, & craſſiorem, albidioremque membranam tendineæ fere conſiſtentiæ mutata videbatur;

hæcque parvum quemdam ſacculum efformabat purulento humore, & pluribus arenæ granulis plenum. Manibus autem hunc ſacculum contrectantes non ſine admiratione vidimus, ex fiſtuloſo illo foramine in ſiniſtro hypogaſtrio adhuc aperto, per quod novem & ultra menſium ſpatio ſanioſa materia aſſidue effluxerat, aliquam hujuſmodi materiæ portionem ſubſultim exire. Hinc rei novitate commoti illico oculos ad veſicam urinariam obſervandam convertimus, apertoque ejuſdem cavo in ea ſiniſtri ureteris portione, quæ intra veſicæ membranas ingreditur, prope veſicam ipſam craſſiorem quemdam calculum forma, & magnitudine amygdalam fere æquantem inhæreſcere vidimus, eodemque ex uretere in veſicam cujuſcumque materiæ tranſitum omnino impediri; ureteris vero partem illam, quæ ſupra calculum exiſtebat, ad trium circiter digitorum tranſverſorum longitudinem reſtrictam admodum, & fere occluſam obſervavimus; hæc autem pars, dum eam ab involvente peritonæo ſeparare voluimus, facile diſrupta, & diſiuncta fuit a reliqua ſuperiore ureteris portione, quæ ſupra muſculum pſoas ad ſiniſtrum renem aſcendebat. Portio iſta ſubſtantiæ admodum denſæ, & fere tendineæ apparuit, atque non multum diſſimilis ab illa, quam in rene ipſo adeſſe diximus. Eo in loco, ubi prædictæ duæ ureteris portiones diſruptæ, & diſiunctæ fuerant, emanare cœperunt nonnullæ ſanioſæ cujuſdam materiæ guttulæ, quibus attente exploratis, materiam hanc ejuſdem naturæ eſſe vidimus, ac illa, quæ integro adhuc uretere, dum ſiniſter ren manibus premebatur, ex memorato hypogaſtrii foramine exilibat. Hinc ab hujuſmodi eventu edocti, & ab eo quod, introducto intra foramen ipſum recurvo quodam ferreo ſtylo, illum intra membranas ſiniſtram pelvis partem inveſtientes uſque ad prædictam ureteris rupturam facile ducebamus, aperte cognovimus, renis ſaniem, quam Æger dum vixerat ad aliquot annos per urinam jugiter emittere ſolitus fuerat, inferiore ureteris parte a prædicto calculo occluſa, viam ſibi inter peritonæi membranas ad ſiniſtram hypogaſtrii regionem feciſſe, ibique inter peritonæum, & inferiores abdominis muſculos depoſitam, tumores in prædicta regione deſcriptos efformaſſe; quibus perforatis, & apertis, reſeratoque hujuſmodi perforationis ope ſtagnantis intra eos materiæ exitu, ſemita quædam facta eſt, per quam, tanquam per ſinuoſam fiſtulam, facile exi-

exibat urinoſa ſiniſtri renis ſanies, quæ, impediente calculo, intra veſicam ingredi amplius non poterat. Hoc itaque cognito manifeſte perſpeximus, externam illam partis læſionem, quam, tanquam morboſam, & ſummopere nocuam, curare tentabamus, viam quamdam fuiſſe, per quam vitam Ægro, ſalutemque ad novem & ultra menſes natura ſervaverat; hinc, ſi obſtructo dextri renis uretere ab altero calculo urinæ exitus alia ex parte impeditus non fuiſſet, novo hoc & inſueto tramite, per quem puris exitum natura ipſa paraverat, aperto manente, omnino verendum non eſſet, quin vitam Æger incolumem ad aliquot etiam annos producere non potuiſſet.

Non ita porro incolumem, & longam vitam perducere potuit nobilis quidam Vir, cui, obſtructo uretere a craſſiore calculo eo in loco, ubi veſicam ingreditur, urinæ, & puris intra ipſam introitus impeditus omnino fuit. Laboraverat hic ad plures annos nephriticis doloribus acutiſſimis, quibus plerumque alicujus calculi expulſio ſequebatur; eoque tempore, quo calculi extrudebantur, vix quidquam ſanguinis per urinam ejici viſum eſt; ſed decem circiter annos ante ejus obitum, quamquam nephriticis doloribus adhuc ſæpe vexaretur, nullum tamen calculum emittere amplius potuit, bene vero ſanguinis multum, qui ut plurimum cum urina, vel etiam ſolus effundebatur tunc, cum vel pedibus, vel etiam rheda longum aliquod iter ingreſſus fuerit, vel cum diureticum quodpiam remedium aſſumpſerit; propterea ab omni violentiori motu, & a fortioribus quibuſcumque remediis abſtineri oportebat, atque ſolis emollientibus, paregoricis, & corroborantibus uti, vel ad dolores in eo ſedandos, vel ad ſanguinis effuſiones impediendas, aut ſiſtendas. Ceſſarunt tamen ultimis duobus annis prædictæ ſanguinis effuſiones, & nephritici etiam dolores admodum imminuti fuerunt, remanente tantum ad ſiniſtri renis regionem obtuſioris cujuſdam doloris ſenſu, præſertim dum aliquantulum defatigaretur. Pro ſanguine autem jugiter emittere cœpit magnam ſanioſæ materiæ copiam urinæ mixtam, quæ, dum in fundis vaſorum ſubſidebat, verum, purumque pus eſſe noſcebatur. Toto eo tempore, quo hujuſmodi materia per urinam effluxit, vitam ſatis quietam, & incolumem duxit Æger; ſed ceſſato, neſcio quo caſu, ejuſdem effluxu, clarioreque reddita urina ipſa, paulatim tabeſcere cœpit, & lenta quadam febricula laborare, ita

ut lectum petere, & medicam opem expoſcere coactus fuerit. Febris in dies adeo crevit, & ſiniſtri lateris dolor, ut vix in lecto quieſcere, & ſomnum, aut cibum capere amplius poſſet, irritis etiam vomendi conatibus ſæpe agitatus. Nihil repetita ſanguinis miſſio, nihil emollientia, & paregorica remedia una cum febrifugis aſſidue uſurpata prodeſſe viſa ſunt, ſed creſcentibus omnibus, & deficientibus quotidie viribus, poſtquam triginta, & ultra dies inter dolores, & anguſtias laborioſam vitam protraxerit, de repente læthali ſyncope correptus, magnam ſanioſi ſeri copiam per vomitum ejiciens, illico expiravit.

Subitaneæ, & inexpectatæ mortis eventum admirati, occultam adhuc illius cauſam in ipſo cadavere inquirere neceſſarium duximus. Hinc die altera cadaveris ſectio inſtituta fuit, & aperto abdomine, in quo tantum primariam, & conſtantem deſcripti morbi ſedem exiſtere putabamus, ſtatim ſe ſe obtulit ad ſiniſtrum dorſi latus inſignis quidam membranaceus ſacculus contento intra ſe humore admodum turgidus, non in ſola naturali renis regione reſtrictus, ſed ſupra vertebras, & anterius expanſus, quem etſi a ſitu, & a vaſorum conjunctione renem eſſe cognovimus, naturalem tamen renis molem ſexies ſaltem ſuperare vidimus; eratque ejus figura, & magnitudo potius urinariæ veſicæ, dum lotio turget, quam reni ſimilis; ex inferiore autem, & interiore ejus parte prodibat amplus quidam, & pellucidus canalis, humore quoque turgidus, qui deorſum uſque ad urinariam veſicam extenſus, prope ipſam terminari videbatur. Hic pariter, quamvis neque forma, neque craſſitudine ureteri ſimilis videretur (erat enim pollice craſſior, & ex parietibus ita tenuibus conflatus, ut humor in eo contentus exterius appareret) a directione tamen, & a partium connexione ureterem illum eſſe cognovimus. Hinc aperto ſacculo, & canali iſto, effluere vidimus magnam ſanioſi ſeri copiam, quam oculorum judicio aliquot librarum pondus æquare credidimus; ſacculi vero parietes ab incluſo intus humore probe expurgati omnino membranacei videbantur, ut nihil renalis ſubſtantiæ amplius appareret, quam externus cortex in craſſiorem, & denſiorem, albidioremque membranam mutatus; membrana tamen hæc vaſculis plurimis, & nonnullis fortaſſe glandulis adhuc ſcatebat, quibus & lotium, & pus, unde ſacculum hunc turgere diximus, aſſidue ſeparaban-

bantur, quæque dum ureteris in veſicam aditus adhuc liber erat, quotidie excernebantur: obſtructo enim uretere a ſupramemorato calculo in ejus extrema parte inhærente, & lotium, & pus in rene ſtagnaſſe oportuit, reniſque, & ureteris ſubſtantiam labefactari adhuc magis, & diſtendi, ſic ut ad illam, quam deſcripſimus, ſubſtantiam, & molem mutati, & adaucti fuerint. Erat autem calculus in uretere contentus admodum durus, & aſper, atque amygdalæ magnitudinem ſuperans in tres proceſſus, ſive cuſpides extendebatur, quorum longiore, & acutiore eam ureteris partem, quæ intra urinariæ veſicæ membranas ingreditur, exacte occludebat.

Ex allatis itaque hiſtoriis quanquam facile cognoſcitur id quod ab initio dicebam, calculorum videlicet in renibus exiſtentium effectus adeo interdum pernicioſos eſſe, ut nec eos curare, nec ipſorum exitum prævidere ſæpe Medici valeant, aliqua tamen ex iis inferri poſſe videntur, quæ ſi non ad morbi curationem, ad diagnoſim ſaltem, & rationabilem morbi prognoſim ſtatuendam admodum conferant. Primo ſcilicet calculorum in renibus exiſtentiam modo a nephriticis doloribus, modo a ſanguine per urinam erumpente, modo ab utriſque poſſe deduci; ultimum autem ex his calculi in renibus latitantis certum quodammodo inditium eſſe; deinde a calculis ipſis, ſi craſſiores adeo ſint, ut ureteres, aut urinariam veſicam ingredi nequeant, ita renum ſtructuram plerumque labefactari, ut non amplius ſanguinis ex diſruptis ipſorum ſanguiferis vaſis, ſed ſanies, vel pus, una cum urina, ex mutata ipſorum ſubſtantia ſeparetur; ſanies vero hæc, aut pus, ſi libere poſſit in veſicam ingredi, & cum lotio emitti, Ægros vitam adhuc incolumem ad aliquod tempus protrahere poſſe, ceſſantibus etiam doloribus illis acutioribus, quibus ante puris adventum vexari ſolebant. Quod ſi, obſtructis ureteribus, aut veſicæ aditu a calculo in ipſis remanente, puris exitus impediatur, morbi finem, & mortem tunc citiſſime ſequi, niſi tamen per inſuetam aliquam, & reconditam viam puris e corpore exitum natura tentaverit; ut in prima hiſtoria vidimus, in qua Ægri mors ad aliquot menſes protracta fuit ob mirabilem illum ductum, per quem a diſrupto uretere intra peritonæi membranas ad hypogaſtrium ſiniſtrum ſanioſa materia evecta fuit. Ultimo tandem in iis, in quibus, vel ex conſtanti aliquo ad renes dolore, vel ex ſan-

ſanguine, aut pure per urinam exeunte certi quodammodo eſſe poſſimus de calculo quopiam in renibus latitante, vel ſola emollientia, & paregorica, vel vulneraria, & corroborantia, nunquam vero diuretica, aut ſtimulantia remedia aliquantulum prodeſſe nobis viſum eſſe; ut experientia quodammodo edocti ſimus, in hiſce caſibus de dolore ſedando, vel de ſanguinis, aut puris copia minuenda, aut corrigenda, non vero de calculorum exitu promovendo Medicos ſollicitos eſſe debere.

JACOBI BLANCANI.

Iter per montana quædam agri bononienſis loca.

PARS PRIMA.

ERunt fortaſſe veſtrum nonnulli, Sodales doctiſſimi, qui hoc argumenti genus inutile, & ab Inſtituto, atque Academiæ conſuetudine alienum reputent, ſimplicem enim, & fere nudam locorum eorum deſcriptionem exhibet, e quibus foſſilia eruuntur, quæ deſcriptiones vix ullius emolumenti eſſe nonnullis videntur, niſi obſervationibus, inventiſque auctæ, & adornatæ; cæterum ſi obſervationes, inventaque hujuſmodi in pretio ſunt apud doctos, atque ad naturæ ſcrutatorem pertinere maxime cenſentur, non video quo minus ad eundem pertineat locorum deſignatio, & cognitio, ubi quæque genera inveniri facile, & obſervari poſſint, ne vagari temere, & nimium temporis, & laboris ſine fructu cogatur conſumere. Itaque non abs re noſtra facturum me exiſtimo, ſi, quod jamdiu ſuſcepi, montana bononienſis ditionis loca, in quibus vel plurimum ſuarum opum, & quaſi portentorum condidit, vel maxime luſit natura, accuratius deſcribendo perſequar.

Ac primum quidem deſcripto ſuperioribus annis Landæ rivo, & locis conterminis, Vezzani montis ſitum deſignabimus, inſignioraque foſſilia ibi reperta enumerabimus, demum finitimorum locorum narrationem brevi commentatione complebimus.

Vezzanus mons cæteris pœne omnibus, qui Labinii, & Samodiæ fluminum ambitu continentur, eſt eminentior, iſque plures diverſos colles demittit, e quibus qui orientem ſolem, & meridiem ſpectant, ad Landæ uſque, & Saxi rivos producuntur, qui vero occidentem ſolem reſpiciunt, caſtro terminantur, quod Olivetum dicimus, & Samodiæ adiacet; ultima demum collium ſeries inter ſeptentriones, & orientem ſolem porrigitur, & ad Labinium flumen ſiſtit.

Ita

Ita autem ſitus eſt Vezzanus mons, ut homo a vertice late proſpiciat ampliſſimam, fertiliſſimamque planitiem omnem, quam ab antiquis poſſeſſoribus Longobardiam nuncupamus, Ferrarienſem quoque univerſam ditionem, & Venetæ provinciæ partem non exiguam.

Variis porro terrarum ſtratis conſtat: inferior, & media pars arenaria terra flavi coloris: tergum ad meridiem calcario lapide, ubi teſtaceorum omnis ferme generis fragmina, & exuviæ extant, e quibus nihil aliud obſervatu dignum mihi reperire contigit, niſi quoddam fimbriatæ porcellanæ undique ſtriatæ fragmen, conchæ ſcilicet illius, quam vulgus veneream nuncupat.

Ipſius montis apex totus argilla conſtat, plurimis ſolidiſſimi ejuſdem generis lapidis fragminibus commixta, & fortaſſe olim totus erat montis vertex compactiſſimus, ſed cum vi caloris, & frigoris lapis diſrumperetur, atque in pollinem redactus eſſet, coloni aratro tellurem ſcindentes duriſſimum lapidem in feracem agrum converterunt, neque aliud temporibus noſtris primævæ compactiſſimæ materiei ſupereſt, niſi illius veſtigium aliquod molliori telluri intermixtum; qua de re nemo miretur volo, ſicut enim non pauca corpora ex mollioribus, aliorum corporum ſolidiorum permixtione firmiſſima effecta ſunt, ita denſa alia, & valde dura, pluviarum illapſu, frigoris quoque, & caloris vi confracta quodammodo, atque adeo attrita, diſſoluta ſunt, & mollia effecta.

Candidiſſimæ deinceps terræ leviſſimæ, & tenuiſſimo conſtantis polline portiones quam plurimas, goſſipii floccorum inſtar, in hoc monte vidimus. Terram huic ſimilem ii, qui naturali hiſtoriæ dant operam *Agaricum minerale* appellant, deſumpta denominatione a ſimilitudine, quæ agaricum inter vegetabile, & terram hanc intercedit. Buffonius agaricum minerale efformari putat, dum ſtillantes aquæ, e ſuperiori montium parte decurrentes, per horizontales lapideorum ſtratorum juncturas fluunt, ubi forte calcariam terram offendunt, eamque imbibunt, hanc deinceps ſenſim deponentes in lapideis glebis, quas præterfluunt, ſquameam illam albidam, levem, ſpongioſamque materiem relinquunt, quam agaricum dicimus.

In eodem monte multæ occurrunt lapideæ coagulationes ejuſdem ferme generis ac geodes lapides. Exterior earum ſpecies

cies varia eſt, diverſaſque figuras exhibet. Plerumque tuberibus ſimiles ſunt, hianteſque, uti fere ii quos diabolicos panes Ceſalpinus appellat; ipſorum multi lapideam duritiem contraxere prope teſtacea quæ dixi, eorumdemque teſtaceorum formæ in iis adhuc impreſſæ extant. Materies, qua conſtant, ut plurimum tenuis eſt cretæ inſtar; in nonnullos iſtorum lapidum incidi, qui arena ſubtili, mixtaque talchi ſquamis coagmentantur; in alios quoque, qui tuberum ſpeciem quidem habent, ut ſuperiores, ſed iis ferrea materia immixta colorem immutat; referunt enim albicantem, ſubflavum quoque, aut fuſcum colorem. Interiores eorum cavitates papillis quibuſdam extuberant, & margaceo luteo polline non prorſus obducuntur.

Horum lapidum ſimiles memorantur a Cl. Targionio in ſuis per Etruſcam provinciam itineribus, tomis præſertim primo, & quinto; ab Aldrovando in Muſæo metallico, eos appellante *lapides margam continentes*, alioſque etiam *lapides renales ſardicos* a Sardiniæ inſula, in qua potiſſimum occurrunt; a Ceſalpino, a Cl. Bertrando denique in ſuo, quem edidit tribus ab hinc annis, libro de montium, & collium uſu, qui eos vocat *lapides cavos*, *lapides prægnantes*.

Immanium quoque oſſium fragmenta in hoc, quem dixi, monte invenimus, de quibus multa dicenda eſſent, ſed præterquam quod de aliis plura diximus, multa dicere vetat eorundem oſſium confractio, & ſciſſio. Vetat terra, quæ ex omni fere parte ea obtegit, obducitque, quam ob cauſam cujus generis oſſa ea fuerint minime aſſequi poſſumus. Si conjecturis fidere tantiſper licet omoplatam fuiſſe ſuſpicabimur unum ſcilicet ex duobus illis oſſibus, quæ utrimque a cervice ad ſcapulas tendunt, quæque a latinis ſcopula operta nuncupantur, neque terreſtris alicujus animantis eſſe, ſed marini cujuſpiam cætacei, cum nullum terreſtre animal tam grande, atque amplum os, quod nos noverimus, habeat, habeant vero nonnullæ belluæ ex eo marinorum genere, quod cætaceum appellamus.

Scio equidem diverſam eſſe authorum hac de re opinionem, alii enim marinis belluis, elephantis alii, & cæteris maximis ex quadrupedum genere animalibus, Gigantibus etiam alii immania hujuſmodi oſſium fragmina diverſis in locis reperta tribuunt, ſed niſi in immenſum auctam velimus elephan-

ti, & multo plus hominis ſtaturam, tam grande os nullo modo iis aptari poteſt.

At de his oſſibus, & de monte Vezzano ſatis. Dicamus pauca de collibus, & rivis inde enaſcentibus. Et primum quidem de rivo *Martignone* foſſilium conchyliorum teſtarum feraciſſimo.

Rivus iſte, quod ante innui, initium ducit a monte Vezzano, cujus aquas deinceps uberiores reddit influens rivulus alter a calanchis prati albini decidens, aliis denique aquis, teſtaceiſque quamplurimis finitimorum collium *Faie* locupletatur, longoque inter ipſos colles ſpatio emenſo, viam *di Creſpelano* trajiciens, in Samodiam fluit prope ſplendidiſſimas Capraria patritiæ familiæ ædes, vulgo *le Budrie*, nuncupatas.

In hoc rivo maxima teſtarum conchyliorum copia exſtat, quas ex adiacentibus collium ripis delabentes aquæ in eundem rivum deferunt, qui colles, cum topho majori ex parte conſtent, materie ſcilicet minus apta ad diutius corpora illa ſervanda, propterea fit, quod ipſorum pleraque diſrupta, & attrita decidunt.

Ibi tamen dentales, purpuræ rectiroſtræ, mucronatæ, & umbonatæ, trochites, turbines, buccinula, cochleæ, conchæque diverſæ, madreporæ quoque, & cariophyli paſſim occurrunt, e quibus plurimi tum e rivi alveo, tum e ripis adiacentibus integri extrahuntur.

Cochleas etiam depreſſas alias, alias umbilicatas, quamplurimas reperimus, quas nec loci, nec temporis edacitas, vel minimum læſit, itaque nativum colorem perbelle exhibent, albidæ enim aliæ ſunt, ex rufo, ſeu nigro, undatim, & denſe lineatæ, aliquando ex citrino nigro, & pullo colore radiatæ, aliæ punctis rufis denſiſſime aſperſæ, & circumſcriptæ, aliæ lineis ex livido fulvidis, inflexis, interruptis, radiatæ, & ſignatæ.

Concharum quoque cordiformium æquilaterarum teſtas quamplurimas diſruptas in hujus fluenti fundo conſpeximus, quæ cum opinionem, ſpemque haud dubiam induxiſſent, fore, ut aliquam integram in finitimis rupibus inveniremus, in cauſa fuerunt ut diem totum impenderemus huc illuc errantes, haud fruſtra tamen, nam ex multis in marga deliteſcentibus, (in qua ut plurimum in calcem redactæ conchyliorum teſtæ, cum in apertum aerem prodeunt, diſſolvuntur,)

obti-

obtigit tandem, ut unam extraheremus, quam, ut integra ſervaretur, artificiali glutine firmatam, nullaque ex parte labefactatam cl. Baſſio conceſſimus.

Conchas etiam minores, eaſque plerumque foſſiles ab impetu aquarum ad rivi fundum hiemali præſertim tempore deportatas ex arenis legimus, quas ſingillatim recenſere, & in propria genera diſpertire longum foret, vobiſque omnibus, Sodales doctiſſimi, procul dubio moleſtum.

Conchas, quas dixi, perquirenti, oſſis fruſtum occurrit coloris ſubfuſci, friabile, & ferme putridum, cujus ſpongioſam materiem ſalium fortaſſe nexu cohærentem humidæ tempeſtatis vis diſgregaverat, nam in loco ab humido aere remoto collocatum, non multo tempore ad naturalem priſtinam ſoliditatem rediit.

Aliud tandem oſſeum fragmen quod oculis veſtris, Sodales ornatiſſimi, ſubjeci, in hoc rivo invenit Antonius Mazzonus Civis noſter, cujus diligentiæ in foſſilibus inquirendis, eruendiſque, multum me debere fateor, præſertim cum omnium, quæ invenit (præclara ſane, & nobilia) participem me eſſe voluerit. Exterior hujus fragminis forma cogit nos, ut dicamus ad animal quodpiam marinum pertinuiſſe, portionemque coſtæ fuiſſe, interior vero ſtructura oſſeam eſſe hujus materiem certos nos facit.

Affinis huic fluento, ipſique per duo fere paſſuum millia parallelus, in idem defluit rivus, quem vocant *delle Meravi-glie*, mirabilia enim naturæ artificis opera prætereuntium oculis exhibet. Arenarios ſcilicet lapides eteromorphos animalium atque vegetabilium ſimulacra impreſſa, vel figura, vel typo oſtendentes, qui lapides ex arenarum, quibus toti componuntur adiacentes colles, fortuita conglutinatione poma, pepones, armeniaca, perſica, aliaque innumerabilia propemodum non modo fructuum, ſed & membrorum veluti monſtra referunt.

Lapidum iſtorum ſæpiſſime meminit Aldrovandus in libro quarto Muſæi metallici, ipſorumque figuras buxo inciſas protulit.

Anonimus quoque, qui datis ad Academiam noſtram litteris ſuum deſcripſit iter per montoſam bononienſis agri partem, rivum hunc memorat, lapideſque in eo contentos, ut videre licet in primo Tomo Commentariorum Academiæ.

Quod vero attinet ad alios colles, qui a monte Vezzano ad ſolis ortum protenduntur, in iis nihil, quod peculiari memoria dignum exiſtimem, occurrit præter ingentem oſtreorum, quibus eximii adhærent balani, copiam, quæ conſpicitur prope ædem S. Laurentii in colle.

In collibus vero planitiei, qua ſolem orientem reſpicit, finitimis, immenſæ quædam lapillorum congeries reperiuntur, vi cujuſdam petroſi duriſſimi glutinis compactorum, quæ congeries loco ipſi *di Zolla Predoſa* nomen dederunt, immo via omnis undequaque lapillis iſtis temporum fortaſſe vi ex ipſis congeriebus avulſis referta eſt.

Reliquum eſt ad omnem iſtorum collium hiſtoriam conficiendam, ut aliquid etiam de iis dicamus, qui in Samodiam deſinunt, nam ab iis deſcribendis ſuperſedeo, qui Landæ rivis circumſcribuntur, de quibus ſatis multa dixi ſuperioribus annis.

Colles hi omnes ut plurimum arenario flavo lapide conſtant, & teſtaceis abundant, quæ frequentiora occurrunt prope vetus dirutum caſtrum ſuperioribus ſæculis nobile, atque a patriis hiſtoricis ſæpiſſime memoratum, quod Oliveti dicunt.

Locus autem vulgo *li Monticelli*, cui caſtrum ipſum, & ædes D. Paulo ſacra imminet, duobus arenariis ſtratis conſtat, quorum primum flavum eſt, alterum autem glauci coloris; ſciſſura autem collis a corruentibus aquis effecta jucundiſſima viſu eſt, quod immenſam exhibeat conchyliorum cujuſque generis ſimul conglobatorum copiam, e quibus quæ prorſus in arena flava ſepulta ſunt, nativi coloris ſpeciem quamdam adhuc retinent, ea vero, quæ ex arena prodeunt, ammiſſo nativo colore albida apparent. Teſtæ porro, quæ in arena glauca deliteſcunt, quovis colore deſtituuntur, quæ res haud obſcure indicat terram hanc acidum continere, a quo exterior iſtorum corporum ſuperficies labefactetur.

Importunus ſane eſſem ſi ſingulas teſtaceorum, quæ ibi reperiuntur, ſpecies enumerare vellem, tantum glycimerides conchas majores, & minores, cordiformes æquilateras quoque, pinnas, mitulos, elegantiſſimos varii generis turbinites, purpuram denique recenſebo ſingularis omnino ſtructuræ, & eximiæ, cui ſpeciem certam aſſignare auctorum ope, quos ego quidem noverim, qui de conchyliorum teſtis copioſe, ac diligenter diſſeruerunt, difficile valde eſt, cum nullam ipſi ſimilem in tabulis, in quibus delineantur, afferant.

Hanc

Hanc vero, quam dixi, purpuram in curviroſtrarum genere collocarem, eamque ſic appellarem. = Purpura curviro- = ſtra, trigona, ſtriata, papilloſa, rugoſa, ore elyptico an- = guſtiore, labio fimbriato. = Ejuſdem icona (*Tab. I. num.* 1.) apponimus.

Poſtquam collis ſciſſuram diligenter inſpeximus, oppoſitam ejuſdem collis partem occidenti ſoli adverſam, ac Samodiæ adiacentem perluſtravimus. Pectines ibi, conchas pectiniformes, oſtrea mole & varietate inſignia, turbines, trochites, cochleas conoideas, dentales denique, quos Gualterius tubulos marinos regulariter intortos, arcuatim incurvatos, & verſus unam extremitatem acuminatos appellat, non paucos legimus, quibus omnibus foſſilibus conchyliorum teſtis balani adhærent nativi coloris ſpeciem aliquam retinentes.

In aliis porro rivis Oliveti caſtro conterminis, qui dicuntur *di Stiore*, & *de Botti* frequentiſſimus occurrit lapis, quem Litheoſphorum vocant. Marchaſitæ etiam quamplurimæ, ſpeculares lapides, gypſi fruſta non pauca, quæ omnia vobis diligentiſſime enarravit ſodalis noſter Hiacynthus Voglius Medicus, & Philoſophus præſtantiſſimus.

In Calanchis vero Caſtilionii, quæ dicuntur etiam S. Benedicti, echinos, ſpatagos, nerites elegantioris formæ, lapidefactorum lignorum fragmina non pauca, lapides, quos Aldrovandus mathematicis figuris inſtructos nominat, Lithanthraces denique inveni, ejuſdem propemodum naturæ, ac alii omnes fere, qui non modo in Italia noſtra, verum etiam in longinquis regionibus occurrunt.

Lithanthrax iſte bituminoſis partibus coagmentatus haud ægre accenditur, flammam emittit ſubobſcuram, odorem exhalat gravem, & capiti noxium, ſubflavum cinerem relinquit. In hoc cinere magnete admoto portionem ferruminoſam comperi, ipſius enim cineris particulæ nonnullæ magneti haud procul poſito adhæſerunt, quod quidem experimentum eorum opinioni favere videtur, qui putant in omnibus lapideis concretionibus aliquam ferri portionem ineſſe. Quod ſi ea apud nos ejuſdem lithanthracis copia eſſet, quæ apud exteros occurrit, non leve emolumentum ad fundenda metalla, & ad docimaſticam deduceremus. Neque vero noſtris tantummodo temporibus lithanthracem colles noſtri protulerunt, nam Aldrovandus ætate ſua etiam in bononienſi agro extitiſſe affirmat,

mat,

mat, merito igitur conjicimus nativum quodammodo eſſe nobis, & ab vetuſtis uſque temporibus efformatum.

In iis, quas dixi, calanchis aquæ fons limpidiſſimus exſurgit, quam aquam indigenæ ærofam appellant. Exſurgit autem manifeſto ex fundo foſſæ, ex quo limum attollit, bullæque non paucæ, ejecti aeris argumenta, efformantur. Deinceps ubi præter fluit, curſus ſui veſtigia veluti, ocram non paucam rubei coloris relinquit.

Si quando vero aliqua ipſius portio ſtagnat, tela quædam illi innatat, quam ſi non eodem loco inſpexeris, non eundem etiam in ea colorem intueberis, diverſos enim Iridis inſtar exhibet.

Aquæ ſapor inſuavis palato eſt. Hæc in vitream phialam oblongam cylindraceam, in breve, atque anguſtum collum deſinentem infuſa, ut tertia phialæ pars vacua relinqueretur, ac manu apprehenſa phiala, & pollice ad os fortiter appreſſo vehementer agitata eſt; agitatione ſpumeſcere cœpit, ac ſublato digito flatus cum tenui impetu, & ſibilo erupit.

Si modicam olei tartari portionem in eam infundas, nonnihil opaca fit, ſi guttas aliquot ſpiritus vitrioli illi admiſceas, alba illius portio præceps corruit, varios in fundo vaſis grumos efformans, totaque aqua fermentans bullas aeris non paucas ad ſuperficiem extollit, mox limpidiſſima efficitur.

Hanc phœnomenorum multitudinem, & varietatem oleo tartari potiſſimum tribuo, nam ſi ſpiritum ſulphuris, & vitrioli tantum infundas, minima apparebit aquæ commotio, & varietas.

Sapor, quem rudes ipſi indigenæ nonnihil æris continere fatentur, nos in ſuſpicionem valde probabilem adducit, æris nonnihil in conterminis fonti iſti locis ineſſe, per quæ defluentes aquæ eum ſaporem obtineant: id diligentius deinceps inquiram.

Utinam dum eas aquas vitrea phiala contentas agitavi, majorem crepitum edidiſſent; comperiſſem tum (quod ex præſtantiſſimo Beccario didici) principio elaſtico eas pollere, quo quidem principio aquæ præditæ ſi quæ ſunt, eæ medicinalibus uſibus aptiſſimæ videntur.

JACO-

JACOBI BLANCANI.

Iter per montana quædam agri bononienſis loca.

PARS ALTERA.

SUperiore anno poſtquam Vezzani montis, ejuſque collium, & rivorum hiſtoriam complevi, vobis, ſodales doctiſſimi, ſignificavi fore, ut per Samodiæ flumen iter ſuſciperem ejus alveum, & rivos perluſtraturus, ut quidquid aut jucundi, aut utilis perciperem vobis exponerem; quod cum facere nunc aggrediar, ita procedet oratio, ut primum fluminis originem, alveique excurſum deſignet, deinde quæ animadverſione digna in eo contigit reperire, tandem qui rivi, & a quibus collibus in amnem influant, e quibus maxime oſtracodermata, foſſiliaque alia quam plurima eruuntur. De his ea referam, quæ oculis ipſe accurate inſpexi, præter fluminis originem, quam auditu ab aliis accipere oportuit, cum enim copioſi imbres ſuperiore autumno vetaſſent, ne, uti optaveram, propius fluminis fontes accederem, ejus initium ab indigenis cultioribus quærere, & cognoſcere coactus ſum.

Ac primum quidem Samodiæ amnis ex altiſſimis montis Turturis jugis in ſeptemtriones decidit, amœniſſimam vallem, quam circumſtant ampliſſima caſtaneta, præterfluens, paulatimque excreſcens major efficitur ex cornu dicto *la Ghiara della Chieſa nuova*, alias *Rivo de' Bignami*, quod ex vallibus procedit vulgo *le Lame de' Baraldi*, & amni jungitur prope ipſam eccleſiam novam, a qua denominationem deſumit, quæ eccleſia mille, & quingentos paſſus circiter diſtat a notiſſimo loco, quem Incolæ *Mercato di Savigno* appellant. Cornu aliud a Monteumbrario exortum, cui nomen dedere veteres *Volgolo, o Rio Maggiore*, majorum noſtrorum clade inſigne, nunc autem *Ghiara di Seravalle* dicitur, in occidentem excurrit, donec in orientem ſolem vergit, unde etiam haud multo emenſo ſpatio, in ſeptemtriones deflectit: de monte corona

cum

cum deſcenderit, rivis augetur, tum illo maximo aquas Montis umbrarii recipiente, qui vulgo dicitur *La Ghiara di Ciano*, tum aliis etiam, qui e finitimis collibus, & rupibus emanant, tandem ad notiſſimum Montembellium cum Samodia conjungitur: quæ per fragoſos montis turturis ſaltus, per aliorum quoque collium anfractus præceps delabens, vetuſta Bazani arce, & oppido poſt ſe relictis per maximam agri bononienſis planitiem, qua viam Æmiliam, & S. Joannis in Perſiceto interſecat, quatuor, & viginti milliariis emenſis, prope ſacram ædem vulgo Bagneti, quæ duo circiter paſſuum millia a nova urbe Cento diſtat, in flumen Rhenum influit.

In hujus amnis alveo parum, aut nihil occurrit peculiari mentione dignum, nam quod attinet ad oſtracodermata, immenſa ſaxorum vis ab aquarum impetu deorſum præceps hiemali præſertim tempore circumacta, elegantiora corpora conterit, quæ a finitimis rivis, & rupibus in alveum ipſum demittuntur; quod autem ad ſiliceos lapides, in eo præſertim cornu vulgo *la Ghiara di Serravalle* occurrunt diverſi generis fruſta non pauca, quæ ſi levigentur, achatum chalcedoniorumque diverſas ſpecies perbelle exhibent; in hoc enim lapidum genere ſua quoque agro Bononienſi debetur laus, qui ſi uberrimas ipſorum fodinas non habet, aut ſi eas nondum deteximus, quod celſiora montium juga minus diligenter ſcrutati ſumus, quamplurima tamen eorum fragmina in ſuis fluminibus, & rivis conſervat, quorum ſpecimina lævigata, & in capſulas redacta aſſervabantur penes ampliſſimum virum Comitem Julium Sigitium Blanchettum Gambalongam tribus ab hinc annis maximo Reipublicæ damno vita functum. Ipſius potiſſimum conſilio, & induſtria achates, & chalcedonii eximii, & compactiſſimi, jaſpidum quoque quædam quaſi ſpecies e noſtris lapidibus Mediolani affabre expolitis eductæ ſunt, quorum nonnullas huc in medium attuli, non tam rerum pulchritudinis, & elegantiæ demonſtrandæ cauſſa, quam grati animi mei in munificentiſſimum virum ſignificandi, qui ejus generis multa mihi liberaliſſime largitus eſt. Quamquam hujuſmodi plurima ex noſtro agro antea collegerat Valerius *Dal Buono*, honeſtus civis, & Sacerdos, & in elegantem ſeriem tribuerat; quædam etiam repererat Petrus Gratiolius e nobiliſſima Barnabitarum familia ſacris literis apprime excultus, & omni literarum genere florentiſſimus, quæ Comiti Blan-

chetto communicavit, eique poſtea ulterius progredienti provinciam hanc omnem dimittendam cenſuit.

In ipſo quoque Samodiæ flumine fruſtum ligneum lapidefactum ſeptem ab hinc annis contigit reperire, quod conſpectu veſtro dignum cenſui, Sodales ornatiſſimi, quia minus frequentia ſunt in agro Bononienſi lithoxyla, tum quia quæ maximam contraxerint duritiem ubique locorum rara ſunt, & inſignia: eximium hoc fruſtum in ſiliceam materiem pene totum converſum eſt; color fuſcus, ac lineis albidis fruſti longitudini perpendicularibus, & invicem parallelis majori ex parte diſtinctus: pondus maximum: major longitudo ſemipedem pariſienſem, & digitos tres non excedit, latitudo digitos quinque ac lineas undecim. Fibrarum quoque nunc etiam quædam quaſi veſtigia apparent, quarum craſſitudo quintam ferme lineæ pariſienſis partem adæquat, neque accurate omnes in longum extenduntur, ſed quædam in nodum inflectuntur; earum aliquæ oculo præſertim microſcopio inſtructo ad tubi formam cavæ apparent, tenera illa ac molli materie, quæ intra ligneas fibras continetur, quæque alteram alteri conjungit, in ſiliceum gluten commutata. De la Hire, qui palmeos binos truncos ſimiliter lapidefactos Regiæ Pariſienſi Academiæ obtulit, ut in ipſius commentariis anni milleſimi ſexcenteſimi nonageſimi ſecundi, probabilem adfert hujuſmodi petrificationis, ac conformationis rationem. Obſervat nempe quod cum corpora longa, mollia, & inſigni mole prædita exſiccantur, exterior pars dureſcendo quoddam quaſi vacuum circumſeſe relinquit, pars vero interior, quæ mollior eſt, (dum & ipſa deinceps exſiccatur, donec omni amiſſo fluido ſolida effecta ſit) a centro ad peripheriam ſenſim accedendo, exteriori, quam diximus, parti tandem adhæret; itaque interius vacuum efficit, quod tubi formam perhibet: ex hoc porro naturæ artificio contingit, quod pleræque molliorum plantarum fibræ tubulorum inſtar perforentur, ſicque credibile eſt fruſti hujus fibras, quæ alias arboris truncum conſtituebant, ſic cavatas, & evacuatas fuiſſe, dum in ſubſtantiam lapideam immutarentur, quæ deinceps ſubſtantia partim ſubnigro, partim ſubalbido quodam ſiliceo ſucco fibras pleraſque replevit. Dubitabunt fortaſſe quidam de ipſa fruſti noſtri origine, neque ad credendum adducentur ipſum aliquando fuiſſe lignum. Scio equidem diſcordes eſſe de hujuſmodi foſſilibus opiniones, quidam

enim putant corpora hujus generis, quæ lapidefacta dicuntur, numquam revera fuiſſe talia, ſed tantummodo lapides, ſilices, ac ſtalactites, quæ dum ſe in montium viſceribus conformarent, corporum illorum, quæ repræſentant, formam fortuita partium conglutinatione obtinuerint; alii vero exiſtimant aquas, ac tenuiſſima quædam lapideſcentia principia adeſſe, quæ cum certa quædam corpora penetraverint, in lapidem convertant. Similitudo maxima, quæ inter nativum lignum, & noſtrum hoc foſſile intercedit, non leve addit huic opinioni robur. De la Hire huic ſententiæ in ſuperius memoratis commentariis ipſe quoque favet, plerique etiam recentiores; veterum plurimi adverſantur.

Ligneum aliud lapidefactum fruſtum, coloris fuſci, eximii ponderis, atque tartareo albeſcente quodam quaſi velamine hic illic obductum, in Samodiæ alveo inventum eſt. Statim ac illud obſervavi, mihi ipſi in animum induxi id eſſe lithanthracis fragmentum lapidefactum, ſciebam enim lithanthraces lapidefactos in natura exiſtere, qui ſcilicet materie lapidea adeo ſunt ſaturati, ut lapides genuinos, ſi nigricantem colorem excipias, quem ſervant ſemper, referant. Clariſſimi Joſephi Montii eruditiſſimos ſermones de lignis foſſilibus perlegeram, in quibus quædam de ipſis adnotantur. Cl. Paſſerii Sodalis noſtri meique amantiſſimi hiſtoria foſſilium agri Piſaurenſis tunc erat præ manibus, qui carbones foſſiles enumerando lapidefactos quoque memorat; ſed cum & ipſi igne admoto flammam concipiant, gravemque illum bituminoſumque odorem emittant, noſter vero igni omnino contumax ſit, nullumque odorem effundat, quam maxime dubitavi ne aliud quidpiam eſſet, ac credideram. Deſiderabam ipſum in acidis liquoribus experiri, ſed cum molis eſſet minus aptæ ad experimenta hæc ſubeunda, cum vellem malleoli ope fruſtula quædam ab ipſo avellere, bifariam diſruptum eſt: potui tunc internam quoque lapidis ſtructuram commode obſervare, quæ lignea intus etiam apparet, & coloris nigricantis, eique admiſcentur micantes quædam particulæ in cryſtallinam figuram concretæ. Fibrarum conſpicuarum proceſſus bis interſecantur, ac interrumpuntur, eandemque interſecationem Cl. Paſſerius quoque obſervavit in fruſto ligni ſic lapidefacto, ut chalcedonii lapidis duritiem æquaret, cujus rei hanc adfert rationem, putat nempe ligna extraneo humore ſaturata, propriam inver-

tere

tere naturam, nitente autem humore ligni meatus penetrare, eoſque dilatante, fibræ fortaſſe decurtantur, indeque diſrumpuntur; in noſtro ligno quidem apparent diſruptiones hæ perſpicuæ fibrarum proceſſum interrumpentes, quæ utrum a ſuperius allata cauſa derivent, nec ne, peritioribus diudicandum relinquo. Fruſtula quædam, quod jam animo inſederat, hujus ligni, in nitri ſpiritum injeci, & illæſa omnino permanſerunt, nullamque in ipſo perturbationem excitarunt. Dubitavi tunc lignum hoc ad ea ſpectare poſſe, quæ amiantina ſeu asbeſtina appellantur, qua propter inſtitutam a Montio methodum in hoc ligno examinando ſequutus ſum: ipſius fruſtula ſcilicet in aquam, quam ſaponariorum magiſtram dicunt, conieci, in eaque præter ſpem nullam alterationem ſunt paſſa, cum, ſi ex animo experimentum ceſſiſſet, in ea adeo mollia, & flexibilia reddenda forent, ut non male verum referrent amiantum: cum vero diu multa de hoc ligno animo perpendiſſem, ad primævam opinionem me denuo contuli, ratus lithanthracis fruſtum eſſe, cujus bituminoſa ſubſtantia omnis evanuerit, dum lapidea a fortioribus acidis illæſa materies idem penetraret, & non modo nullam in igne concipere flammam, neque odorem emittere, ſed nec prunis tentatum uſtionem ullam, aut calcinationem paſſum eſſe, ut non immerito ad apyrorum lapidum genus referendum duxerim.

Sed poſtquam de ſilicibus, & de lignis lapidefactis in Samodiæ amne repertis ſuperius dixi: aliquid nunc dico de quodam mirabilis formæ lapide fungi prateoli formam belle adeo referente, ut naturalem prateolum, ne dicam eſſe, imitari omnino certe videatur, agreſtis enim puella dum æſtivo tempore in quodam Samodiæ gurgite pannos lavaret, ipſum conſpicuum in gurgitis fundo admirata, me illuc errantem ad ſe vocavit, prateolumque lapideum, quoddam quaſi naturæ portentum obtulit; denominatio ipſa lapidi repente a rude puella aſſignata, eximiam ipſius prateolum referentis formam confirmat. Lapidis hæc eſt forma (*Tab. I. Fig.* 2.) Umbella pediculo non æque inſiſtit, ab uno enim latere flectitur pediculi extremitati propius accedens, eumque magis obtegens, ab alio latere ab ipſa recedit, & minus obtegit, qua extremitati pediculi proximior eſt, in altitudinem ſurgit linearum decem pariſienſium, qua ab ipſa diſtat, linearum octo. Ipſius autem latitudo eſt digiti unius. Pediculus recte ſurgit umbellæ

 pla-

plano fere perpendicularis, ipſius longitudo, qua maxime patet, digitum unum, & lineam unam, qua minime, lineas novem æquat, craſſitudinemque habet linearum ſex. Color per totum ſubflavus. Materies, qua conſtat, calcaria eſt omnis, fruſtulum enim in nitri ſpiritum conjectum brevi ſolutum eſt. De calcario lapide huic ſimili non multis ab hinc annis Cl. Comes, & Senator Gregorius Caſalius Sodalis noſter ſcripſit ad Marchionem Maffejum æternæ memoriæ Virum ſermonem italica lingua elegantiſſimum, lapidemque boletitem calcarium ob boleti formam, quam exacte referebat, nominare non dubitavit; de calcariis, de arenariis, de durioribus etiam lapidibus ibi mentionem facit; ubi, & quando eum contigerit reperire narrat, cumque ex ipſius ſcripto cognoviſſem lapides hoſce pene ſimilem inventi fortunam habuiſſe, ſimillimam porro a natura obtinuiſſe formam, fungos enim utrique referunt; ſic putavi meum hunc lapidem non omnino hic prætermittendum fuiſſe, quem in lapidum figuratorum cenſum pono, eumque appello lapidem calcarium fungum prateolum referentem. Qui plura de hujuſmodi lapidibus cognoſcere cupit, adeat diſertiſſimam Caſalii epiſtolam ſuperius memoratam, ejuſque epitomen in Volumine tertio Commentariorum noſtræ Academiæ, ubi abunde non modo, verum etiam utiliter jucundeque ſuum explebit deſiderium.

Poſtquam autem Samodiæ alveos, reſque peculiari animadverſione dignas in iis repertas enumeravi, de rivis etiam, qui in eandem influunt, nonnulla dicere aggredior; horum autem alii in Samodiam ipſam deſinunt, alii in ipſius cornua; de illis primum, de his autem dicemus poſtea. Ac primum quidem Montemgeorgium ejuſque conterminas rupes omitto, in quibus præter vulgatas conchyliorum teſtas tum lapidefactas, tum foſſiles, nihil eſt ſtudio, & admiratione dignum. De rivo etiam vulgo *della Lezza* breviter dico; ex præruptiſſimis cacuminibus oritur Landæ, & Venerano finitimis, ab oriente ſole ad occiduum in Samodiam defluit prope moletrinam, quam dicunt *di Giacone*. Ibi caryophyllos eximiæ molis, madreporarum quoque, bucardiarum, buccinorum aliorumque elegantiorum teſtaceorum fragmina nonnulla inſpexi, quæ vel loci natura magna ex parte conſumpſit, vel inferius circumacta diſrupta ſunt, & attrita. Si quis inſpecto rivo per prærupta circumquaque cacumina ejus initium adire velit,

præ-

præterquamquod amœniſſimum natura locum, ampliſſimamque vallem late proſpiciet, veram quoque aſſequetur Landæ, vicinorumque rivorum originem, atque ex brevi illa demiſſiorum collium diſruptorum ſtructura lumina fortaſſe non pauca obtinebit ad maximam altiorum montium compagem cognoſcendam; ochras quoque partim rubri, partim flavi coloris, aquis quam plurimis hinc inde, e rivi lateribus ſcatentibus, immixtas obſervavimus, quarum frequentia in omnibus ferme rivis, & color in cauſſa fuit, cur eas pyritum particulis tantummodo ditatas negligeremus. Rivo huic affines ſunt duo alii, quorum primus dicitur *di S. Andrea*, alius *de' Soavi*.

Rivus S. Andreæ montis Tozzi aquas egerit in Samodiam. Præter foſſilia, quæ ſuperius dixi, nihil aliud notandum in ipſo occurrit In monte Tozzo, qui arenaria flava terra totus coagmentatur, balani ſunt frequentiores, nullique adhærentes bali, arena vero ipſa quamplurima corpuſcula foſſilia continet, & præſertim cornua ammonis ſimilia omnino illis, quæ prope viam inveniuntur ad ædem B. Virginis *del Monte* ducentem, de quibus, & de arena ipſa, qua immiſcentur, plurimis ab hinc annis egregie diſſeruit Cl. Beccarius. In omnibus autem arenis flavis bononienſis agri, in nonnullis etiam glaucis, ſive cinereis, quas adhuc obſervare licuit, ammonis cornua teſtulaſque alias diverſi generis perſpeximus. De rivo S. Andreæ ſatis, ſuperque diximus; ad rivum *de' Soavi* ſermonem converto. A præruptiſſimis Montis Sanpetri rupibus orientem ſolem, & Boream ſpectantibus delabitur, montis Tozzi nemora ipſi adhærent, paucoque viæ ſpatio emenſo in Samodiam influit. Prope rivum marmora ruderata, quæ & lapides Florentini dici ſolent, effodiuntur, in quibus nempe arbores, caſtella, & vel ipſæ geometricæ figuræ depictæ apparent, quæ fortaſſe tenuiſſimis metallicis, ſeu ſubtilis alterius cujuſdam heterogeneæ materiei venis per marmoris ſuperficiem ſubſtantiamque vario modo ſerpentibus effinguntur. Hujus rivi exortum ſi ſpectes, aptiſſimum eſſe rerum naturalium amatoribus locum facile judicabis, in quo majorem illam, qua pollent, elegantiorum corporum ſitim abunde expleant; caveant vero ne ſua ipſos fallat opinio, dumque ſedulam admovent manum aptiſſimis etiam inſtructam ferris, ſpe facile cadant poſſe integra oſtracodermata ab iniqua illa ſubſtantia, eruere, in qua penitus immerſa ſunt, non quod ipſi nimium

adhæ-

adhæreant, ſed quia tam fragilem naturam in ipſa acquirunt, ut ne unum quidem ex tam multis corporibus integre extrahatur. Deſiderandum quidem eſſet, ut facilius extraherentur, tanto enim majore præſtantia prædita ſunt, quanto minus ager hic noſter hujuſmodi foſſilibus abundat. Nam alias recenſita ut omittam, in eodem rivo occurrunt buccina majora, & minora Gualterii, ſtrombi canaliculati, roſtrati, & auriti, aure admodum craſſa Gualterii Tabula quinquageſima tertia. B. C. turbines elegantiores, cochleæ trochiformes argentei coloris, atque caſſidiformes, purpuræ rectiroſtræ aliæ, aliæ curviroſtræ, cochleæ longæ pyriformes vulgares, aliaque hujus generis corpora, lapides etiam ſic ludente natura conformati, ut anguibus aſſimilentur alii, alii variorum corporum imagines referant, iiſque non modo forma, verum etiam materie ſimiles, qui in rivo *delle Maraviglie* inveniuntur.

Rivo *de' Soavi* peracto, de iis nunc dicendi locus eſſet, quos *delle Vallocchie*, *de' Botti*, *di Maraſtello*, alias *di Caſtione*, & *di Stiore* vulgus nuncupat, ſed cum de quibuſdam ſuperioribus annis abunde verba fecerim, quidam nihil habeant, quod ſtudium excitet, omnes libens omitto, rivoſque illos enumerare aggredior, qui in id Samodiæ cornu influunt, quod *Volgolo*, ſeu *Ghiara di Serravalle* nominant. Antequam autem id facio, rivum *della Sega* breviſſime memoro, qui ab occidente ſole ad orientem labitur, ac Samodiæ jungitur. In ipſo interdum calcariarum cryſtallorum in mirificam formam concretarum inſignes congeries reperiuntur, oblonga quoque plumbea fruſtula, ac in ejus conterminis campis lapides octogoni, ac tabulæ quadratæ ad lateritia opera, ſeu ad pavimenta ſternenda inſervientes. Vetus quoddam amplum ædificium ibi fuiſſe fama eſt, cujus reliquiæ paſſim deteguntur, plumbique portiones in rivum frequentes probabilius ab iiſdem derivaſſe videntur.

Ad rivos *nella Ghiara di Seravalle* delabentes me confero. Primus occurrit rivus *de' Cimicelli*, qui a jugis Tiolæ, & Majolæ originem ducit, & deorſum labitur ſolem occiduum, & ſeptemtriones verſus. Foſſilia quamplurima in finitimis ipſius rupibus, & fundo occurrunt, inter quæ caryophylla eximiæ molis, madreporarum inſignia fragmenta, ſtrombi, conchæ pectiniformes, caſſidiformes, & corallinæ, ſpondyli, lithoxyla quoque peculiari mentione digna arbitrantur, lapideus

etiam

etiam conchæ cordiformis, vulgo bucardiæ nucleus eximiæ molis in fundo rivi repertus eſt anno milleſimo ſeptingenteſimo quinquageſimo ſecundo. Elegantiorem cochleam ex innumeris diſruptarum teſtarum fragminibus delegimus, cujus figuram delineatam affero (*Tab. I. Fig.* 3.), quam cum Gualterio Tabula ſexageſimaquinta littera I. deſcribo *cochleam depreſſam, lævem, labio craſſo, ſive pulvinato, auricula tortili:* neritam quoque ſeu cochleam breviorem non proportionatam, oris perimetro a plano horizontali interrupto, minutiſſime ſtriatam, ac tenuiter dentatam ibi invenimus, quam expreſſam habetis eadem Tabula (*Fig.* 4.). In hoc vero potiſſimum rivo, ut, & in eo, quem Landæ nominant, præ cæteris abundant ſedimenta illa, in quibus minima exiſtunt cruſtacea, & teſtacea, de quibus paucis ab hinc diebus vobiſcum ornatiſſime diſſeruit Sodalis noſter Ferdinandus Baſſius Phyſicus, & Botanicus nobilis, & ſpectandus. Ipſorum ego quoque ſeriem jamdiu inceptam complere, collectaſque in omnibus ferme rivis, quos luſtravi, opes ſimul conjungere, ac in ſua quæque genera diſpertiri aggreſſus ſum, ut abundantior, ſi fieri poteſt, & perfectior bononienſis hæc noſtra concharum foſſilium minus notarum hiſtoria aliquando prodeat.

Proximus huic rivo eſt alius, quem dicunt *di Merlino*, a domo enim ſic appellata derivat, atque inter finitimos Zapolini, ac Majolæ montes ad ſeptemtriones fluit, ac *nella Ghiara di Serravalle* deſinit: ibi præter ſuperius enumerata foſſilia, conchæ coralloides, lithanthraces, lapidefactum oſſis cetacei fragmentum, lapides quoque peculiaris ſtructuræ in cylindri formam concreti, ac per omnem longitudinis tractum perforati exiſtunt: peculiaris hujus conformationis cauſſam derivandam fortaſſe puto ab ordine a natura adhibito in hujus generis concretionibus, cum enim fluida lapidea materies ſic coadunata evaporatur, atque exſiccatur, exteriores particulæ dum contrahuntur, interiores ipſis adhærentes ſenſim attrahunt a centro ad peripheriam, portionemque ſpatii, quod occupabant, inanem relinquendo, vacuum illud efformant, quod in hujuſmodi lapidibus conſpicitur, quos propterea inter quaſdam ætitum ſpecies, ſeu lapidum cavorum referendos eſſe puto.

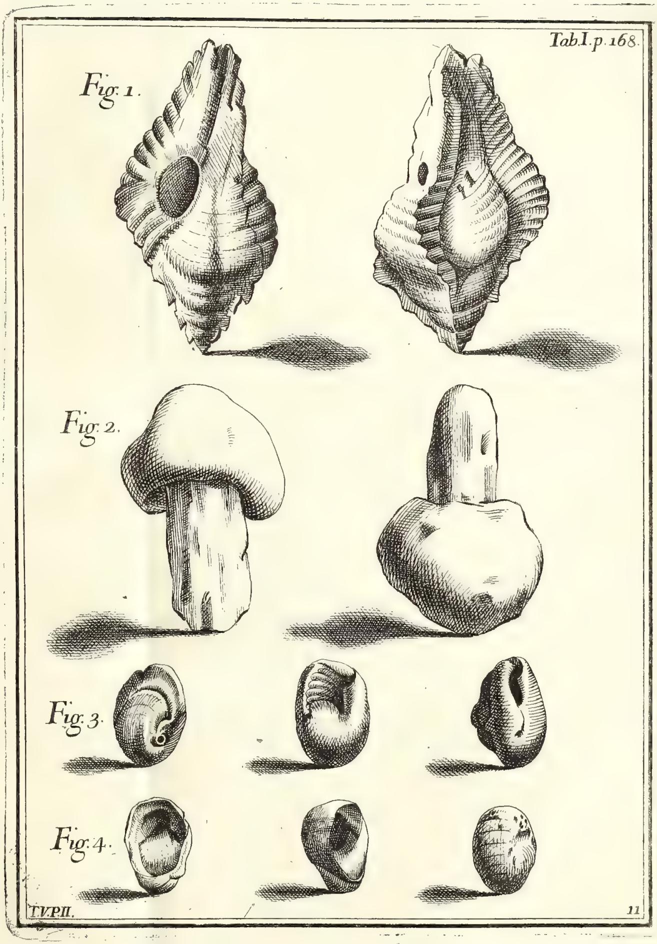
Rivo Merlini adjacet rivus alter, quem nuncupant fundamentorum, ac finitimorum camporum, collium *del Caſone*

aquas

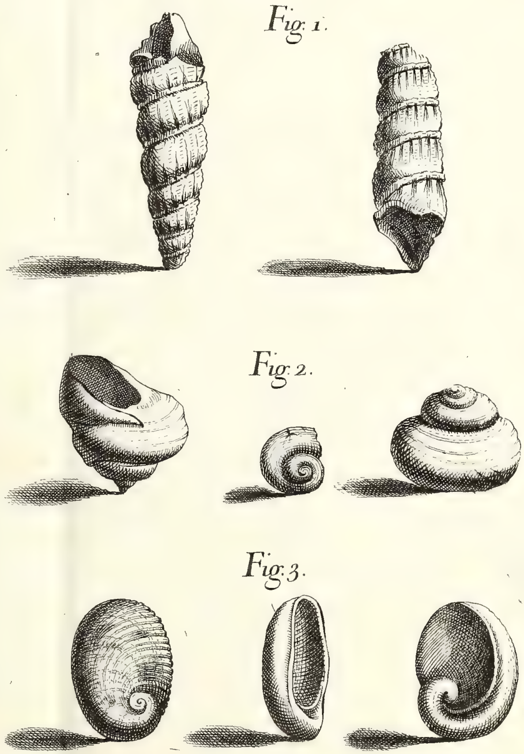
aquas in pluries recenſitam Volgolum, ſive *Ghiara di Serravalle* egerit. Rupes omnes ipſi conterminæ flava plerumque, ac cærulea arena conſtant, in quibus vulgaria, ac communia foſſilia deliteſcunt. Notandum tantummodo eſt prope ipſum rivum foveam quamdam ab aqua excavatam eſſe, in qua quamplurima oſtracodermata conſervantur, lapideis congeriebus adhærentia, quæ nativum ipſum colorem nunc quoque referunt, præ cæteris fragmina quædam turbinum obſervare, ac divellere licuit, quorum ſpecimen (*Tab. II. Fig.* 1.) vobis Sodales clariſſimi exhibeo, quoſque Gualterius = *Turbines apertos canaliculatos oblique incurvatos*, *rugis per longitudinem diſpoſitis in unaquaque ſpira unitos* = nuncupat. Omnis quoque Zapolini via infinitis propemodum congeriebus interrumpitur, quæ præter alia trochiformes cochleas ſtriatas argenteum colorem adhuc præſeferentes continet, quarum figuram obſervare licet (*Tab. II. Fig.* 2.); varii etiam fontes ab ipſius ripis ſcatent, quorum aquæ tartaream materiem abunde deponunt, & in diverſa grumos eximiæ molis conglutinant. Cantajæ via ſic dicta, quia ad Cantajæ domum ducit, atque in Merlini rivum deſinit, foſſilibus cochlitibus pene omnis eſt referta: caſſidæ, turbines, ſtrombi, neritarum multiplices ſpecies paſſim occurrunt. Ibi tamen foſſilem cochleam elegantiſſimam ex marinarum aurium genere legimus, cujus figuram offero (*Tab. II. Fig.* 3.), quam cum Gualterio Tabula ſexageſima nona littera F. deſcribo *aurem magis depreſſam*, *ore magis expanſo*, *minutiſſime ſtriatam*, *ac nullis foraminibus diſtinctam*.

Ad conficiendam Samodiæ hiſtoriam nunc dicendum eſſet de rivis, qui ab occiduo ſole, ad orientem excurrunt, & in Volgulum alias *Ghiara di Serravalle* deſinunt, ſed cum nimis fortaſſe multa dixerim, brevitatis gratia, eos nunc libenter omitto, & in proximum annum refero, quorum deſcriptionem minori vobis tædio futuram confido, quod & jucundiora afferat, fortaſſis etiam utiliora.

GRE-


Tab.I.p.168.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
T.V.P.II.
11

NATURAL HISTORY


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.

NATURAL HISTORY

Gregorii Casalii.

De quorumdam vitrorum fracturis Sermo alter, quo diluuntur objecta nonnulla, quæ clariſſimus Joannes Baptiſta Scarella protulerat adverſus Sermonem primum de eodem argumento conſcriptum.

SEx circiter ab hinc annis, Sodales doctiſſimi, nonnullæ quorumdam vitrorum fracturæ ſe ſe mihi obſervandæ exhibuerunt, quæ cum novæ mihi viderentur, ſtatim ad vos confugi, eaſque vobis narravi, aliquot de illis animadverſiones proponens, quas a vobis emendari deſiderabam. Fracturas haſce & vos ipſi novas eſſe judicaviſtis: quo circa vobis placuit eas continuo prodire. Re vera illico prodierunt in Tomo tertio noſtrorum Commentariorum, cui ſermo, quem de illis hic habueram, fuit inſitus. Properatione, qua hoc prodiit opuſculum, properatio illa non minor fuit, qua compoſitum: de quo fidem faciunt, & obſervationum tempus in opuſculo ipſo adnotatum, & tempus quo opuſculum Commentarii obtulerunt. Verum quomodocumque res ſe habeat, opuſculum factum eſt juris publici. Quapropter clariſſimus Pater Joannes Baptiſta Scarella in Tomo tertio *Phyſicæ Generalis Methodo Mathematica tractatæ*, ubi examen inſtituit *de Cauſſa diffractionis ampullarum Bononienſium*, arbitratus eſt, & libere ſermonem meum, & jure ſuo oppugnare ſe poſſe. Hoc, Sodales humaniſſimi, me ad vitrorum fracturas iterum vocat. Gaudeo, vobiſcum hic aliquantulum expendere, an quæ jam dixeram, illas mererentur doctiſſimi Viri objectiones. Ceterum maxime cupio, eum ipſum ſcire, me ejus objectiones tanti facere, quanti debeo, ideſt plurimi; ac ſi quando ſermo hic ſecundus ad ejus manus deveniat, neque ei, uti verendum eſt, ſatisfaciat, eum enixe rogo, ne ipſe recuſet mihi iterum objicere, ut me iterum doceat.

Deſcribebam primum in ſermone illo meo fracturas, quæ in quibuſdam vaſculis vitreis, ut a vitrariis dici ſolet, recoctis deteguntur, poſtquam aliquo tempore vaſcula hæc

lapillos quoſdam continuerunt: quæque vaſcula eſſent, quique lapilli, explicabam, nulla eorum circumſtantia prætermiſſa, quæ ſcitu digna videretur. Deinde aliquot notabam de vi, qua fracturæ ipſæ conficiebantur, atque de cauſſa, quæ eas producebat. Illis, quæ, ut ita dicam, ſpectant ad primam partem, non multum ſe opponit Scarella; gravius ſe opponit illis, quæ ſpectant ad ſecundam. Sicque ego res primas breviter rurſus attingam, in ſecundis vero aliquanto diutius hærebo.

Et vero ad diſſerendum de iſtis fracturis regrediens, non modice poſſem earum numerum amplificare. Uſus ſum ad fracturas multas obtinendas, & lapidibus alias per me adhibitis, quos mihi jam propoſuit, & exhibuit, uti videre eſt in primo ſermone, celeberrimus Sodalis noſter Cajetanus Montius, atque nonnullis aliis a digniſſimo Academiæ Præſide Ferdinando Baſſio poſtea ſuppeditatis. De lapidum ſpeciebus nihil novi adjungere poſſem: videlicet nunquam accidit fracturas haberi per alios lapides præter adamantem, achatem, cryſtallumque montanam. Quod cum aſſero, minime tamen diſſimulandum eſt, lapides quamvis bene multi ad experimentum adducti fuerint, lapides haud paucos adhuc eſſe pertentandos. Aliquam autem varietatem præbuerunt vitra: nam non tantum vaſcula, de quibus dixeram, ſed & vitra alia nonnulla ſunt eorumdem lapidum ope pari modo diſrupta. Hæc nova experimenta prætermittam, ut citius me ad clariſſimum Scarellam convertam, multo enim plus valent apud me Scarellæ objectiones, quam mea experimenta.

Conſiderat laudatus Auctor ſub numero 18 paragraphi 250 conſtructionem, quam meorum vitrorum expoſueram, & notat, ſi ea talis vere eſſet, ut deſcribebatur, videri poſſe ingenioſiſſimum ſyſtema, quod ipſe ad explicandam ampullarum Bononienſium fracturam amplectitur, nonnihil infirmari. Quapropter ſuadere contendit, etiamſi non poſſit ſyſtema ſuum meis vitris aptari, non idcirco deſperandum omnino fore, quin vitra ad ſyſtema accommodentur: ſicque numero 19 poſtquam explicavit communem methodum, qua vitra & elaborantur, & committuntur hypocauſto, & ab ipſo auferuntur, ita dicit: *Jam vero facile poteſt accidere, ut ad loca cameræ minus calida, aut etiam alio prius deferantur, quam opus eſt.* Et paullo poſt addit. *Deinde etſi omnia quanta maxima diligentia obſerventur, non poteſt non fieri, quin prius frigeſcant*

par-

partes in ſuperficie aeri expoſitæ; quam interiores ab eodem plus diſſitæ. Quibus reſpondens primum, humaniſſimum precor Scarellam, ut meam animadvertat ingenuitatem, atque deſiderium, quo afficior, ad ejus præcepta, prout fieri mihi poteſt, accedendi. Sciat igitur Scarella, ut primæ ejus conſiderationi inſervirem, me ipſum pluries fornacem adiiſſe, atque loca omnia diligenter viſiſſe, per quæ vitra mea tranſierunt a primo temporis momento, quo a ſtatu fuſionis ablata conformabantur in vaſcula, uſque ad momentum illud extremum, quo jam frigefacta inter completa, & perfecta opera reponebantur; ulterius me multis, & longis quæſtionibus ſeniores, peritioreſque artifices ſubjeciſſe, qui mihi utique affirmarunt vitra iſta gradatim trajeciſſe a calore maximo, quo candentia apparebant, ad temperatum, dein paullatim ad ſtatum illum, qui frigus audit. Verum ut de ſecunda Scarellæ conſideratione aliquid dicam, ſit revera, quod *prius frigeſcant partes in ſuperficie aeri expoſitæ, quam interiores ab eodem plus diſſitæ*. At cur igitur ob eamdem rationem iiſdem fracturis minime ſunt obnoxia vitra alia omnia concava, quorum internæ partes, atque externæ aſſignari poſſunt. Nihilominus quamdam temperaturæ ſpeciem meis vaſculis non negabo, quoniam illis eam ineſſe judicat Scarella. Concedatur ergo vaſcula aliquantiſper temperata eſſe, vel hoc accidat, ſi placeat Scarellæ, propter qualitatem vitri, quo componuntur, parum apti fortaſſe ad ſe ſe conſtipandum, vel propter aliam cauſſam, quam ipſe cæteris veriſimiliorem exiſtimet. Immo non taceam de ſimpliciſſimo phœnomeno, quod mihi ſe obtulit interim dum experimenta nonnulla conficiebantur; experimenta ipſa loco ſuo exhibebo, ſatis nunc ſit ex illis tantum ſumere, ut phœnomenon innoteſcat: ex hoc enim phœnomeno colligi videtur quemdam in meis vaſculis temperaturæ gradum apparere. Nemo eſt, qui ignoret crepitum ſubitaneum, & multiplicem fracturam ampullarum bononienſium, ſi in illas aliquod per os demittatur corpuſculum, quod eas tantillum vulnerare potis ſit. Notum pariter eſt, ampullas, ſi candentes fiant, deinde gradatim frigeſcant, neque amplius idoneas eſſe ad crepitum, neque ad fracturam. Ampullæ ob methodum, qua eas condunt Artifices, gignuntur, ut ita dicam, temperatæ. Si autem candeſcunt iterum, & poſtea calorem paullatim amittunt, temperaturam ſimul amittunt. Verum en

 phœ-

phœnomenon, quod nunc obſervandum contigit. Ampullis duabus bononienſibus calefactis, multo majori caloris gradu una quam altera, nulla tamen earum tam vehementer, ut candeſceret; calore exinde ſublato ſenſim, & extincto; in eas ſcilicet omnino frigefactas quædam ſilicis fruſtula demiſſa fuerunt. Tunc ſane fractura prodiit nulla. Sepoſitæ fuerunt ampullæ; duos autem poſt dies inventæ ſunt diſruptæ, non tamen methodo iis conſueta, verum illa, qua vaſcula diſrumpuntur: aderat enim in ampulla, quæ majorem ſuſtinuerat calorem, videlicet in ejus fundo, una tantum ſciſſura; & in illa, quæ ſuſtinuerat minorem, præter ſciſſuram ſimilem, ex una hujus parte ſciſſura altera extollebatur, duos cum ipſa angulos rectos efficiens; in parte vero oppoſita aliquanto altius vulnus tranſverſum inſpiciebatur. Fracturas has dico ſimiles eſſe illis, quæ in vaſculis fiunt, quoniam tum illæ cum iſtæ pauciſſimis rimis componuntur, & efformari pariter videntur a ſecantibus quibuſdam planis: neque alias differunt, niſi quantum præcipiunt eſſentia, & neceſſitas veritatum geometricarum; nam cum ampullarum fundus ſphæricus ſit, & vaſculorum forma ſit cylindrica, obſervabantur revera in ſectionibus ampullarum portiones circuli, veluti recognitæ jam fuerant in ſectionibus vaſculorum portiones ellipſis. Ad hæc addam periculum factum etiam fuiſſe de alia bononienſi ampulla, quæ parietibus multo craſſis circumſcribebatur, & cujus figura prope fundum cylindrica potius videbatur, quam ſphærica. Poſtquam ampulla ad vicenas horas carbonibus candentibus ſuperpoſita fuerat, atque deinde ſenſim frigefacta, immiſſum in illam eſt ſilicis fruſtulum. Duo circiter poſt minuta ampulla eſt diſrupta, fracturamque oſtendit minime circularem, ſed ellipticam; ideſt vaſculorum fracturis omnino ſimilem. Si igitur ampullas haſce cenſere poſſumus, de quo nec dubitandum eſt, aliquanto temperaturam amiſiſſe; videtur ob fracturarum analogiam credi poſſe mea vaſcula fuiſſe aliquanto, non autem prorſus, temperata. Hoc tantum eſt, quod clariſſimo Scarellæ concedendum eſſe arbitror, quodque concedo libentiſſime. Ceterum ſinet ipſe ut ſpero, me nihilominus affirmare, multam intercedere diſcrepantiam inter conſtitutionem vitri meorum vaſculorum, & conſtitutionem vitri, ſive ampullarum bononienſium, ſive omnium aliorum vitreorum operum, quæ temperata eſſe judicantur. Quod ſi

non

non eſſet, cur & vaſcula ipſa non dirumperentur, vel permultis, & ſine lege ſciſſuris, ut bononienſibus ampullis communiter accidit, vel minutiſſimis fruſtulis, ut in Montanarianis vermibus, & guttis anglis obſervamus?

Verum enimvero ſatis de vaſculorum conſtitutione dictum eſt: dicamus quædam de fracturarum ratione. Hanc in altero ſermone conſiderans, cum expenderim, primo loco, quæ ſit lapidum vis in frangendis vaſculis, atque ſecundo, an cauſſæ concurrant aliæ ad has præbendas fracturas, & cum de utroque nonnullas proferre conjecturas mihi permiſerim, Scarella ad id ſe oppoſuit, de quo ſecundo locutus fueram. Utinam id feciſſet etiam ad id, quod primo dixeram? Correctiones Philoſophi tam magni, quæ mihi ſemper cariſſimæ erunt, fuiſſent tunc mihi etiam neceſſariæ. At cum non placuerit Scarellæ me de hoc etiam corrigere, neque ei, neque cæteris diſpliceat, ſi me ipſe corrigam. Quo in faciundo breviſſimus eſſe contendam. Nihil enim facilius. Nemo eſt, qui gaudeat longa oratione reprehendi.

Excogitaveram, formula quadam exprimi poſſe quantitatem vis, quam exercent lapides in hiſce fracturis. Formulam autem hanc dicebam me potius ſupponere, quam ſtatuere. Melius ſane erat, eam ne ſupponi quidem. Sique ſupponenda erat aliqua, mihi videtur hoc fieri debuiſſe tali pacto. Credo nempe, quod pariter antea credebam, quodque tunc argumentis ſatis firmis, ni fallor, probavi, concedendum eſſe lapidum actionem tanto majorem haberi, quanto majores ſunt & eorum durities, & gravitas, & angulorum acuties, quibus vitrum urgent: quoſque angulos jam ego tangentes appellaveram, magis proprie ferientes appellaviſſem. Conſideranda ulterius eſſet directio, qua anguli vitrum impellunt, ſed hanc, commodi ergo, eamdem ſemper eſſe fingemus, ut ea abſque errore in hoc virium calculo omitti poſſit: quam autem fictionem cæterum agnoſco, & multo licentioſam eſſe, & multo longe a veritate aberrare. Vis interea, qua ſuo munere funguntur lapides in his diſruptionibus, reſpondere debet vitri reſiſtentiæ, quæ eſt ſuperanda: & ideo quanto major eſt reſiſtentia vitri ſuperata, tanto majorem eſſe vim ſuperantem arbitrabimur: & quoniam reſiſtentia iſta tum majore tempore vincitur, tum minore, fateri etiam debemus, tanto majorem vim eſſe, quanto minus eſt tempus, ideſt quanto major eſt

ve-

velocitas, qua vincitur reſiſtentia; itaque vis reſpondebit non ſoli reſiſtentiæ, ſed & reſiſtentiæ, & ſimul velocitati, qua reſiſtentia vi obtemperat, & cedit. Quæ omnia ſi concedantur, mihi videtur, denominatis: vi frangente $= v$, gravitate lapidum $= g$, eorum duritie $= d$, acutie angulorum ferientium $= a$, reſiſtentia vitri $= r$, tempore $= t$; mihi videtur, inquam, dici poſſe $v = gad$, & $gad = \frac{r}{t}$. Ex quo ſtatim apparet, ſi vel una, vel plures ex primi membri ſecundæ æquationis quantitatibus fiant $= o$, tunc nullum obtineri effectum niſi tempore infinito: ſupponatur enim $d = o$; habebitur $ga \times o = \frac{r}{t}$, & idcirco $t = \frac{r}{ga \times o} = \frac{r}{\bullet}$.

Si vero reſiſtentia ipſa fiat $= o$, aliquod pariter oportebit ex tribus vis elementis fieri $= o$, ſicque vim ipſam evadere $= o$: ſupponatur ergo $r = o$, en $gad = \frac{o}{t}$, quod idem eſt ac dicere $gad = o$. Demum ſi fiat tempus $= o$, vis erit infinita: ſit revera $t = o$, & tunc erit $gad = \frac{r}{o}$.

Hæc, Sodales doctiſſimi, ſubſtitui cupio illis, quæ jam dixeram de vi fracturarum, quas in vaſculis, quibus continebantur, lapides producebant. Quod ſi correctiones haſce meas credatis forſan errores eſſe novos, & ego illico vobiſcum credam. Vos tantum rogo, ut notetis utique, cum uſque adhuc locutus ſim de hac vi, eamque formulis ſubjicere quæſiverim, me nihil aliud intellexiſſe præter eam, quam in his fracturis lapides ipſi contra vitri reſiſtentiam adhibent, hanc enim conſideravi veluti cauſſam fracturarum præcipuam, qua ſcilicet poſita effectus ipſe conſequenter obtineatur. Cæterum primo illo ſermone proponere auſus fui alias concurrere cauſſas, quas nec tunc nec modo placuit mihi a formula comprehendi. Etenim aſſerui, potius *ut dubium .... quam ut ſyſtema*, aerem externum ſe ſe immittendo in exigua vulnera a lapidibus facta, aliquid præſtare. Sed etiam ſi aer ſummopere juvaret ad iſtas obtinendas fracturas, ſicuti tunc eſſet cauſſa ſuperveniens, & per accidens, ita ipſum arbitrabar nullum habere locum in formula, qua nihil aliud exprimendum erat, præter lapidis niſum, & vitri. Atque idem dicendum eſſet de quacumque alia cauſſa, quæ poſſet ad iſtas fracturas concurrere: quemadmodum ſi, exempli gratia, vulnerato a lapide vitro, in vitro ipſo

ipſo excitaretur elaſticum quoddam principium: quæ cauſſa, quoniam a ſtatu vis mortuæ ad ſtatum vis vivæ tunc tranſiret, ſane & ipſa dicenda eſſet cauſſa ſuperveniens.

Atque regrediendo ad cauſſam illam ſupervenientem, quam induxeram potius *ut dubium .... quam ut ſyſtema*, ideſt ad externi aeris ingreſſum per parvum ex lapide vulnus adapertum, ſuſpicio hæc mea eſt, cum qua clariſſimus Scarella dimicandum ſumit, & experientias promit, quæ, ut ipſe ſub numero 12 citati paragraphi 250 judicat, *hanc ſententiam plane falſitatis convincunt*. Hæc ipſa ſunt Scarellæ verba, in quibus ſi humani hominis benignitas non omnino fortaſſe reluceat, hoc accidit forſan, quod ad has diſputationes magis facit Philoſophi ſeveritas. At vero Philoſophia ſit, quantum velit, rigida, atque aſpera, minime certe erit de Scarellæ urbanitate, atque humanitate dubitandum.

Verum ut accurate Scarellæ referamus objectionem, notandum eſt antea, me oſtendiſſe deſiderium quoddam perducendi meum dubium etiam *ad bononienſes ampullas*, *ad guttas anglas*, *ad vermes montanarianos*. At præciſe de bononienſibus ampullis loquendo ipſe mihi ſe ſe opponit. Et maxima difficultas, ob quam Scarella meam opinionem oppugnat, & veluti falſam condemnat, ex multis experientiis ducitur, quas affirmat ipſe probare *phialas in excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato omni aere, tum qui intra phialas eſt, tum qui eas circumfluit, nihilominus diſſilire perinde ac ſi experimentum in aere caperetur*. Satis demonſtrat, ut arbitror, clariſſimus Scarella ſe ſe adhuc mihi opponere propter guttas anglas, quæ pariter franguntur *in excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato ... aere*; & quodammodo objectionem extendere etiam ad mea vaſcula, quippe qui, ſicuti dictum eſt ſupra, libenter credit ipſa non multum ab ampullis bononienſibus diſcrepare. Ingenioſus, uti eſt, Philoſophus ſyſtema ſibi comparavit, quo pari modo explicare confiſus eſt, & ampullarum fracturas, & guttarum, & vaſculorum. De vermibus montanarianis nihil meminit: hi Scarellæ fortaſſe guttis anglis nimium ſimiles videbantur.

Nunc, Sodales ſapientiſſimi, paullatim declarabo quid ſentiam de harum fracturarum cauſſis, quo in faciendo, Scarellæ objectionem, pro viribus quidem meis, tollere curabo. Et dico primum, poſtquam objerit tempus, quod non bre-

breve eſt, ſi mea vitra conſiderentur, breviſſimum eſt autem, aut ampullas, aut guttas, aut vermes conſiderando, poſtquam, inquam, abierit tempus, quo vis lapilli ſive cadentis, ſive prementis, vel vis alia, quæcumque ſit, cum reſiſtentia vitri pugnavit, & vitrum aliquantiſper finditur, utique videtur vis nova gigni, quæ magis magiſque celerem, atque præcipitem fracturam reddit. Quod quamvis non tantum appareat in meis vitris, apparet maxime in ampullis, in guttis, in vermibus. Et ſi experientia oſtendat vim hanc excitari etiam *in excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato ..... aere*, concedere non dubitabo in vitro ipſo principium deliteſcere vis cujuſdam fracturas adjuvantis. Quod ſi ex hoc argumentetur Scarella me ad ejus opinionem acceſſurum eſſe, eum rogo ut malit animadvertere me meam ſequi opinionem, quam antiquitus propoſui. Non ipſi diſpliceat veterem ſermonem meum iterum legere, & prope finem inveniet, me non tantum aeris externi ingreſſui tribuere, ut non ſim contentus huic cauſſæ alias adhuc adjungere: ſic enim illic dico; *Nec nego idcirco in ampullas bononienſes diffringendas, in guttas, in vermes, alias præter hanc concurrere cauſſas. Statuo potius & hanc concurrere cum aliis*. Quam ob rem non ſatis intelligo, cur Scarella aeris ingreſſum *opinionem* Caſalii appellaverit, non alteram: niſi hoc ipſe fecerit, ut occaſionem quamdam captaret differendi mecum, ſicque me in doctiſſimum ejus librum introducendi, ob quem honorem vere ſummum ipſius liberalitati gratias habeo quam maximas.

Verum ut clarius explicem, abditam hanc cauſſam, quam admittendam eſſe cenſeo, quæque valde differt ab illa, quam Scarella poſuit, hac methodo procedam. Vitrum ſubſtantiam eſſe multo elaſticam, minime dubitandum eſt. Celebris Thomas Hobbeſius *in Capite V. Problematum Phyſicorum, in quo tractat de duro, & de molli*, præter quam quod a cæteris doctiſſimis rationibus, & obſervationibus ſummam vitri elaſticitatem deducit, ejus etiam exiſtentiæ argumentum colligit multo ingenioſum a continuo, & familiari phœnomeno; mirabili ſcilicet reflectendi facultate, qua ſpecula vel leviſſimas objectorum imagines remittunt. Neque amplius credo demonſtrationem elaſticitatis vitri deſiderandam eſſe poſt id, quod divinus docuit Nevtonus *in ſcholio ad calcem legum motus adjuncto*. Ibi exponit Auctor, ut probe ſcitis, doctiſſima experimen-

menta de concurſu, & ictu, & reflexione corporum; ob quorum cauſſam opus eſt ei conſiderare elaſticitatem corporum, quibus experimenta capiuntur. Quod quamvis in vitro perfectam elaſticitatem non inveniat, quam in nulla invenire fatetur corporum ſpecie, ſaltem elaſticitatem tantam eſſe in vitro cognoſcit, ut ſtatuat de duabus pilis vitreis, quæ ad congreſſum, atque ad ictum veniant, earum velocitatem relativam concurſus ſic ſe habere ad velocitatem relativam reflexionis uti 16 ad 15. Elaſtica igitur cum ſit, imo maximopere elaſtica, ſubſtantia vitri, ſatis clare patet ipſam compreſſiones, & dilatationes ingentes ſuſtinere poſſe, cum ingentes ſint cauſſæ, quæ eas producant. Placuit doctiſſimo Geminiano Montanario vitri dilatationes inſpicere, ope elegantis experimenti. Curavit enim, ut nonnulla conficerentur fila vitrea, quæ ob diametri exiguitatem chordis cytharæ aſſimilabantur. Deinde ferro cuidam immobili altera filorum extremitate commiſſa, cum extremitas altera manu diſtrahebatur, fila ſenſibiliter protrahi obſervavit, & magis ſubtilia magis produci, minus autem produci ſubtilia minus; hoc refert Auctor in *Epiſtola de vitris temperatis Comiti Hieronymo Savorgniano ſcripta*; in qua etiam exhibet expreſſam lineola quadam acquiſitam unius ex his filis longitudinem. Et hoc experimentum eſt, de quo etiam loquitur clariſſimus Donatus Roſſettus *in capite* XVI. ſui operis *de Compoſitione, atque de Paſſionibus vitrorum*.

At ergo cum vitrum tanta elaſticitate gaudeat, & poſſit ob parvas adhuc cauſſas tam ſenſibilem diſtractionem ferre, mihi videtur facile eſſe hoc argumentari; videlicet extracto vitro a fornace, in qua ignis, potentiſſima ſane cauſſa, ipſum magnopere dilatabat, cum ipſum improviſo in frigidum locum transferatur, partes ejus exteriores neceſſum eſſe uno quaſi temporis momento, & frigeſcere, & conſtringi, & obdureſcere; quo poſtea fit, ut paullatim interiores partes frigeſcentes nec prorſus obdureſcere, nec conſtringi queant. Qua propter in totali refrigeratione componitur ex vitro, ut ita dicam, elaſtrum quoddam heterogeneum; ideſt quod ad partes externas elaſtrum conſtipatum ad dilatationem tendens, quod autem ad internas partes, quarum major eſt numerus, elaſtrum diſtractum indigens contractione: qui interim duo contractionis, & dilatationis niſus, unus adverſus alterum pugnans, quique ſimul, & cum figura vitri, & forſan cum quadam alia

eſſentiali ejus proprietate juncti, continue eliduntur. Itaque vis tota hujus mirabilis elaſtri contineatur oportet in genere virium mortuarum, niſi nova aliqua ſupervenerit cauſſa, per quam reviviſcat. Atque ex hoc ſequi debet, cum frigidior ſit locus, in quo ponitur vitrum e fornace vix ſublatum, majorem eſſe, & conſtipationem ejus externam, & internam dilatationem. At locus hic tam frigidus eſſe poteſt, ut in ipſo vitrum illico diſſiliat: elaſticitas enim ſe in vim mortuam non convertit, niſi vim æqualem inveniat, quæ ei opponitur: & tanta excitari poteſt elaſticitas, ut pellatur, & frangatur, & quaquaverſus diffundatur vitrum, antequam frigeſcendo obdureſcat. Sic contra, animadvertendo, quicunque ſit locus, in quo frigeſcat vitrum, intra aliquod medium ſemper ipſum frigeſcere, & medium hoc conſiderando, dico, cum rarius fuerit medium, & ideo ad ſe ſe calefaciendum promptius, vitrum in eo contentum difficilius diſſilire, minuſque externas ejus partes conſtipari, & minus diſtrahi internas. Quocirca diſſimiles habebuntur temperaturæ in vitro, vel ipſum immergendo in ſolum aerem aliquantulum a fornace diſtantem, quod bononienſibus ampullis evenit, vel in oleum, vel in liquefactam ceram, vel in aquam, uti videre eſt in experimentis a doctiſſimis viris Franciſco Redio, & Geminiano Montanario inſtitutis de guttis & de vermibus, & in memorata ejuſdem Montanarii Epiſtola deſcriptis. Hinc etiam colligere oportet, mea vitra, quæ a fornacis igne ad calorem hypocauſti tranſierunt, quod idem eſt ac dicere vitra, quæ fuerunt immerſa in medium, & calidum, & rarum, debuiſſe conſequenter affici temperatura, ſi quæ eſt, minima. In elaſticitate igitur externarum partium valde contractarum, & internarum maxime diſtractarum conſtitui poteſt, ni fallor, principium intrinſecum illius propenſionis, quam habet temperatum vitrum ad ſe ſe diſrumpendum: quapropter ſufficiet cauſſa vel leviſſima, quæ in internas ejus partes agat ob diſtractionem graciliſſimas, eaſque tantillum perturbet, ut internæ ſimul, ac externæ, ſublato æquilibrio, vim ſuam explicent, eamque aliæ viciſſim contra alias exerceant, & partes a partibus dividantur, & amoveantur. Sicque totum, quod ex illis compoſitum erat, reſolvatur, & pereat. Ad hanc amplectendam ſententiam addit mihi animum maximorum Philoſophorum exemplum, quippe qui, etſi nonnihil differant in applica-

cationis methodo, uniformes tamen in hoc ſunt, quod elaſticitati vitri per temperaturam extra ſtatum naturalis tenſionis poſiti cauſſam crepitus ejus, & promptæ diffractionis tribuunt. Videatur id, quod a celebri Geminiano Montanario notatum fuit *in paragraphis* XXIII., *&* XXIV. *alterius de iſtis vitris epiſtolæ Ferdinando* II. *Magno Etruriæ Duci directæ.* Sapientiſſimus Thomas Hobbeſius *in ſupracitato Dialogo*, poſtquam ſubtilem, atque doctam opinionem propoſuit de diſpoſitione partium guttarum anglarum, affirmat guttas haſce diſrumpi, & diſſilire (iſtis præciſe verbis utitur Auctor) *in particulas innumerabiles, velut arcus fragilis, & nimium tenſus rupto nervo.* Samuel Clarkius Philoſophus vere ſummus *in annotatione ad paragraphum* 52 *capitis* 22 *partis* I. *Phyſicæ Jacobi Rohaultii* ſic ait; *Quoniam vitrum eſt corpus vi reſiliendi præditum, probabile eſt lacrimam hanc vitream ea ratione confringi, qua arcus chalybeus ſubito remiſſus nonnunquam diſſilit.* Et puto etiam opinionem doctiſſime, atque elegantiſſime a Sodali noſtro Jacobo Belgrado *in Acroaſi de Phialis Vitreis* propoſitam, & a Sodali altero Ludovico Blancono *in prima ex ſuis Epiſtolis Phyſicis* tam ſtudioſe declaratam, & illuſtratam non multum ab opinione mea diſcrepare.

Sed pluſquam ſatis dictum fuit, ut intelligat Scarella me negaturum minime eſſe in temperato vitro principium intrinſecum, e quo adhuc pendeat impetuoſa, & præceps ejus fractura, & conſequenter me eſſe conceſſurum vel *in excipulo machinæ pneumaticæ exanthlato.... aere* vitrum temperatum violenter diffringi. Verum ex hoc non tam libenter argumentabor negandum omnino eſſe, aliquid in hoc phœnomeno ab ingreſſu aeris ſuppeditari. De qua antiqua mea dubitatione antequam quaſdam novas rationes exhibeam, precor digniſſimum Scarellam, ut animadvertat Philoſophos magni nominis non deeſſe, qui aeris externi ingreſſui fracturas iſtas crediderint: immo crediderunt majori audacia, quam ego: nam ipſi non ſuſpicati fuere cauſſam hanc *concurrere cum aliis*, ſed ſtatuerunt ab hac ſola effectum abſolute deduci. Petrus Polinierius *in experimentis Phyſicis* interim dum explicationem experimenti XVII. exponit, quod nimirum in gutta angla verſatur, ſic ait, *quando frangatur extremitas....* guttæ, *vel quando aliter in ea ſit apertio quædam, materia ſubtilior aere, quem ſpiramus, & denſior materia, quæ in ipſa includitur,...*

ipſam copioſe & vehementer per factam apertionem ingreditur; quoniam ad ingrediendum pellitur ab illa, quæ eam circumdat. Et paullo poſt conſiderans Auctor guttam diſrumpi in vacuo machinæ pneumaticæ, & etiam frangi vel immerſam in aqua, vel in quodam alio fluido, addit hoc; *quia aer iſte ſubtilis, qui exanthlari nequit, quique inter fluida illabitur, impetu ingreditur in has guttas.* Jacobus Roaultius *in articulo* 52 *capitis* 22 *ex parte* I. *ſuæ Phyſicæ* hæc promit de gutta, quæ referam verbis celebris Clarkii, qui Phyſicam Roaultii, quam doctiſſimis notis ornavit, latine reddidit; *cum faſtigiatus illius apex abrumpitur.... reteguntur ampliorum meatuum introitus; qua cum craſſiores materiæ ſubtilis partes irruant, indeque ad omnem ſuperficiem per meatus in formam coni faſtigiatos ſumma celeritate ferantur; vitri partes diſiiciantur quaquaverſum, & in tenuiſſimum pulverem comminuantur neceſſe eſt.* Et ſane colligitur *ex articulo 36 ejuſdem capitis, & ex articulo* 11 *antecedentis* Auctorem, cum dicat ingreſſum partium craſſiorum materiæ ſubtilis, nihil aliud intelligere præter aeris ingreſſum. Celebris Clarkius ad hanc crepitus, & diffractionis vitri cauſſam elaſticitatem adjunxit ipſius vitri. Ita Clarkius, non Roaultius, cui ſatis eſſe videbatur aeris ingreſſus. Neque ſileam de Patre Antonio Maria Copelloto jam clariſſimo Profeſſore in Mediolanenſi Sancti Alexandri Univerſitate. Hic in doctiſſimis theſibus, quas publice ejus Diſcipuli anno 1759 propugnabant, loquens primum de guttis, deinde de ampullis magis magiſque meum dubium de aeris ingreſſu auxit, cum in hoc ille veram ponens phœnomeni cauſſam, iſtam exprimere dedignatus non fuerit per ipſa mea verba, ab antiquo meo ſermone fideliter translata: quod pignus non unicum fuit amicitiæ, qua me proſequitur vir doctus, & humanus. Mentionem adhuc facere deberem de Patre Joanne Maria a Turre, quippe qui *in paragraphis* 1082, & 1083 ſui Operis, cui titulus inſcribitur *Scientia Naturæ*, niſi aeris ingreſſum admittat, veluti ſolam cauſſam exploſionis guttarum, & ampullarum, ipſum admittit ſaltem, veluti primam, & præcipuam.

Sed poſt exempla tam illuſtria, & auctoritates tam graves tamen a Scarella non poſtulo, niſi eum ſinere cauſſam iſtam *concurrere cum aliis*. Et primum, quamvis concedam in vacuo machinæ pneumaticæ haberi exploſionem ſive guttæ, ſive ampullæ, mihi dicat clariſſimus oppugnator, an ab hoc

ſatis

ſatis tute deduci poſſit aerem in phœnomeno nihil præſtare. Vacuum machinæ pneumaticæ non exiſtimatur eſſe vacuum abſolutum, ſed vacuum relativum, in quo & eſt aer, & eſt in eo ſenſibiliter, uti oſtendit aſcenſus hydrargiri in barometro machinæ juncto; & in eo eſt aer denſior illo, qui latere poteſt in interſtitiis vitri, quod ardorem fornacis jam ſuſtinuit: niſi forſan dicamus, vim ignis ſolviſſe, & deſtruxiſſe omnem aerem, quem ſilex, & magis etiam ſal alcali in vitri mixturam induxerunt, & ideo vitri interſtitia omni aere quantumvis tenui, & inſenſibili carere. Animadvertatur ergo, cum intra vacuum machinæ pneumaticæ apertio fiat in vitro, quæ nonnulla detegat interſtitia, an deſit aer, qui in interſtitia percurrat, atque fracturam adjuvet, & crepitum. Nec deerit ſaltem, ſicuti Polinierius notavit, *aer iſte ſubtilis, qui exanthlari nequit*.

Videtur igitur ab experimentis inſtitutis *in excipulo machinæ pneumaticæ* non ſatis colligi poſſe excluſio opinionis de aeris ingreſſu. At diſpliceret ne multum Scarellæ, ſi quis adeſſet affirmans ab iiſdem experimentis contrarium potius deduci? Queratur Scarella de doctiſſimo Mariotto, qui in ſuo *Specimine de aeris Natura* ſe ſe perducit ad examen guttæ anglæ, cujus diffractionem, & crepitum argumentatur, & a tremore partium ob earum elaſticitatem, & ab ipſarum partium nexu admodum parvo, & ab irruptione aeris in interſtitia. Quod Auctor probare contendit, narrans deinde experimenta nonnulla, quorum quartum oſtendit guttas diſrumpi etiam in machina facto vacuo; *quo in caſu*, ait Auctor, *cum niſi duæ hujus effectus cauſſæ agant, ideſt parvus nexus partium, & tremor ob earum elaſticitatem, vitri fragmina ad exiguas vix diſtantias funduntur*. Ita doctiſſimus Philoſophus utitur vacuo, non ad exludendum aeris ingreſſum, ſed ad ipſum demonſtrandum.

Neque præterire debeo, Sodales ſapientiſſimi, maximo me affectum fuiſſe deſiderio hujus videndi experimenti, verum ſpem omnem auferebat haud ſatis ampla recipientium capacitas. Attamen, ut aliquam ſaltem differentiam in phœnomeno cognoſcerem, cum aer eſſet aliquo modo vel attenuatus, vel quadam alia materia implicatus, in mentem mihi venit frangere guttas nonnullas immerſas in aqua. Scio utique notatum eſſe a clariſſimo Saverieno, ſæpe in hac experientia, dum diſſilit gutta in aqua immerſa, vas vitreum ſimul diſſilire aquam continens. Imo relatum fuit paucos ante menſes digniſſimo

So-

Sodali noſtro Petronio Matteuccio a docto Viro e Societate Jeſu proxime obſervatam fuiſſe Brixiæ hanc duplicem ſimultaneam fracturam, quæ inſuper, ut referebatur, ſtrepitum edebat ſimilem exploſioni illius parvæ bombardæ, quæ piſtolla audit; atque experientiam ipſam illic jam conſiderari uti phœnomenon conſtans. Nihilominus placuit mihi experimentis operam dare; quod agens Socium habui ſupralaudatum Matteuccium. Nulla interea ſenſibilis differentia apparuit, vel dirupta fuiſſet gutta in vaſe vitreo aqua vacuo, vel in ipſo vaſe aqua pleno, præter fragorem aliquanto majorem in primo caſu, quam in ſecundo. Cæterum nec Matteuccio, nec mihi unquam ſe prodidit fractura vaſorum vitreorum, quæ & aquam, & diſſilientem guttam continebant, etſi de horum ſpeciebus bene multis periculum fecimus, mutantes pluries, & vitri ſubſtantiam, & parietum denſitatem, & vaſorum figuram, & magnitudinem, & frangentes guttas modo apicem extra aquam extollentes, modo aqua omnino immerſas. Placuit nobis etiam, præter guttas anglas, frangi intra aquam ampullas bononienſes. Nec tamen in hoc altero experimentorum genere vaſa aquam capientia diſrumpebantur. Ampullæ vero fractura videbatur tardius fieri. Fragor vix ſenſibilis. Ampulla una rimas dedit ita eleganter diſpoſitas, ut videretur fuiſſe in ejus fundo flos venuſtiſſimus delineatus. Sed ad differentiam fracturarum redeundo, ſive guttarum, ſive etiam ampullarum, quæ a diminuta aeris actione expectabatur, ſane video me eam forte potuiſſe majori ſpe inveſtigare, ſi aqua diſtillata uſus fuiſſem, eamque etiam expurgaviſſem ope machinæ pneumaticæ, prout poſſibile eſſet, ab omnibus aeris reliquiis, & dirupiſſem aut guttam, aut ampullam poſita hac eadem aqua in vacuo: ſed alias forſan occaſio mihi erit ad hoc confugiendum experimentum, ſique uſque adhuc quæſitam differentiam inſpicere ipſe nequivi, ſatis ſuperque erit celebrem Mariottum eam per fracturam guttæ in vacuo machinæ pneumaticæ cognoviſſe.

At vero etiamſi nulla prorſus differentia prodiret, etiamſi nihil tribuere vellemus, vel reſiduo aeris in recipiente remanentis, vel aeri aquæ mixto, plura alia, ut credo, ſupereſſent argumenta, ut demonſtraretur in illis ſaltem effectibus, qui intra liberum aerem accidunt, cauſſæ eorum partem ipſum aerem eſſe. Niſi leges & Hydraulicæ, & Aerometriæ

va-

varient, neque aer proprietates ſuas amittat, minime dubitandum eſt, quin ipſe ſuperficies corporum, ideoque etiam vitrorum, circumdans, eaſque premens, ſi in rimam quamdam incurrat, neque ex ea fluidum aliud ſaltem æque premens ipſi opponatur, ingrediatur illico in diffiſſum corpus, (quid eſt enim, quod ſe ſe illi ſatis opponat?) & majori ingrediatur impetu, cum vel major erit ejus preſſio, vel minor preſſio fluidi interni, quod ei opponitur; & minori impetu, cum aut preſſio ejus ſit minor, aut preſſio fluidi oppoſiti major. Ex hoc principio veluti conſequentiæ deveniunt experimenta a doctiſſimo Sodali noſtro Jacobo Belgrado inſtituta in ſphærulis vitreis aere extenuatiſſimo plenis; quæ, cum in eas aeris externi ingreſſus permittatur, magno ſtrepitu diſſiliunt. Hæc aliaque elegantiſſima experimenta Auctor in prima ex ſuis epiſtolis *de Rebus Phyſicis*, *& de Monumentis antiquis* deſcribit. Sed ut idem applicemus principium ad temperata vitra, remanet tantum expendere, an in temperatis vitris hæc inveniantur interſtitia, vel vacua, vel materiæ exiliſſimæ referta. Quæ interſtitia, etſi a temperatorum vitrorum conſtructione, nempe ab interna eorum raritate facile deducenda eſſent, hæc gaudeo ab ipſa experientia oſtendi. Quoniam fortaſſe prolixus jam fui magis, quam par erat, phœnomena atque experimenta quamplurima prætermittam de aliis ſubſtantiis, quæ ope ignis temperaturam contrahunt: quæque ſaltem valerent, ut demonſtrationes ab analogia. Atque hæc debeo Collegæ noſtro Herculi Lellio Viro de multis rebus perito, de his autem peritiſſimo. Sed veniam ſtatim ad experimenta nonnulla, quæ in temperato vitro ipſe ſuſcepi. De bononienſibus ampullis periculum eodem modo facere aggreſſus ſum, quo Montanarius *in citata epiſtola Ferdinando* II. de guttis anglis ſe feciſſe affirmavit. Sex nempe bononienſes ampullas ſumpſi, atque diligenter examinavi, primum quod uniuſcujuſque eſſet pondus in aere, deinde quod eſſet in aqua, ſicque a ponderum decremento cognovi, quantum eſſet pondus voluminis aquæ æqualis volumini vitri cujuſque ampullæ. Poſtea ſupra carbones candentes unamquamque ampullam imponens, ut candeſceret & ipſa, & ſinens ut, carbonibus paullatim ſe ſe extinguentibus, ipſa quoque paullatim frigeſceret, conatus ſum ab unaquaque ampulla temperaturam auferre. Dein pondus iterum exploravi cujuſque ampullæ tum in aere,

cum in aqua, ex quo intelligens ego, quod pondus eſſet voluminis aquæ æqualis volumini vitri cujuſque ampullæ temperatura ſublata, ſatis perſpicue obſervavi, pondus aquæ notabiliter diminutum eſſe, ideoque diminutum notabiliter eſſe volumen vitri, ſicque auctam eſſe ſpecificam vitri gravitatem, & conſequenter denſitatem ipſius. Denſitas autem acquiſita amiſſam raritatem demonſtrat: ideſt patefacit, jam fuiſſe in temperato vitro poros, quorum vel numerus magnus erat, vel magna amplitudo, quod idem eſt ac dicere, ſive una ratione, ſive altera fuiſſe in vitro interſtitia. Potius quam unam poſt aliam experientias de iſtis ſex ampullis narrarem, placuit mihi, ut brevis in uno ſaltem loco viderer, has omnes committere tabulæ, quam nunc vobis exhibeo, quamque cupio huic meo ſermoni adjungi. Gratus animus & obſequium, quibus afficere obſtringor clariſſimos Sodales noſtros Lauram Baſſiam, & Joſephum Verattum ejus Conjugem præterire non ſinunt me abſque eorum directione, & auxilio nullum ex hiſce experimentis confeciſſe. Imo cum tantum in his fuerit Sodalium opus, cumque videatur, ut ita dicam, Montanarius hæc ſuggeſſiſſe, habeantur iſta, ſi placeat, non ut mea, ſed ut experimenta ab ipſis Montanario, & Baſſia, & Veratto, a tribus ſcilicet perilluſtribus ſane Philoſophis, inſtituta.

In his autem experimentis nonnulla breviter animadvertenda ſunt. Primum: cum Montanarius in guttarum experimentis variis temporibus confectis expendiſſet gravitatem ſpecificam aquæ, intra quam guttas librabat, ne parvæ adhuc differentiæ negligerentur; ego quidem volui in experimentis ampullarum altitudines thermometri, & barometri notare, quæ indicium præbere poterant de quadam differentia ponderis tum aeris, cum aquæ, & ideo ponderis corporum, quæ vel in aere, vel in aqua ponderabantur. Secundum: Montanarius non invenit conſtipationem guttarum ſemper fieri proportione conſtanti. In ampullarum experimentis viſa eſt conſtipatio variabilior. Varietas aliqua tribui poteſt differentibus vitrorum qualitatibus, & ampullarum figuris: varietatem autem magnam cenſendum eſt oriri a methodo, qua ampullæ temperatura orbatæ ſunt, atque a quodam forſan eventu minime obſervato, qui methodum ipſam magis perturbaverit; auferebatur enim, ut dictum eſt ſupra, temperatura ope carbonum candentium, qui ſenſim extinguebantur, neque dubitan-

Tabula exhibens inſtituta in bononienſibus ampullis experimenta.

Ampulla.	Ampullæ in naturali earum ſtatu explorabantur. Pondus Ampullæ in aere. Grana.	Pondus Ampullæ in aqua. Grana.	Differentia ponderum: ſeu pondus voluminis aquæ æqualis volumini ampullæ. Grana.	Pondus voluminis vitri æqualis volumini aquæ, cujus pondus grana 1000. Grana.	Thermometrum Reomurianum. Gradus ſupra congelationem.	Barometrum. Dig. Lin.	Ampullæ explorabantur temperatura ſublata. Pondus Ampullæ in aere. Grana.	Pondus Ampullæ in aqua. Grana.	Differentia ponderum: ſeu pondus voluminis aquæ æqualis volumini ampullæ. Grana.	Pondus voluminis vitri æqualis volumini aquæ, cujus pondus grana 1000. Grana.	Thermometrum Reomurianum. Gradus ſupra congelationem.	Barometrum. Dig. Lin.	
I.	2286	$1382 + \frac{5}{10}$	$903 + \frac{5}{10}$	$2532 + \frac{9}{10}$	19	27 . 5							Vitrum ſupra carbones candentes fuſum eſt.
II.	2216	1339	877	$2525 + \frac{6}{10}$	19	27 . 5	2217	1356	861	$2574 + \frac{9}{10}$	pene 20	27 . 5	Ampulla multum ignem ſuſtinuit. Sublata temperatura immiſſum in ampullam ſilicis fruſtulum nihil præſtitit. Binos poſt dies inventa eſt in ampullæ fundo rima ſemicircularis.
III.	1890	1144	742	$2547 + \frac{8}{10}$	pene 20	27 . 5	1889	1149	740	$2552 + \frac{7}{10}$	pene 20	27 . 5	Ampulla hæc minorem ignem concepit. Reliqua ut ſupra, præter quam quod rima alia perpendiculariter extollebatur ex uno latere rimæ ſemicircularis: atque parva etiam rima horizontalis in oppoſita parte apparebat.
IV.	$1915 + \frac{5}{10}$	1160	$755 + \frac{5}{10}$	$2535 + \frac{4}{10}$	20	$27 . 5 + \frac{1}{2}$	1920	1163	757	$2536 + \frac{1}{10}$	non obſervatum.	non obſervatum.	Factum fuit, ut ampulla candeſceret, atque in eodem ſtatu media hora remaneret: ſub cujus temporis fine rima apparuit partem imam colli amplectens, ipſumque tandem a reliquo ampullæ corpore diviſit. Frigefacta ampulla, immittitur in eam ſilex: ſed fruſtra.
V.	2233	1351	882	$2531 + \frac{7}{10}$	$18 + \frac{1}{2}$	27 .	2288	1360	868	$2566 + \frac{8}{10}$	17	27 . 5	Suſtinuit ampulla ignem viginti horis. In frigefactam ampullam immiſſus ſilex nihil prodit.
VI.	1830	1107	723	$2531 + \frac{5}{10}$	$18 + \frac{1}{2}$	27 .	$1830 + \frac{5}{10}$	1114	$316 + \frac{5}{10}$	$5783 + \frac{5}{10}$	17	27 . 5	Ampullæ figura pene cylindracea erat; parietes ejus multo craſſi. Suſtinuit ampulla ignem viginti horis. Ampulla frigefacta, inque eam immiſſo ſilice, nihil obſervatum eſt. Verum poſt duo minuta rimam ellipticam ampulla dedit.

tandum eſt, quin fornacis hypocauſtum tutiorem methodum ſuppeditaſſet. Fornax vero experimentorum tempore ſilebat.

Poſtquam demonſtratum eſt, in vitris interſtitia latere, & in temperatis vel majora, vel majori numero, ſicque ratio quædam aſſignata, qua minus inconſideratum videatur meum dubium de aeris ingreſſu, licebit ne duo tantum petere? Et ſane precor æquiſſimum Scarellam ne hæc etiam nuncupet opiniones, quæ ego ne dubia quidem appellare audeo.

Poſtulo primo loco, num aer, cujus copia multo major, ut probant celebres obſervationes, & doctrinæ Halleſii, in vegetabilibus hæret, quam in lapideis, ſi tamen aer poſt ardorem fuſionis in ſubſtantia vitri ſervetur, poſſit eſſe cauſſa, ob quam vitra viridia fragiliora vitris albis appareant. Cum enim major quantitas ſalis alcali, minorque ſilicis ad hæc componenda adhibeantur, quam ad illa, videri poteſt majorem quantitatem aeris colligi in interſtitiis vitrorum alborum, & ideo interſtitia minus vacua eſſe, & magis reſiſtentia: in interſtitiis vitrorum viridium contra.

Peto ulterius, ſi quidem vera ſit obſervatio, quam niſi judicarem notiſſimam, & familiarem, experientiæ multæ præ manibus mihi eſſent ab humanitate ſupralaudati Herculis Lellii exhibitæ, ut eam abunde confirmarem: ideſt ſi verum ſit vitra, in quibus adeſt rima quædam, ut plurimum hieme omnino dividi, & dirumpi, peto, inquam, utrum una ex cauſſis hujus extremæ diſtractionis, & complementi, ut ſic dicam, fracturæ cenſeri poſſit aer, qui hiemali tempore denſior fit, & idcirco majorem exercet gravitationem, proindeque majori vi ſe ſe in vitrorum rimas immittit.

At finem tandem habeat ſermo nimis longus, & forſan inutilis. Timeo, Sodales doctiſſimi, ſi quando, nunc certe me multo vos tædio affeciſſe. Et pariter timeo me moleſtum futurum eſſe clariſſimo Scarellæ, ſi ejus benignitas eum ipſum ſuadeat, ut ſermonem hunc legere non dedignetur. Quod ſi accidat, Virum clariſſimum rogo, ut poſtremo animadvertat, me de ſyſtemate, quod ipſe approbat, nec verbum quidem feciſſe: clarum autem eſt, cum exiſtimem ſyſtema alterum tuendum eſſe, quamdam fortaſſe difficultatem mihi non deficere contra ſuum. Verum numquam loqui ſuſcepiſſem, ut objicerem tanto Viro: ſatis ſuperque mihi erit, ſi quis credat ſermonem hunc me aliquo modo ab ejus ſtrenuis objectionibus defendiſſe.

VINCENTII RICCATI.

De Æquivalentia Potentiarum per principia metaphyſica demonſtrata.

EPISTOLA

VINCENTIUS RICCATUS DOMINICO PAVERI SOC. JESU S. P. D.

CUr novas mihi, mi Dominice, moleſtias creas? Dixi tibi coram non ſemel, ac iterum, ſed centies, ac millies, me ignorare, utrum leges mechanicæ neceſſariæ ſint, an contingentes ſolum, & congruæ. Jamdiu me noſti, meamque facilitatem, propter quam identidem in non paucorum reprehenſionem incurro. Quæ ſcio, profero non invitus; quæ autem neſcio, æque non invitus, me neſcire, palam confiteor. Cur nunc datis litteris de eadem re pergis interrogare? ſcilicet ut quod ore tenus dixi me neſcire, illud quoque profitear litteris datis? Mehercule nihil pudet. Non flagito abs te, inquis, quænam ex duabus opinionibus vera ſit, quod, te neſcire, concedo; ſed cuinam animum geras propenſiorem, quod non negabis, te ſcire. Si in proferendis opinionibus meis difficilis videor, ſin minus laudem, ſaltem veniam me mereri exiſtimo. Nam in illis quoque me lapſum eſſe expertus ſum, quæ certo ſcire putabam: quanto facilius erit errare a veritate in illis, quæ in opinione verſantur. Verum ne mihi ſuccenſeas, quod minaris: non ſine magna errandi formidine ajo, me in eam opinionem libentius ferri, quæ leges mechanicas ita neceſſarias ſtatuit, ut aliis ſubſtitutis maxima oriretur in natura rerum confuſio. Quamquam temeritatis meæ me jam pœnitet; tamen ne prorſus temere videar loqui, quibus rationum momentis adducar, diligenter exponam.

Leges mechanicæ, quæ hactenus detectæ ſunt, vel ad motum pertineant, vel ad æquilibrium, plerumque probari non poſſunt, niſi initium ducamus a principio, quod experientia ſuppeditat. Experimenta adhibentur tuta illa quidem, & ab omni dubitatione ſejuncta; ſed evidentiam creant ſolum phyſicam,

ſicam, quæ rem oſtendit ita eſſe, non autem neceſſario eſſe. Attamen inter tot leges a mechanicis receptas, quas nulla alia ratione probare ſcimus, una exiſtit, quam ſolis adhibitis principiis metaphyſicis, ſummaque evidentia præditis, demonſtramus, quamque proinde neceſſariam eſſe audacter pronunciamus. Lex iſta docet, duabus potentiis uni eidemque puncto applicatis, quas per latera parallelogrammi exprimimus, eam æquivalere, quæ a diagonali repræſentatur. Inventum hoc, quod facio plurimi, acceptum referimus Danieli Bernoullio viro ingenioſiſſimo, & editum legitur in Academiæ Petropolitanæ Tomo primo. Illud tamen ægre ferebam, aliquot propoſitiones, quæ a Bernoullio probantur, calculum includere longum, atque difficilem. Quare in eo poſui operam, ut eaſdem facilius demonſtrarem, atque elegantius. Res omnis ex ſententia ceſſit. Itaque ut hoc genus demonſtrationis cognoſcatur magis, quando me coegiſti, ſine ut ſeriem demonſtrationis exponam integram: quod præſtans a Bernoulliana methodo ne latum quidem unguem recedam, ſed tantum demonſtrationibus facilitatem maximam conciliabo: immo omnia expediam per ſolam geometriam linearem, neque unquam ſpecies analyticas advocabo, hoc ſolum contentus ut bis, aut ter indicem in ſcholiis appoſitis, quo pacto propoſitio facilius per analyſim demonſtretur. Jam ad rem propoſitam accedens hæc axiomata præmitto.

Axioma primum. Potentia æquivalens duabus potentiis uni puncto applicatis, & ad quemcumque angulum concurrentibus, æqualis eſt, & contraria illi, quæ eaſdem in æquilibrio ſuſtineret.

Axioma alterum. Potentia æquivalens duabus conſpirantibus, ſeu eadem directione præditis, earum ſummam exæquat.

Axioma tertium. Potentia æquipollens duabus, quæ prorſus contrariæ ſint, harum differentiæ æqualis eſt. Quare duarum potentiarum, quæ æquales ſint, & contrariæ, æquivalens nulla eſt.

Axioma quartum. Directio potentiæ æquivalentis duabus æqualibus uni puncto applicatis angulum quemcumque, quem ipſæ faciunt, dividit bifariam.

Axioma quintum. Par potentiarum in puncto concurrentium habeat æquipollentem, quæ dividat angulum ab ipſis effectum: manifeſtum eſt, par aliud potentiarum proportio-

nalium eumdem angulum efficientium habere æquipollentem proportionalem, quæ angulum ſimiliter dividit.

Axioma ſextum. Potentiæ æquivalentes pro æquivalentibus ſemper ſubſtitui poſſunt.

Axioma ſeptimum. Si potentiis æquivalentibus æquivalentes addas, vel demas, omnes vel reſiduæ erunt æquivalentes.

Axioma octavum. Si angulum, quem duæ potentiæ æquales concurrentes faciunt, minuas, & facias acutiorem, creſcet potentia æquipollens, ſi angulum augeas, potentia æquivalens minuetur.

Axioma nonum. Tres potentiæ æquales, quæ faciant inter ſe angulos æquales grad. 120, quieſcunt in æquilibrio, quia nulla eſt potior ratio, cur una reliquis prævaleat. Applicatæ ſint puncto P (*Fig.* 1.) potentiæ æquales PA, PB, PD, ita ut anguli APB, APD, BPD ſint omnes graduum 120, ideſt æquent partem tertiam rectorum quatuor: quum paria ſint omnia, neceſſario in æquilibrio ſe ſuſtinebunt.

Corollarium primum. Ex axiomate primo colligitur, potentiam æquivalentem duabus PA, PB eſſe PC æqualem, & contrariam PD, quæ dividet angulum APB bifariam, & quæ cuilibet ex duabus PA, PB æqualis erit.

Corollarium ſecundum. Jungantur AC, BC. Quoniam angulus APC grad. 60 eſt angulus trianguli æquilateri, & PA, PC æquales ſunt, PAC erit triangulum æquilaterum; idem dicatur de triangulo PBC: igitur figura quadrilatera PACB eſt parallelogrammum, immo rhombus, a cujus diagonali PC exprimitur potentia æquivalens duabus PA, PB.

Corollarium tertium. Agatur altera diameter AB, quæ ſecabit PC bifariam, & ad angulos rectos in puncto E: igitur duabus PA, PB æquivalet potentia 2. PE: quæ PE normalis eſt rectæ AB.

Theorema primum. Duabus potentiis æqualibus concurrentibus ad angulum rectum æquivalet ea, quæ exprimitur per diametrum quadrati, cujus ipſæ ſunt latera.

Demonſtratio. Si potentiæ æquales PA, PB (*Fig.* 2.) coeant in angulo recto, completo quadrato PACB, ductaque diagonali PC, hæc erit potentia eiſdem æquivalens. Quoniam ex ax. quarto potentia æquivalens duabus PA, PB bifariam debet ſecare angulum APB ejus directio ſuper diametrum cadat, neceſſe eſt. Quod ſi eidem æqualis non eſt, erit vel

ma-

major vel minor. Sit primo potentia æquivalens P K major P C. Ducatur A B ſecans diametrum P C in E bifariam, & ad angulos rectos. Conſtat P E eſſe tertiam proportionalem poſt P C, P A, ſeu P B: ergo quum P K ſupponatur major P C tertia proportionalis poſt P K, P A, ſeu P B erit minor P E. Sit P F, ductaque M N per punctum P normali diametro P C, abſcinde P M, P N æquales P F. Quoniam duabus potentiis P A, P B ſupponitur æquivalere P K dividens angulum rectum bifariam, ex axiom. quinto duabus potentiis proportionalibus P M, P F æquivalebit proportionalis P A; ſimiliter duabus P N, P F, æquipollebit P B. Igitur ex axiom. ſexto ſubſtitutis æquivalentibus, quatuor potentiis P M, P N, P F, P F æquivalebit P K: ſed primæ duæ æquales ſunt & contrariæ, & propterea æquivalentem habent nullam; duæ reliquæ ſunt æquales & conſpirantes, & habent pro æquivalente 2 P F: ergo 2 P F æquivalet P K; ergo quoniam conſpirantes ſunt, 2 P F æquat P K: ſed hoc eſt abſurdum, quia quum P F ſit minor P E, erit 2 P F minor P C, qua major poſita eſt P K: igitur potentia æquivalens PA, P B non poteſt eſſe major P C. Eodem prorſus ratiocinio probabo non poſſe eſſe minorem. Ergo eidem æqualis eſt. Q. E. D.

Corollarium. Quoniam P E eſt dimidium P C, conſtat potentiam 2 P E æquivalere potentiis PA, P B.

Scholium primum. Analyſis propoſitionem facilius oſtendit. Nam vocata $= x$ æquipollente duabus P A, P B, quas voco $= a$, inveni tertiam proportionalem poſt x, a, quæ $= \frac{aa}{x}$. Huic ſeca æqualem P M, P N, P F. Eodem modo probabitur quatuor potentias P M, P N, 2 P F æquipollere x: ergo cum primæ duæ æquales ſint, & contrariæ, fiet 2 P F æquivalens x: ergo, quoniam ſunt conſpirantes, 2 P F $= x$, ſeu $\frac{2aa}{x} = x$, ſeu $x = a\sqrt{2}$, hoc eſt A C diametro quadrati.

Scholium alterum. Producta C P ita ut P D $=$ P C, manifeſtum eſt per axioma primum tres potentias P D, P B, PA quieſcere in æquilibrio: igitur producta A P, ut P O $=$ PA, conſtat P O $=$ P B eſſe æquivalentem duabus P D, P B, quæ ſunt ut $\sqrt{2} : 1$, & angulum continent tribus ſemirectis æqualem: igitur in hac hypotheſi æquivalens erit æqualis potentiæ minori P B, & cum eadem efficiet angulum rectum. Junge

DO, BO. Perſpicuum eſt, figuram DPBO eſſe parallelogrammum. Nam in duobus triangulis DPO, CPA duo latera duobus lateribus ſingula ſingulis æqualia ſunt, atque hæc continent angulos ad verticem: igitur triangula ſunt æqualia quoad omnia: ergo DO æqualis, & parallela AC; ſed hæc æqualis, & parallela PB: ergo DO æqualis, & parallela PB: ergo PD, BO æquales, & parallelæ, & DPBO parallelogrammum. Vides in hoc caſu æquivalentem eſſe diagonalem parallelogrammi, cujus potentiæ ſunt latera. Hoc idem in aliis caſibus deinceps poſſem demonſtrare. Sed quum ſeries demonſtrationis his non indigeat, ſemel adnotaſſe ſufficiet.

Lemma geometricum. Sit rhombus quicumque (*Fig.* 3.) PACB, cujus diametri PC, AB & bifariam, & normaliter ſe interſecant in E. Dividantur bifariam quatuor anguli APE, BPE, ACE, BCE, & formetur novus rhombus PFCG. Ex puncto F age FI parallelam AP, & FM parallelam EP: demum ex M duc MN parallelam AB, quæ ſecet diametrum in O. His effectis ajo primum quadrilaterum PMFI eſſe rhombum ſimilem rhombo PFCG: deinde omnes PM, PI, PN, quæ ſunt æquales, eſſe tertias proportionales poſt CP, PF aut PG: poſtremo PO + PI = PE.

Demonſtratio. Angulus IFP æqualis eſt alterno MPF; ſed hic ex conſtructione æquat IPF: ergo IFP = IPF: ergo IP = IF: ſed figura IPMF eſt parallelogrammum: quum habeat igitur latera omnia æqualia, erit rhombus, qui ſine dubio ſimilis eſt rhombo PFCG, quum æquales ſint anguli MPI, FPG quippe qui ejuſdem FPE dupli. Quod erat primum demonſtrandum. Rhomborum ſimilitudo dat CP: PF = PG, ut hæc: PM = PI = PN. Quod erat alterum. Quoniam tam PI, quam OE eſt æqualis MF, erit PI = EO: ergo detracta OI remanet PO = IE: ergo addita PI eſt PO + PI = PE. Quod erat tertium.

Theorema ſecundum. Si duæ potentiæ æquales PA, PB habeant æquivalentem 2PE (hæc PE dividet AB æqualiter, & ad angulos rectos) duabus potentiis PF, PG dividentibus angulos bifariam, ut in lemmate præmiſſo, eadem 2PE æquivalebit.

Domonſtratio. Rhombi perficiantur ut antea. Si 2PE, aut PC non æquivalet potentiis PF, PG, æquivalens erit aut major, aut minor. Sit primo major, eamque fac PK,

fa-

factaque lemmatis præparatione, ſic ratiocinium inſtituo. Quoniam $PM = PI = PN$ eſt tertia proportionalis poſt PC, & $PF = PG$, tertia proportionalis poſt PK, & $PF = PG$ erit minor $PM = PI = PN$. Atqui PK ponitur æquivalere PF, PG: ergo PF æquivalebit duabus minoribus quam PM, PI, & PG æquipollebit duabus minoribus quam PN, PI ex axiom. quinto. Igitur PK æquivalet quatuor minoribus quam PM, PN, & PI bis ſumpta. Quoniam vero PA, PB æquivalet 2PE, duabus minoribus quam PM, PN æquivalebit minor quam 2PO: igitur quum potentiæ conſpirantes ſint, duæ potentiæ minores quam 2PO, 2PI debebunt non ſolum æquivalere, ſed eſſe æquales PK: ſed $PO + PI = PE$: ergo potentia minor 2PE, ſeu PC æquabit PK, quæ ſuppoſita eſt major PC. Quod eſt abſurdum. Eodem diſcurſu probabo potentiam æquivalentem duabus PF, PG non eſſe minorem PC: ergo erit æqualis.

Scholium. Non longo analyſeos circuitu theorema hoc demonſtratur. Sit $PA = a$, $PF = b$, $PE = c$, æquivalens duabus PF, PG ſit $= x$. Pono PM, PI, PN tertias proportionales poſt x, b, ut ſint $= \frac{bb}{x}$. Fiat $PA : PE :: PM : PO$ ſive analytice $a : c :: \frac{bb}{x} : PO = \frac{cbb}{ax}$. Igitur æquivalens $x = \frac{2bb}{x} + \frac{2cbb}{ax}$, ſive $xx = \frac{2bb.\overline{a+c}}{a}$. Ut cognitarum numerus minuatur, fac advertas, ex angulo APE diviſo bifariam, oriri hanc analogiam $AP + PE : PE :: AE : FE$, aut analytice $a + c : c :: \sqrt{aa - cc} : \sqrt{bb - cc}$: ergo quadrando $\overline{a+c}^2 : cc :: aa - cc : bb - cc$, & permutando, ac primos terminos dividendo per $a + c$, $a + c : a - c :: cc : bb - cc$, & componendo $a + c : 2a :: cc : bb$: ergo $\frac{a+c}{a} = \frac{2cc}{bb}$. Itaque facta ſubſtitutione habeo $xx = 4cc$, ſeu $x = 2c$. Q. E. D.

Theorema tertium. Duæ potentiæ æquales facientes angulum, denotante r angulo recto, qui continetur in alterutra ex ſeriebus r, $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$, $\frac{1}{8}r$, $\frac{1}{16}r$ &c. uſque in infinitum $\frac{4}{3}r$, $\frac{2}{3}r$, $\frac{1}{3}r$, $\frac{1}{6}r$, $\frac{1}{12}r$ &c. uſque in infinitum habent pro æquipollente eam, quæ exprimitur per diametrum parallelogrammi, aut rhombi, cujus ipſæ ſunt latera.

Hu-

Hujuſce theorematis demonſtratio continetur in ſuperiore: Nam ſi A P B ſit angulus rectus, potentiæ æquales PA, PB æquivalent 2 P E. Facta diviſione angulorum A P E, B P E naſcuntur duæ potentiæ terminatæ ad eamdem A B, quæ faciunt angulum $= \frac{1}{2} r$, quibus eſt æquivalens 2 P E. Similiter ſi novi anguli dividantur, orientur potentiæ æquales, quibus 2 P E æquivalebit: ſed in iſta diviſione potentiæ naſcentes ſucceſſive angulos facient, qui in prima ſerie continentur: ergo potentiæ hos angulos facientes terminatæ ad eamdem A B habent ſemper pro æquivalente 2 P E: ſed 2 P E æqualis eſt diametro parallelogrammi, ſeu rhombi, cujus ipſæ ſunt latera: ergo duabus potentiis æqualibus facientibus angulos primæ ſeriei æquivalet potentia expreſſa per diametrum parallelogrammi, cujus ipſæ ſunt latera.

Si primum aſſumas potentias duas facientes angulum $= \frac{4}{3} r$, idem demonſtrabis de potentiis concurrentibus in angulis ſecundæ ſeriei.

Theorema quartum. Sint duo potentiarum æqualium paria, primum (*Fig.* 4.) PA, PB, alterum P F, P G terminata ad eamdem lineam A B; utriuſque autem paris æquipollens ſit 2 P E, a qua bifariam earum angulus dividitur; ſi anguli A P F, B P G contineantur in alterutra ex ſeriebus theorematis ſuperioris, ajo, diviſis hiſce angulis bifariam, potentiis P H, P K æquivalere 2 P E.

Demonſtratio. Producantur P F, P G in M, N, donec P M, P N æquent PA, P B. Jungantur A M, B N, & P H, P K producantur in O, Q, & ab his A M, B N bifariam, & normaliter dividentur. Agantur O Q, M N, quæ erunt parallelæ A B, & æqualiter ſecabuntur a P E producta in R, S. Quum anguli A P M, B P N in ſeriebus ſuperioribus contineantur, potentiis duabus PA, P M æquivalet 2 P O; item potentiis P B, P N æquivalet 2 P Q: igitur potentiis 2 P O, 2 P Q æquivalent quatuor PA, P B, P M, P N, ſed primis duabus ex hypotheſi æquivalet 2 P E, duabus reliquis æquivalet 2 P S, quia quum ſupponamus potentiis P F, P G æquivalere 2 P E, neceſſe eſt, ut duabus P M, P N proportionaliter æquivaleat 2 P S: igitur potentiis 2 P O, 2 P Q ſunt æquivalentes 2 P E, 2 P S, ſive potentiis P O, P Q æquivalent P E, P S, quarum utpote conſpirantium ſumma capienda eſt:

at-

atqui, quando E S bifariam in R diviſa eſt, $PE + PS = 2PR$: ergo duabus potentiis æqualibus P O, P Q æquivalet 2 P R: igitur proportionaliter duabus potentiis P H, P K æquivalet 2 P E. Q. E. D.

Scholium. Suppoſui angulos A P M, B P N contineri in alterutra ex ſeriebus ſuperioris propoſitionis ea nimirum de cauſſa, ut liceret deducere, duabus potentiis P A, P M æquivalere 2 P O; & P B, P N æquivalere 2 P Q. Cæterum dummodo hæc æquivalentia ſubſiſtat, non deficiet vis demonſtrationis, tametſi diverſi ſint anguli A P M, B P N.

Theorema quintum. Si non minus potentiæ P H, P K, quam potentiæ P F, P G æquipolleant 2 P E, & anguli H P F, K P G in prædictis ſeriebus contineantur, ductis P A, P B, quæ faciant angulos A P H, B P K æquales H P F, K P G, ajo potentiis P A, P B æquivalere eamdem 2 P E.

Demonſtratio. Fiat eadem præparatio, quæ facta eſt in antecedente. Quoniam anguli H P F, K P G in ſuperioribus ſeriebus continentur, etiam eorum dupli A P F, B P G in iiſdem ſeriebus includentur: ergo potentiæ P A, P M æquivalentem habebunt 2 P O; ſimiliter P B, P N æquivalentem habebunt 2 P Q: igitur additis æquivalentibus quatuor P A, P B, P M, P N æquivalent 2 P O, 2 P Q: atqui quum P F, P G ponantur æquivalere 2 P E, P M, P N æquivalebunt 2 P S; & quum P H, P K æquivaleant 2 P E, etiam P O, P Q æquivalebunt 2 P R: ergo P A, P B, 2 P S æquivalent 4 P R, atqui quando E S eſt diviſa bifariam in R, eſt $4PR = 2PE + 2PS$: ergo P A, P B, 2 P S æquivalent 2 P E, 2 P S, & detractis utrobique 2 P S, quæ certe æquivalentes ſunt, duæ P A, P B æquivalebunt 2 P E. Q. E. D.

Scholium. Si potentiis P A, P M æquivaleat 2 P O; & potentiis P B, P N æquivaleat 2 P Q, vis demonſtrationis integra manet, licet anguli A P M, B P N ſuperiores ſeries non conſtituant.

Theorema ſextum. Duarum potentiarum æqualium potentia æquivalens exprimitur per duplam perpendicularem cadentem in baſim, quotieſcumque angulus, quem efficiunt, componi poſſit vel per additionem, vel per deductionem ex angulis unius ex ſeriebus antea poſitis.

Demonſtratio in ſuperioribus propoſitionibus continetur. Nam ſint potentiæ æquales P A, P B facientes angulum aut re-

ctum, aut æqualem quatuor tertiis partibus recti, qui a normali P E dividatur bifariam, tum anguli A P E, B P E bifariam dividantur, tum novi anguli omnes iterum dividantur bifariam, atque ita in infinitum, omnia potentiarum paria habebunt pro æquipollente 2 P E. Similiter ſi anguli iterentur, tum novi dividantur bifariam, atque iterentur, atque ita deinceps, obtinebimus ſemper potentiarum æqualium paria, quibus eadem erit æquipollens 2 P E. Atqui iſta omnia potentiarum paria coibunt in angulum, qui aut continebitur in altera ex duabus ſeriebus, aut efformabitur additis ſubductiſque ſerierum angulis: igitur potentiæ duæ æquales, quæ concurrant in angulum, qui per additionem, aut ſubtractionem formetur ex angulis alterutrius ſeriei, habent pro æquipollente eam, quæ exprimitur a duplici perpendiculari in earum baſim cadente. Q. E. D.

Lemma. Quicumque angulus conſtitui poteſt medius inter duos angulos, qui efformentur ab angulo recto, vel ab ejus partibus decreſcentibus in ratione ſubdupla, ita ut differentia coſinuum dimidii horum angulorum, & dati dimidii, qui medius eſt, minor ſit quacumque data. Idem efficere poſſum adhibendo angulum æquantem quatuor tertias partes unius recti, ejuſque partes decreſcentes in ratione ſubdupla.

Lemma hoc paſſim ab aliis demonſtratum invenies, & jamdiu cognitum eſt.

Theorema ſeptimum. Duæ potentiæ æquales P O, (*Fig.* 5.) P Q, quicumque ſit angulus O P Q, habent pro æquivalente 2 P R, quæ æqualiter, & ad angulos rectos partitur O Q.

Demonſtratio. Si æquivalens duabus P O, P Q non eſt æqualis 2 P R, ſit vel major, vel minor quantitate 2 K. Conſtituatur angulus O P Q inter duos A P B, M P N, qui præditi ſint conditionibus expoſitis in ſuperiore lemmate, ita ut differentia coſinuum angulorum A P R, O P R, item O P R, M P R ſit minor K, ſumpta P O pro ſinu toto. Centro P intervallo P O deſcribantur arcus circuli A M, B N, ſecantes lineas ductas in punctis A, M, B, N. Jungantur A B, M N, quæ productam P R ſecent in E, S. Si dicas æquivalentem duabus potentiis P O, P Q ſuperare 2 P R per 2 K, adverte æquivalentem duarum P M, P N æquare 2 P S, ſive 2 P R + 2 R S, ſed R S minor eſt quam K: ergo æquivalens potentiarum P O, P Q major erit æquivalente duabus P M, P N: quod eſt contra axioma octa-

octavum. Si velis æquivalentem duabus PO, PQ deficere a 2PR per 2K, adverte æquivalentem duabus PA, PB eſſe 2PE, ſive 2PR dempta 2RE: ſed RE minor eſt, quam K: ergo æquivalens duabus PO, PQ minor erit, quam æquivalens duabus PA, PB, quod eidem axiomati opponitur. Igitur potentiarum æqualium PO, PQ æquivalens eſt 2PR. Q. E. D.

Corollarium. Potentiæ æquales itaque PF, PG, (*Fig.* 3.) quemcumque angulum faciant, habent pro æquivalente 2PE, quæ cadet normaliter in FG. Quod ſi claudas parallelogrammum, & rhombum FPGC, & ducas diametrum PC; hæc, quando æqualis eſt 2PE, exprimet æquivalentem potentiarum æqualium PF, PG.

Theorema octavum. Æquivalens duabus potentiis concurrentibus in angulo recto æqualis eſt diametro rectanguli, cujus ipſæ ſunt latera, quæcumque ſit æquivalentis directio.

Demonſtratio. Potentiæ applicatæ puncto P (*Fig.* 6.) ad angulos rectos ſint PA, PB. Claudatur rectangulum PACB, ductaque diagonali PC ſint ei perpendiculares AD, BE. Notum eſt PD eſſe tertiam proportionalem poſt PC, PA; & PE tertiam proportionalem poſt PC, PB. His poſitis ſit PK æquivalens duabus PA, PB, quæcunque ſit ejus directio: ajo PK æquare PC. Si enim non æquat, erit vel major, vel minor. Sit primo major. Fiat ut PK : PA : : PA : PF; item PK : PB : : PB : PI: erunt PF, PI minores PD, PE, quando PK major ſupponitur quam PC. Tum ducta MN perpendiculari PK fiat ut PK : PA : : PB . PM = PN. Quoniam tres PF, PM, PA; item tres PN, PI, PB ſunt proportionales tribus PA, PB, PK, & PA, PB dividunt angulos rectos FPM, NPI, perinde ac PK ſecat angulum rectum APB, ſi PK æquivalet duabus PA, PB; PA æquivalebit duabus PF, PM; & PB duabus PN, PI: igitur PK æquivalet quatuor PF, PM, PN, PI: ſed PM, PN ſunt æquales, & contrariæ: ergo PK æquivalet duabus PF, PI. Quum autem tres iſtæ potentiæ ſint conſpirantes, debet PK æquare PF + PI: atqui PF + PI eſt minor PD + PE, ſeu diametro PC: ergo PK minor PC: quod eſt abſurdum, quum ſuppoſita fuerit major. Eodem ratiocinio probabo PK non eſſe minorem PC: igitur erit æqualis. Q. E. D.

Scholium. Analyſis rem perficit nullo negotio. Sit enim

$PA = a$, $PB = b$, $PK = x$, erit $PF = \frac{aa}{x}$, & $PI = \frac{bb}{x}$: ergo $\frac{aa}{x} + \frac{bb}{x} = x$, ſeu $x = \sqrt{aa + bb}$, ſed etiam $PC = \sqrt{aa + bb}$: ergo $x = PK = PC$. Q. E. D.

Theorema nonum. Æquivalens duarum potentiarum, quæ concurrant ad angulum rectum, quæque exprimantur per latera rectanguli, non ſolum quantitate æquat rectanguli diametrum, ſed etiam poſitione cum eadem coincidit.

Demonſtratio. Sint duæ potentiæ (*Fig.* 7.) PA, PB rectum angulum efficientes; claudatur rectangulum: ajo, æquivalentem eſſe PC. Si non, æquivalens ſit PK, quæ ex ſuperiore debet æquare PC. Addantur duæ potentiæ PD, PB æquales prioribus, ſed prima contraria PA, ſecunda conſpirans cum PB. Clauſo parallelogrammo agatur diameter PE. Si duarum potentiarum PA, PB æquivalens eſt PK, duarum PD, PB æquivalens erit PH faciens angulum $HPB = KPB$. Erit autem $PK = PH$, quia æquant diametros rectangulorum æqualium. Juncta KH producatur PB in F. Potentiæ PA, PD, & 2PB æquivalent duabus PK, PH: atqui PA, PD ſunt æquales & contrariæ: ergo 2PB æquivalet PK, PH, ſed iſtis æquivalet 2PF: ergo 2PB æquivalet 2PF: quæ quum ſint in eadem directione æquales erunt: ergo $PB = PF$: quod eſt abſurdum: nam quum $PK = PC$, eſt PF major PB. Si diceres æquivalentes PH, PK ſecare angulos APC, DPE, idem abſurdum oriretur, deberet enim PF eſſe minor PB: igitur æquivalentes aliæ eſſe non poſſunt, quam PC, PE. Q. E D.

Theorema decimum. Duarum potentiarum (*Fig.* 8.) in quocumque angulo concurrentium æquivalens exprimitur a diametro parallelogrammi, cujus ipſæ ſunt latera.

Demonſtratio. Potentiæ duæ ſint PA, PB. Claudatur parallelogrammum, diameter PC ſufficiet potentiam eiſdem æquipollentem. Ducantur normales diametro AD, BE, & MPN, parallelæ AM, BN. Potentiæ PA ex ſuperiore æquivalent PM, PD; potentiæ PB æquivalent PN, PE: ergo potentiis PA, PB æquivalent quatuor PM, PN, PD, PE: ſed primæ ex his æquales ſunt, & contrariæ: ergo potentiis PA, PB æquivalent PD, PE: ſed $PD + PE = PC$: ergo potentiis PA, PB æquivalet PC. Q. E. D.

Scholium. Si AD (*Fig.* 9.) caderet extra parallelogrammum,

Fig. 1.

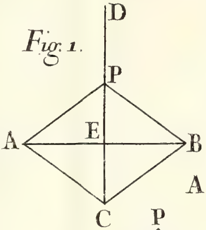


Fig. 2.

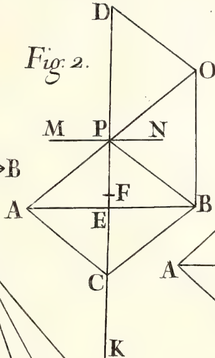


Fig. 3.

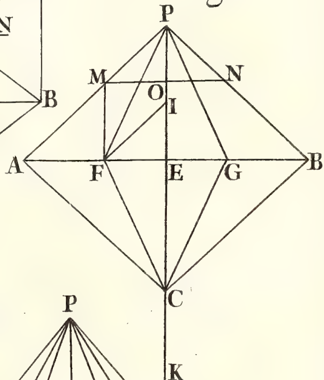


Fig. 4.

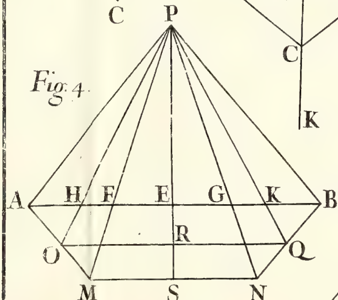


Fig. 5.

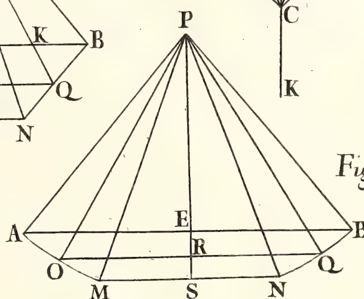


Fig. 6.

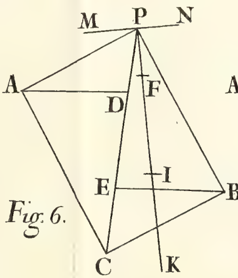


Fig. 7.

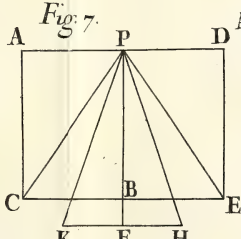


Fig. 8.

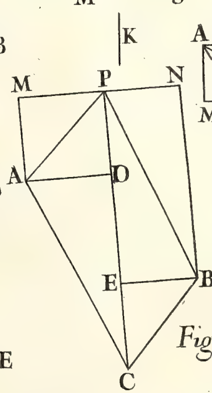
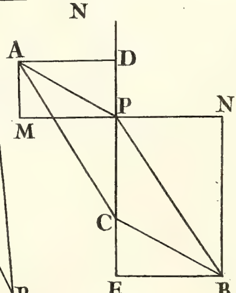


Fig. 9.



mum, potentia PD prædita eſſet directione contraria, ac propterea deducenda eſſet ex PE. Facta autem deductione reliqua eſſet, ut ſupra, diameter PC.

Ex paucis quibuſdam principiis habes legem æquivalentiæ potentiarum ita geometrice demonſtratam, ut hæc mutari non poſſit, quin principia poſita deficiant, & corruant: quod ſi accideret, nullus in natura ordo, ſed maxima eſſet perturbatio. Quamobrem nihil hæſitans pronuncio, non contingentem eſſe, ſed neceſſariam legem, quæ docet, potentiam expreſſam per diametrum parallelogrammi æquivalere iis, quæ exprimuntur per latera. Immo quidquid ex lege hac geometrica methodo deducitur, æquo jure neceſſarium pronunciabo.

Si alias quoque leges mechanicas liceret mihi ſimili demonſtratione munire, ſublata eſſet omnis controverſia, eaſque neceſſarias eſſe ſciremus. Sed deficiente demonſtratione, res adhuc in dubitatione verſatur. Attamen quando inventum eſt, unam ex his arctiſſime conjungi cum principiis certiſſimis, quæ vera ſunt neceſſario; vero ſimile videtur, alias quoque a ſimilibus principiis dependere. At connexionem hanc legum mechanicarum cum principiis ſumma evidentia præditis, nemo unquam vidit? Non inficior; ſed hoc fortaſſe mentis humanæ imbecillitati eſt tribuendum. Lex æquipollentiæ potentiarum ſine dubio conjuncta erat cum principiis certiſſimis: tametſi hoc ante Bernoullium nemo intellexerit.

Accedit, quod lex æquivalentiæ potentiarum ita late patet, ut nulla ſit mechanicæ pars, quæ ejus auxilio non egeat. Præterea lex hæc ex aliis legibus clariſſime demonſtratur; quod præſtitit Eulerus Vir doctiſſimus, qui eamdem deduxit ex legibus motuum productorum a potentiis continuo applicatis. Momenta hujuſmodi me ad unam partem aliquantum impellunt. Verumtamen illud repeto, ſi excipias legem æquipollentiæ potentiarum, dubitandum eſſe, utrum aliæ ſint neceſſariæ nec ne. Si opinio illa, quam cogente te ingratis protuli, cum falſitate coniuncta eſt, non magis mihi moleſtum eſſe debet, quam tibi, qui eam repetitis ad ſatietatem interrogationibus poſtulaſti. Quare rogo te etiam, atque etiam, ut ea ſolum, quæ ſcio, in poſterum a me exigas. Vale.

Idibus Decembris 1759.

VIN-

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

EPISTOLÆ TRES

Quibus utilitas calculi ſinuum, & coſinuum in infiniteſimorum analyſi demonſtratur.

VINCENTIUS RICCATUS VIRGILIO CAVINÆ S. P. D.

GAudeo ſane, perutiles tibi videri formulas ſpectantes ad ſinus, & coſinus arcuum, aut analogorum logarithmorum ductorum in numerum n, quas exhibui Tom. pr. Opuſc. 4. parte ſecunda, earumque demonſtrationes tibi plurimum placuiſſe. Quare quum n eſt numerus rationalis vel integer vel fractus, vel poſitivus vel negativus, nihil habes, quod deſideres. At demonſtrationem a me requiris, ſi n ſit numerus irrationalis, quam ſcripſi exhiberi poſſe per calculum infiniteſimalem. Morem tibi gero, ſed vereor, ut, poſtquam legeris, minoris ducas.

Præmitto hoc lemma. Vocato ſinu toto $= r$, arcu aut logarithmo analogo $= \varphi$, valet æquatio $\frac{C.\varphi.dS.\varphi - S.\varphi.dC.\varphi}{r} = d\varphi$, quæ eodem modo vera eſt cum in arcubus tum in logarithmis, cum in ſinibus, & coſinibus circularibus tum in hyperbolicis. Demonſtratur autem inſpectis figuris hoc modo.

In hyperbola ſector (*Fig.* 1.) CAF = triang. CDF — ſemiſeg. ADF, ſive $\frac{r\varphi}{2} = \frac{Ch.\varphi.Ch.\varphi}{2} - S\,Sh.\varphi.dCh.\varphi$, & ſumptis differentiis $rd\varphi = Ch.\varphi.dSh.\varphi - Sh.\varphi.dCh.\varphi$ Q. E. D.

In circulo autem ſector (*Fig.* 2.) CAF = triang. CDF + ſemiſeg. ADF, ſive $\frac{r\varphi}{2} = \frac{Cc.\varphi.Sc.\varphi}{2} + S - Sc.\varphi dCc.\varphi$. Apponitur ſignum —, quia creſcente ſectore decreſcit coſinus, ejuſque differentia eſt negativa; ergo ſumptis differentiis fit $rd\varphi = Cc.\varphi.dSc.\varphi - Sc.\varphi.dCc.\varphi$. Q. E. D.

Ex

Ex his aliud lemma deduco, quod hiſce formulis continetur $dSh.\varphi = \frac{d\varphi Ch.\varphi}{r}$, $dCh.\varphi = \frac{d\varphi Sh.\varphi}{r}$

$$dSc.\varphi = \frac{d\varphi.Cc.\varphi}{r},\ dCc.\varphi = -\frac{d\varphi.Sc.\varphi}{r}.$$

In hyperbola conſtat $\overline{Ch.\varphi}^2 = r^2 + \overline{Sh.\varphi}^2$; ergo ſumptis differentiis $Ch.\varphi.dCh.\varphi = Sh.\varphi.dSh.\varphi$, ſive $dCh.\varphi = \frac{Sh.\varphi.dSh.\varphi}{Ch.\varphi}$, $dSh.\varphi = \frac{Ch.\varphi.dCh.\varphi}{Sh.\varphi}$. Qui valores in ſuperiore ſubſtituti præbent formulas duas $Ch.\varphi.dSh.\varphi - \frac{\overline{Sh.\varphi}^2}{Ch.\varphi}$ $dSh.\varphi = rd\varphi$, $\frac{\overline{Ch.\varphi}^2}{Sh.\varphi}.dCh.\varphi - Sh.\varphi.dCh.\varphi = rd\varphi$; atqui $\overline{Ch.\varphi}^2 - \overline{Sh.\varphi}^2 = r^2$; ergo facta ſubſtitutione, expurgatiſque formulis $dSh.\varphi = \frac{d\varphi Ch.\varphi}{r}$, $dCh.\varphi = \frac{d\varphi Sh.\varphi}{r}$.

Simili ratiocinio utens in circulo, adhibita æquatione ipſi propria $\overline{Cc.\varphi}^2 = r^2 - \overline{Sc.\varphi}^2$ perveniam ad formulas $dSc.\varphi = \frac{d\varphi Cc.\varphi}{r}$, $dCc.\varphi = \frac{-d\varphi Sc.\varphi}{r}$. Quæ formulæ ex ipſa inſpectione figuræ deducuntur. Nam triangulum infiniteſimum Fef eſt ſimile FDC; igitur

$$\left.\begin{array}{ll} CF : CD :: Ff : fe, & CF : DF :: Ff : Fe \\ r : Cc.\varphi :: d\varphi : dSc.\varphi, & r : Sc.\varphi :: d\varphi : dCc.\varphi \end{array}\right\}$$ ex quibus ſuperiores formulæ ſtatim prodeunt.

His demonſtratis ad rem accedo propius. Quiſque videt identicas eſſe, ac proinde æquales hujuſmodi formulas $\frac{Sh.\varphi + Ch.\varphi}{Ch.\varphi + Sh.\varphi} = \frac{Sh.n\varphi + Ch.n\varphi}{Ch.n\varphi + Sh.n\varphi}$; denominatores enim iidem ſunt cum numeratoribus. Multiplicetur utraque per $nd\varphi$, & fiet $n.\frac{d\varphi.Sh.\varphi + d\varphi.Ch.\varphi}{Ch.\varphi + Sh.\varphi} = \frac{nd\varphi.Sh.n\varphi + nd\varphi Ch.n\varphi}{Ch.n\varphi + Sh.n\varphi}$: atqui ex probatis $d\varphi Sh.\varphi = rdCh.\varphi$, $nd\varphi.Sh.n\varphi = rdCh.n\varphi$

$$d\varphi.Ch.\varphi = rdSh.\varphi,\ nd\varphi Ch.n\varphi = rdSh.n\varphi;$$

ergo factis ſubſtitutionibus proveniet

$n.\frac{rdCh.\varphi + rdSh.\varphi}{Ch.\varphi + Sh.\varphi} = \frac{rdCh.n\varphi + rdSh.n\varphi}{Ch.n\varphi + Sh.n\varphi}$. Utraque expreſſio eſt logarithmica. Poſita ſyſtematis ſubtangente $= r$, fiat integratio, hac ſervata conditione, ut quum φ, & $Sh.\varphi = o$, ſit $Ch.\varphi = r$. Habebitur $nl\overline{Ch.\varphi + Sh.\varphi}$

$= l$

$= \overline{Ch.n\varphi + Sh.n\varphi} + \overline{n-1}\, lr$. Si eſſet protonumerus $= r$, ut logarithmi acciperentur in ſyſtemate hyperbolico, ſuperflua foret additio conſtantis $\overline{n-1}\, lr$. Sed malo uti quocumque ſyſtemate, ut appareat, demonſtrationem a peculiari ſyſtemate non dependere. Facto tranſitu a logarithmis ad numeros proveniet $\frac{\overline{Ch.\varphi + Sh.\varphi}^{\,n}}{r^{n-1}} = Ch.n\varphi + Sh.n\varphi$.

Aſſumpta prima identica formula $\frac{Sh.\varphi - Ch.\varphi}{Ch.\varphi - Sh.\varphi} = \frac{Sh.n\varphi - Ch.n\varphi}{Ch.n\varphi - Sh.n\varphi}$ eodem ratiocinio probabis $\frac{\overline{Ch.\varphi - Sh.\varphi}^{\,n}}{r^{n-1}} = Ch.n\varphi - Sh.n\varphi$.

Progredior ad ſinus, & coſinus circulares. Valet æquatio, in qua diviſores iidem ſunt ac numeratores $\frac{\sqrt{-1}.Sc.\varphi + Cc.\varphi}{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi} = \frac{\sqrt{-1}.Sc.n\varphi + Cc.n\varphi}{Cc.n\varphi + \sqrt{-1}.Sc.n\varphi}$. Utraque æquationis pars multiplicetur per $\sqrt{-1}$, ut naſcatur $\frac{-Sc.\varphi + \sqrt{-1}.Cc.\varphi}{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi} = \frac{-Sc.n\varphi + \sqrt{-1}\,Cc.n\varphi}{Cc.n\varphi + \sqrt{-1}.Sc.n\varphi}$. Multiplicetur utraque per $nd\varphi$, & fiet $n.\frac{-d\varphi Sc.\varphi + d\varphi.\sqrt{-1}.Cc.\varphi}{Cc.\varphi + \sqrt{-1}\,Sc.\varphi} = \frac{-nd\varphi Sc.n\varphi. + nd\varphi\sqrt{-1}\,Cc.n\varphi}{Cc.n\varphi + \sqrt{-1}\,Sc.n\varphi}$; ſed

$$\left.\begin{array}{ll} -d\varphi Sc.\varphi = rdCc.\varphi, & -nd\varphi Sc.n\varphi = rdCc.n\varphi \\ d\varphi Cc.\varphi = rdSc.\varphi, & nd\varphi Cc.n\varphi = rdSc.n\varphi \end{array}\right)$$

Factis itaque ſubſtitutionibus oritur

$$n.\frac{rdCc.\varphi + r\sqrt{-1}.dSc.\varphi}{Cc.\varphi + \sqrt{-1}\,Sc.\varphi} = \frac{rdCc.n\varphi + r\sqrt{-1}\,dSc.n\varphi}{Cc.n\varphi + \sqrt{-1}\,Sc.n\varphi}.$$

Accepta ſyſtematis ſubtangente $= r$, fiat integratio per logarithmos, ſervata conditione, ut evadat $Cc.\varphi = r$, quum φ, & $Sc.\varphi$ nulleſcunt, $nl\,\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi} = l\,\overline{Cc.n\varphi + \sqrt{-1}.Sc.n\varphi} + \overline{n-1}\,lr$, & facto tranſitu ad numeros $\frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\,n}}{r^{n-1}} = Cc.n\varphi + \sqrt{-1}.Sc.n\varphi$.

Si

Si formulam idemticam ponas eſſe $\frac{\sqrt{-1}\,.\,Sc\,.\,\varphi - Cc\,.\,\varphi}{Cc\,.\,\varphi - \sqrt{-1}\,Sc\,.\,\varphi} = \frac{\sqrt{-1}\,.\,Sc\,.\,n\varphi - Cc\,.\,n\varphi}{Cc\,.\,n\varphi - \sqrt{-1}\,Sc\,.\,n\varphi}$, idem ratiocinium inſtituens invenies

$$\frac{\overline{Cc\,.\,\varphi - \sqrt{-1}\,Sc\,.\,\varphi}^{\,n}}{r^{n-1}} = Cc\,.\,n\varphi - \sqrt{-1}\,Sc\,.\,n\varphi.$$

Ex his propter ambiguitatem ſignorum orientur formulæ quatuor

$$Ch\,.\,n\varphi = \frac{\overline{Ch\,.\,\varphi + Sh\,.\,\varphi}^{\,n} + \overline{Ch\,.\,\varphi - Sh\,.\,\varphi}^{\,n}}{2\,r^{n-1}}$$

$$Sh\,.\,n\varphi = \frac{\overline{Ch\,.\,\varphi + Sh\,.\,\varphi}^{\,n} - (\overline{Ch\,.\,\varphi - Sh\,.\,\varphi}^{\,n}}{2\,r^{n-1}}$$

$$Cc\,.\,n\varphi = \frac{\overline{Cc\,.\,\varphi + \sqrt{-1}\,Sc\,.\,\varphi}^{\,n} + \overline{Cc\,.\,\varphi - \sqrt{-1}\,Sc\,.\,\varphi}^{\,n}}{2\,r^{n-1}}$$

$$Sc\,.\,n\varphi = \frac{\overline{Cc\,.\,\varphi + \sqrt{-1}\,Sc\,.\,\varphi}^{\,n} - (\overline{Cc\,.\,\varphi - \sqrt{-1}\,Sc\,.\,\varphi}^{\,n}}{2\,r^{n-1}\sqrt{-1}}.$$

Hæ autem ſunt illæ ipſæ, quas jamdiu probatas exhibui, quoties n eſſet numerus rationalis. Demonſtratio autem hæc eas eſſe veras pariter oſtendit, tametſi n ſit numerus irrationalis, ac ſurdus. De hac tu judica. Mihi ſatis eſt tuæ morem geſſiſſe voluntati. Vale.

Ex Coll. S. Luciæ tertio Kal. Sextilis 1760.

VINCENTIUS RICCATUS VIRGILIO CAVINÆ
S. P. D.

Etſi ex ſuperioribus litteris ingens tibi videri debeat utilitas earum formularum, quæ altero in lemmate continentur; tamen multo utiliores cognoſces, poſtquam oſtendero, obtineri per eas integrationem plurium formularum, quæ quantitates hyperbolicas, & circulares involvunt. Formulæ in ſuperioribus litteris demonſtratæ ſunt hujuſmodi

$$dSh.\varphi = \frac{d\varphi\, Ch.\varphi}{r},\quad dCh.\varphi = \frac{d\varphi\, Sh.\varphi}{r}$$

$$dSc.\varphi = \frac{d\varphi\, Cc.\varphi}{r},\quad dCc.\varphi = \frac{-d\varphi\, Sc.\varphi}{r},$$ quibus addere potes duas notiſſimas $r = \overline{Ch.\varphi}^2 - \overline{Sh.\varphi}^2$, $r^2 = \overline{Cc.\varphi}^2 + \overline{Sc.\varphi}^2$.

His ſuppoſitis demonſtro quatuor theoremata, quæ ſequuntur

$$m\,S\,\overline{Ch.\varphi}^m d\varphi = \overline{m-1}\, r^2 S\,\overline{Ch.\varphi}^{m-2} d\varphi + r\,\overline{Ch.\varphi}^{m-1} Sh.\varphi$$

$$m\,S\,\overline{Sh.\varphi}^m d\varphi = -(\overline{m-1}\, r^2 S\,\overline{Sh.\varphi}^{m-2} d\varphi + r\,\overline{Sh.\varphi}^{m-1} Ch.\varphi$$

$$m\,S\,\overline{Cc.\varphi}^m d\varphi = \overline{m-1}\, r^2 S\,\overline{Cc.\varphi}^{m-2} d\varphi + r\,\overline{Cc.\varphi}^{m-1} Sc.\varphi$$

$$m\,S\,\overline{Sc.\varphi}^m d\varphi = \overline{m-1}\, r^2 S\,\overline{Sc.\varphi}^{m-2} d\varphi - r\,\overline{Sc.\varphi}^{m-1} Cc.\varphi.$$

Omnium demonſtrationes eadem methodo perficiuntur.

Quoad primum. Manifeſtum eſt

$$D.\overline{Ch.\varphi}^{m-1} Sh.\varphi = \overline{m-1}\,\overline{Ch.\varphi}^{m-2} Sh.\varphi.dCh.\varphi + \overline{Ch.\varphi}^{m-1} dSh.\varphi.$$ Subſtitue in hac pro $dCh.\varphi$, $dSh.\varphi$ eorum valores, & invenies

$$D.\overline{Ch.\varphi}^{m-1} Sh.\varphi = \overline{m-1}\,\overline{Ch.\varphi}^{m-2}\,\overline{Sh.\varphi}^2.d\varphi + \overline{Ch.\varphi}^m$$ $.d\varphi$. Pro $\overline{Sh.\varphi}^2$ ſubſtitue $\overline{Ch.\varphi}^2 - r^2$, ut habeas

$$rD\overline{Ch.\varphi}^{m-1} Sh.\varphi = \overline{m-1}\,\overline{Ch.\varphi}^m d\varphi - (\overline{m-1}\, r^2\,\overline{Ch.\varphi}^{m-2} d\varphi;$$
$$+ \overline{Ch\varphi}^m d\varphi$$

igitur

$$m\,\overline{Ch.\varphi}^m d\varphi = \overline{m-1}.r^2\,\overline{Ch.\varphi}^{m-2} d\varphi + rD.\overline{Ch.\varphi}^{m-1} Sh.\varphi,$$ ſive integrando

$$m\,S\,\overline{Ch.\varphi}^m d\varphi = \overline{m-1}.r^2 S\,\overline{Ch.\varphi}^{m-2} d\varphi + r\,\overline{Ch.\varphi}^{m-1} Sh.\varphi.$$ Q. E. D.

Alte-

Alterum oſtenditur per formulam

$$D\,\overline{Sh.\varphi}^{\,m-1}\,Ch.\varphi = \overline{m-1}\;\overline{Sh.\varphi}^{\,m-2}\,Ch.\varphi\, dSh.\varphi + \overline{Sh.\varphi}^{\,m-1}\, dCh.\varphi,$$

quia factis ut antea ſubſtitutionibus perveniemus ad formulam

$$rD\,\overline{Sh.\varphi}^{\,m-1}\,Ch.\varphi = \overline{m-1}\, r^2\, \overline{Sh.\varphi}^{\,m-2}\, d\varphi + \overline{m-1}\;\overline{Sh.\varphi}^{\,m}\, d\varphi + \overline{Sh.\varphi}^{\,m}\, d\varphi;$$

ergo translatis terminis, factaque integratione

$$mS\,\overline{Sh.\varphi}^{\,m}\, d\varphi = -(\overline{m-1}\, r^2 S\,\overline{Sh.\varphi}^{\,m-2}\, d\varphi + r\,\overline{Sh.\varphi}^{\,m-1}\, Ch.\varphi.$$

Q. E. D.

Similem methodum applica reliquis duabus formulis, quæ quantitates circulares complectuntur. Nam

$$D.\overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, Sc.\varphi = \overline{m-1}.\overline{Cc.\varphi}^{\,m-2}\, Sc.\varphi.dCc.\varphi + \overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, dSc.\varphi.$$

Pro $dCc.\varphi$, $dSc.\varphi$ valores ſubſtitue, ut habeas

$$D.\overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, Sc.\varphi = -(\overline{m-1}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-2}\,\overline{Sc.\varphi}^{\,2}.d\varphi + \overline{Cc.\varphi}^{\,m}\, dSc.\varphi.$$

Pro $\overline{Sc.\varphi}^{\,2}$ ſcribe $r^2 - \overline{Cc.\varphi}^{\,2}$, ut facta multiplicatione per r proveniat

$$rD\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, Sc.\varphi = -(\overline{m-1}\, r^2\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-2}\, d\varphi + \overline{m-1}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m}\, d\varphi + \overline{Cc.\varphi}^{\,m}\, d\varphi;$$

ergo tranſpoſitis terminis, peractaque integratione

$$mS\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m}\, d\varphi = \overline{m-1}\, r^2 S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-2}\, d\varphi + r\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, Sc.\varphi.$$

Q. E. D.

Ultimum theorema eadem ratione oſtenditur. Etenim ex formula

$$D.\overline{Sc.\varphi}^{\,m-1}\, Cc.\varphi = \overline{m-1}\;\overline{Sc.\varphi}^{\,m-2}\, Cc.\varphi.dSc.\varphi + \overline{Sc.\varphi}^{\,m-1}\, dCc.\varphi$$

invenies

$$mS\,\overline{Sc.\varphi}^{\,m-1}\, d\varphi = \overline{m-1}.r^2 S\,\overline{Sc.\varphi}^{\,m-2}\, d\varphi - r\,\overline{Sc.\varphi}^{\,m-1}\, Cc.\varphi.$$

Q. E. D.

Ex quatuor, quæ demonſtravi theoremata, aliquot primum corollaria maxime ſimplicia deducamus. Si ſupponas $m = 0$, invenies

$$\left.\begin{array}{l} rS\dfrac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{\,2}} = \dfrac{Sh.\varphi}{Ch.\varphi},\; -rS\dfrac{d\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^{\,2}} = \dfrac{Ch.\varphi}{Sh.\varphi} \\ rS\dfrac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^{\,2}} = \dfrac{Sc.\varphi}{Cc.\varphi},\; -rS\dfrac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{\,2}} = \dfrac{Sc.\varphi}{Cc.\varphi} \end{array}\right\}$$ ex quibus conſtat

 $d\varphi$

$d\varphi$ diviſum per quadratum ſinus, aut coſinus integrabile eſſe, vel quantitates hyperbolicæ ſint, vel circulares.

Si $m = 1$, habebimus

$$\left.\begin{array}{l} S\,Ch.\varphi.d\varphi = r\,Sh.\varphi,\quad S\,Sh.\varphi.d\varphi = r\,Ch.\varphi \\ S\,Cc.\varphi.d\varphi = r\,Sc.\varphi,\quad S\,Sc.\varphi.d\varphi = r\,Cc.\varphi \end{array}\right\}$$ quæ formulæ illæ ipſæ ſunt, quas ſuppoſuimus.

Demum ſi $m = 2$, nanciſcemur

$2\,S\,\overline{Ch.\varphi}^2\,d\varphi = r^2\varphi + r\,Ch.\varphi.Sh.\varphi$, $2\,S\,\overline{Sh.\varphi}^2\,d\varphi = -r^2\varphi + r\,Sh.\varphi.Ch.\varphi$

$2\,S\,\overline{Cc.\varphi}^2\,d\varphi = r^2\varphi + r\,Cc.\varphi\,Sc.\varphi$, $2\,S\,\overline{Sc.\varphi}^2\,d\varphi = r^2\varphi - r\,Sc.\varphi\,Cc.\varphi$. Quare differentia logarithmi analogi φ in quadratum ſinus vel coſinus dependet a quadratura hyperbolæ, & differentia arcus circularis multiplicata per quadratum ſinus vel coſinus dependet a quadratura circuli.

Inter has formulas non invenies quatuor maxime ſimplices, nempe $\frac{d\varphi}{Ch.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Sh.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Cc.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Sc.\varphi}$. Nam ſi ſupponeres $m = -1$, iſtæ quidem prodirent in primo termino, ſed conjungerentur cum quatuor altioribus $\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^3}$, $\frac{d\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^3}$, $\frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^3}$, $\frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^3}$; quod oſtendit, has ab illis dependere. Ut autem noſtrorum theorematum uſus amplior efficiatur, neceſſe eſt prorſus, ut per aliam methodum harum formularum integratio inveniatur.

Ordiamur a prima, in qua pro $d\varphi$ ſubſtituamus ejus valorem, ut fiat $\frac{r\,d\varphi}{Ch.\varphi} = \frac{r^2\,dSh\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^2} = \frac{r^2\,dSh.\varphi}{r^2 + \overline{Sh.\varphi}^2}$. Hujus formulæ integratio exhibetur a ſectore circulari diviſo per $\frac{r}{2}$, ſeu ab arcu circulari, cujus tangens $= Sh.\varphi$. Quare radio KH $= r$ (*Fig.* 1., 3.) deſcripto circulo HML, ductaque tangente, in eaque ſecta HI $=$ DF $= Sh.\varphi$, agatur KMI, erit $S\frac{r\,d\varphi}{Ch.\varphi} = \frac{2.HKM}{r} =$ HM. Formula itaque $\frac{d\varphi}{Ch.\varphi}$ dependet a quadratura circuli.

Applicantes eamdem methodum formulæ ſecundæ nanciſce-

ciſcemur $\frac{rd\varphi}{Sh.\varphi} = \frac{r^2 dCh.\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^2} = \frac{r^2 dCh\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^2 - r^2}$, quæ dependet ab hyperbolæ quadratura; atque hoc modo obtinetur. Semiaxibus KH, KL $= r$ (*Fig.* 1. 4.) deſcribatur hyperbola æquilatera HM. Ex puncto L parallela rectæ KH agatur LO, quæ quamquam non tangit hyperbolam, tamen, ut ſervetur circuli analogia, cotangens vocari ſolet. In hac abſcindatur LO $=$ CD $=$ $Ch.\varphi$, & agatur KMO; erit S $\frac{rd\varphi}{Sh.\varphi} = \frac{2.KHM}{r}$. Superfluum eſt advertere, hyperbolam HM, per quam formula integratur, eamdem eſſe cum hyperbola AF, in qua ſumuntur ſinus, & coſinus.

Reliquæ duæ formulæ continentes quantitates circulares eadem methodo tractentur. Fiet itaque $\frac{rd\varphi}{Cc.\varphi} = \frac{r^2 dSc.\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^2} = \frac{r^2 dSo.\varphi}{r^2 - \overline{Sc.\varphi}^2}$, quæ pariter ab hyperbolæ quadratura dependet. Deſcripta eadem hyperbola, (*Fig.* 2. 4.) duc tangentem hyperbolæ HI, in qua abſcinde HI $=$ DF $= Sc.\varphi$. Duc KIM; erit S $\frac{rd\varphi}{Cc.\varphi} = \frac{2.KHM}{r}$.

Simili pacto $\frac{rd\varphi}{Sc.\varphi} = \frac{-r^2 dCc.\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^2} = \frac{-r^2 dCc.\varphi}{r^2 - \overline{Cc.\varphi}^2}$, quæ pariter hyperbolæ poſcit quadraturam. In eadem hyperbolæ tangente ſeca HI $=$ CD $= Cc.\varphi$; habebimus S $\frac{-rd\varphi}{Sc.\varphi} = \frac{2.KHM}{r}$.

His patefactis ajo primum, ſi m ſit numerus affirmativus, & impar, formulas omnes S$\overline{Ch.\varphi}^m d\varphi$, S$\overline{Sh.\varphi}^m d\varphi$, S$\overline{Cc.\varphi}^m d\varphi$, S$\overline{Sc.\varphi}^m d\varphi$ algebraicam integrationem recipere. Etenim hæ ex theoremate dependent a ſimilibus formulis, in quibus exponens eſt $= m - 2$; iſtæ ab illis, quibus eſt exponens $m - 4$; atque ita deinceps, donec deveniamus ad formulas habentes unitatem in exponente; atqui iſtæ ultimæ ex dictis algebraicam integrationem recipiunt: ergo & primæ propoſitæ.

Ut

Ut indoles ſeriei, quæ ex hac methodo provenit, melius cognoſcatur, ſatis erit unam ex prædictis formulis evolvere; ſeries enim in omnibus eodem paſſu procedit. Hanc ſeligo $S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m}\,d\varphi$. Habemus

$$S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m}\,d\varphi = \frac{r}{m}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\,Sc.\varphi + \frac{m-1}{m}\,r^2\,S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-2}\,d\varphi;$$

atqui

$$S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-2}\,d\varphi = \frac{r}{m-2}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-3}\,Sc.\varphi + \frac{m-3}{m-2}\,r^2\,S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-4}\,d\varphi;$$

ergo

$$S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m}\,d\varphi = \frac{r}{m}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\,Sc.\varphi + \frac{m-1}{m.\overline{m-2}}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-3}\,Sc.\varphi + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-3}}{m.\overline{m-2}}\,r^3\,S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m+4}\,d\varphi;$$

atqui

$$S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-4}\,d\varphi = \frac{r}{m-4}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-5}\,Sc.\varphi + \frac{m-5}{m-4}\,r^2\,S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-6}\,d\varphi;$$

ergo

$$S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m}\,d\varphi = \frac{r}{m}\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\,Sc.\varphi + \frac{m-1}{m.\overline{m-2}}\,r^3\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-3}\,Sc.\varphi + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-3}}{m.\overline{m-2}.\overline{m-4}}\,r^5\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-5}\,Sc.\varphi + \frac{\overline{m-1}.\overline{m-3}.\overline{m-5}}{m.\overline{m-2}.\overline{m-4}}\,r^6\,S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m-6}\,d\varphi.$$

Atque ita progrediens invenies ſeriem, in qua omnes termini multiplicantur per $Sc.\varphi$, exponentes autem $Cc.\varphi$ procedunt per ſeriem $m-1$, $m-3$, $m-5$, $m-7$ &c. uſque ad o, in quo tamquam in ultimo termino ſiſtes. Coefficientes vero terminorum ſunt $\frac{1}{m}$, $\frac{m-1}{m.\overline{m-2}}$, $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-3}}{m.\overline{m-2}.\overline{m-4}}$, $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-3}.\overline{m-5}}{m.\overline{m-2}.\overline{m-4}.\overline{m-6}}$ &c. Supple autem dimenſiones per poteſtates ſinus totius $= r$.

Si m ſit numerus poſitivus, & par, duæ primæ formulæ pendebunt ab hyperbolæ quadratura, duæ ultimæ a quadratura circuli. Nam facto eodem progreſſu tandem pervenimus ad formulam $S\,d\varphi$, quæ in primis dat duplum ſectorem hyperbolicum, in aliis duplum ſectorem circularem diviſum per ſinum totum.

Si evolvas eamdem formulam $S\,\overline{Cc.\varphi}^{\,m}\,d\varphi$, invenies eam-

eamdem ſeriem, in cujus ultimo termino $Cc.\varphi$ exponens $= 1$. Huic addendus eſt terminus $r^m \varphi$, qui habet coefficiens idem, ac ultimus terminus ſeriei, ſcilicet $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-3}\ldots 3}{m.\overline{m-2}.\overline{m-4}\ldots 2}$.
Si ſummatoria debeat nulleſcere nulleſcente arcu φ, ejuſque ſinu, completa eſt, neque ei ulla addenda eſt conſtans. Quare ſi fiat $Cc.\varphi = 0$, & $Sc.\varphi = r$, proveniet $S\,\overline{Cc.\varphi}^{m} d\varphi$ $= \frac{\overline{m-1}.\overline{m-3}\ldots 3}{m.\overline{m-2}.\overline{m-4}\ldots 2} r^m \varphi$. Eſt autem φ vel quadrans, vel tres quadrantes, vel quinque, ut omnibus notum eſt.

Ut facilius tractem caſus, in quibus m eſt numerus negativus, paullulum tranſmutandæ ſunt formulæ. Quomodo hoc faciendum ſit, aperiam dumtaxat in prima; reliquarum enim ratio eadem eſt. Muta ſignum ſpeciei m, ut ex negativa fiat poſitiva. Oritur

$$-mS\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{m}} = -\overline{m-1}.r^2 S\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{m+2}} + \frac{rSh.\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{m+1}}.$$

Transfer opportune terminos

$$\overline{m+1}.r^2 S\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{m+2}} = mS\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{m}} + \frac{rSh.\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{m+1}}.$$ Pone

$m+2=n$, ut fiat

$$\overline{n-1}.r^2 S\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{n}} = \overline{n-2}\,S\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{n-2}} + \frac{rSh.\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{n-1}}.$$ Simili

modo aliæ provenient

$$\overline{n-1}\,r^2 S\frac{d\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^{n}} = -\left(\overline{n-2}\,S\frac{d\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^{n-2}} - \frac{rCh.\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^{n-1}}\right.$$

$$\overline{n-1}\,r^2 S\frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^{n}} = \overline{n-2}\,S\frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^{n-2}} + \frac{rSc.\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^{n-1}}$$

$$\overline{n-1}\,r^2 S\frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{n}} = \overline{n-2}\,S\frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{n-2}} - \frac{rCc.\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{n-1}}.$$

Si n eſt par, manifeſtum eſt, formulas omnes $S\frac{d\varphi}{\overline{Ch.\varphi}^{n}}$, $S\frac{d\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^{n}}$, $S\frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^{n}}$, $S\frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{n}}$ algebraica integratione gaudere. Namque theoremata inventa demonſtrant, formulas iſtas dependere a ſimilibus formulis, in quibus diviſoris exponens $= n-2$, iſtæ ab aliis exponentis $= n-4$,

atque

atque ita deinceps, donec in diviſoribus reliquus ſit exponens $= 2$; ſed ſupra vidimus, formulas in diviſore affectas exponente $= 2$ integrabiles eſſe; ergo & propoſitæ integrabiles ſunt.

Si n ſit impar, ſimili ratiocinio oſtendam, formulas dependere a ſequentibus $\frac{d\varphi}{Ch.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Sh.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Cc.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Sc.\varphi}$; ſed prima ex his ad ſuimet integrationem poſtulat quadraturam circuli, reliquæ quadraturam hyperbolæ, ut ſupra probavi: ergo prima ex propoſitis dependet a quadratura circuli, reliquæ tres ab hyperbolæ quadratura.

Quoniam hæc, quæ tibi ſcripſi, calculum ſinuum & coſinuum non minus circularium, quam hyperbolicorum mirifice illuſtrant, & utiliorem reddunt, non injucunda tibi fore confido. Vale.

Ex Col. S. Luciæ Nonis Novembris 1761.

ADDITAMENTUM.

SEcundæ, quam ad te miſi, epiſtolæ hæc ut addas rogo. Doctiſſimus Eulerus duas formulas $\frac{d\varphi}{Cc.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Sc.\varphi}$ per logarithmos integrat; nam, ſi voces quadrantem $= \omega$, integrationem ita exponit $S\frac{r\,d\varphi}{Cc.\varphi} = l\,Tc.\frac{\omega + \varphi}{2}$, $S\frac{r\,d\varphi}{Sc.\varphi} = l\,Tc.\frac{\varphi}{2}$. Elegantiſſimæ iſtæ ſolutiones cum noſtris apprime cohærent, dummodo memineris, Eulerum uti logarithmis hyperbolicis, in quibus ſcilicet tam protonumerus, quam ſubtangens $= r$. Quoniam vero utile eſt exprimere integrationes per logarithmos, non ſolum haſce duas formulas, ſed etiam $\frac{d\varphi}{Sb.\varphi}$ ad logarithmos perducere juvabit. Quam ob rem neceſſe eſt præmittere aliquot facillima theoremata, per quæ demonſtratio omnis perficitur.

Ac primum data HI (*Fig.* 4.) determinandus ſit numerus logarithmi analogi $\frac{2\,KHM}{r}$. Sumpta $HG = KH = r$, ducatur, & producatur KG, quæ erit aſſymptotum hyperbolæ. Ex puncto M ducatur MQ normalis aſſymptoto; erit KQ

nu-

numerus logarithmi quæſitus. Per M agatur RMS parallela HG, & vocetur HI $= z$. Facile invenies KR $=$ RS $=$ $\frac{rr}{\sqrt{rr-zz}}$. Præterea RM $= \frac{rz}{\sqrt{rr-zz}}$; ergo MS $= \frac{rr-rz}{\sqrt{rr-zz}}$; ergo SQ $= \frac{rr-rz}{\sqrt{2}.\sqrt{rr-zz}}$; ſed KS $= \frac{rr\sqrt{2}}{\sqrt{rr-zz}}$; igitur KQ $=$
$\frac{rr\sqrt{2}}{\sqrt{rr-zz}} + \frac{rz-rr}{\sqrt{2}.\sqrt{rr-zz}} = \frac{rr+rz}{\sqrt{2}.\sqrt{rr-zz}} = \frac{r.\sqrt{r+z}}{\sqrt{2}.\sqrt{r-z}}$; qui eſt numerus logarithmi analogi $\frac{2.HKM}{r}$; ergo $\frac{2.HKM}{r} =$ $l\,\frac{r.\sqrt{r+z}}{\sqrt{2}.\sqrt{r-z}}$.

Si vero non tangens HI, ſed cotangens LO data fuerit, hæc vocetur $= u$. Facta ſubſtitutione invenies $\frac{2.HKM}{r} =$ $l\,\frac{r\sqrt{u+r}}{\sqrt{2}.\sqrt{u-r}}$. Hi omnes logarithmi ſunt analogi, in quibus ſcilicet ſubtangens $= r$, protonumerus $= \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Deinde inveniendus eſt numerus, cujus logarithmus hyperbolicus ſit æqualis logarithmo analogo dati numeri. Duc HP normalem aſſymptoto, deinde abſcinde KN $=$ KH $= r$, & duc NT normalem aſſymptoto. Datus numerus ſit KQ, cujus logarithmus analogus eſt $\frac{2.HPQM}{r}$. Quæſitus numerus ſit KZ, cujus logarithmus hyperbolicus erit $\frac{2.TNZV}{r}$: ergo ex conditione problematis HPQM $=$ TNZV, & dempto communi TNQM erit HPNT $=$ MQZV; ergo ex hyperbolæ proprietate KP : KN :: KQ : KZ; atqui KP : KN :: $\frac{r}{\sqrt{2}} : r :: 1 : \sqrt{2}$: ergo KQ : KZ :: $1 : \sqrt{2}$, & KQ $\sqrt{2} =$ KZ. Itaque numerus logarithmi analogi multiplicatus per $\sqrt{2}$ dat numerum æqualis logarithmi hyperbolici.

His præmiſſis quoniam demonſtravi S $\frac{rd\varphi}{Sh.\varphi} = \frac{2.KHM}{r}$ exiſtente cotangente LO $= Ch.\varphi$, erit S $\frac{rd\varphi}{Sh.\varphi} = l\,\frac{r}{\sqrt{2}}.$ $\frac{\sqrt{Ch.\varphi+r}}{\sqrt{Ch.\varphi-r}}$, qui logarithmus eſt analogus; ergo S $\frac{rd\varphi}{Sh.\varphi} =$

$l\,r.\frac{\sqrt{Cb.\varphi+r}}{\sqrt{Cb.\varphi-r}}$ ſumpto logarithmo hyperbolico.

Antequam formulas continentes quantitates circulares expedio, in mentem revoco theoremata quatuor, quæ demonſtrata ſuppono in trigonometricis: nempe

$$r+Cc.\varphi=\frac{rSc.\varphi}{Tc.\frac{\varphi}{2}},\quad r+Sc.\varphi=\frac{Cc.\varphi}{r}.Tc.\frac{\omega+\varphi}{2}$$

$$r-Cc.\varphi=\frac{Sc.\varphi.Tc.\frac{\varphi}{2}}{r},\quad r-Sc.\varphi=\frac{rCc.\varphi}{Tc.\frac{\omega+\varphi}{2}}:\ \text{ergo}$$

$$\frac{r+Cc.\varphi}{r-Cc.\varphi}=\frac{r^2}{\overline{Tc.\frac{\varphi}{2}}^2},\quad \frac{r+Sc.\varphi}{r-Sc.\varphi}=\frac{\overline{Tc.\overline{\omega+\varphi}}^2}{r^2}.$$

Demonſtravi $S\frac{rd\varphi}{Cc.\varphi}=\frac{2.KHM}{r}$, exiſtente tangente HI $=Sc.\varphi$: ergo $S\frac{rd\varphi}{Cc.\varphi}=l\frac{r}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{r+Sc.\varphi}}{\sqrt{r-Sc.\varphi}}=l\frac{1}{\sqrt{2}}.Tc.\frac{\omega+\varphi}{2}$. Hi logarithmi in analogorum ſyſtemate accipiendi ſunt. Ut ad hyperbolicos tranſeamus, ſatis eſt numeros multiplicare per $\sqrt{2}$, & habebimus

$$S\frac{rd\varphi}{Cc.\varphi}=l\,r.\frac{\sqrt{r+Sc.\varphi}}{\sqrt{r-Sc.\varphi}}=l\,Tc.\frac{\omega+\varphi}{2}.$$

Similiter $S\frac{-rd\varphi}{Sc.\varphi}=\frac{2.KHM}{r}$, exiſtente HI $=Cc.\varphi$: ergo

$$S\frac{-rd\varphi}{Sc.\varphi}=l\frac{r}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{r+Cc.\varphi}}{\sqrt{r-Cc.\varphi}}=l\frac{r^2}{\sqrt{2}.Tc.\frac{\varphi}{2}}:\ \text{igitur}$$

$S\frac{rd\varphi}{Sc.\varphi}=l\frac{r}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{r-Cc.\varphi}}{\sqrt{r+Cc.\varphi}}=l\frac{1}{\sqrt{2}}.Tc.\frac{\varphi}{2}$. Hi ſunt logarithmi analogi, quorum numeros ſi multiplices per $\sqrt{2}$, obtinebis integrationem per logarithmos hyperbolicos, nimirum $S\frac{rd\varphi}{Sc.\varphi}=l\,r.\frac{\sqrt{r-Cc.\varphi}}{\sqrt{r+Cc.\varphi}}=l\,Tc.\frac{\varphi}{2}$. Hæc oſtendunt, quantum meæ formulæ cum Eulerianis conveniant. Vale.

Ex Coll. S. Luciæ poſtridie Idus Septembris 1763.

VIN-

VINCENTIUS RICCATUS VIRGILIO CAVINÆ
S. P. D.

EAs formulas differentiales, in quibus differentia logarithmi analogi, ſive arcus circularis multiplicatur vel dividitur aut per ſolum ſinum, aut per ſolum coſinum elatum ad quamlibet integram poteſtatem, ita a me pertractatas arbitraris, ut nihil deeſſe videatur. Verum quum ſæpenumero accidat, ut in eamdem formulam tum ſinus, tum coſinus ingrediatur, judicas, non eſſe omittendam methodum, qua facile integrationem conſequamur, ne theoria hæc admodum incompleta relinquatur. Poſtulatio tua effecit, ut ea, quæ olim tibi ſcripſeram, in mentem revocarem, atque inſpicerem, utrum methodus ad difficiliora, quæ petis, traduci poſſet. Res ex voto ceſſit. Ut autem hac de re certiorem te faciam, tertiam epiſtolam ſcribo, qua tuis petitionibus pleniſſime ſatisfacio.

In eadem prorſus methodo inſiſtens præmitto hæc theoremata

$$\overline{m+n}\; S\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n-1}\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m+1}\, d\varphi = r\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n}\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m} + m r^2 .\; S\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n-1}\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m-1}\, d\varphi$$

$$\overline{m+n}\; S\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m-1}\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n+1}\, d\varphi = r\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m}\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n} - n r^2 .\; S\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m-1}\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n-1}\, d\varphi$$

$$\overline{m+n}\; S\, \overline{Sc.\varphi}^{\,n-1}\, \overline{Cc.\varphi}^{\,m+1}\, d\varphi = r\, \overline{Sc.\varphi}^{\,n}\, \overline{Cc.\varphi}^{\,m} + m r^2 .\; S\, \overline{Sc.\varphi}^{\,n-1}\, \overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, d\varphi$$

$$\overline{m+n}\; S\, \overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, \overline{Sc.\varphi}^{\,n+1}\, d\varphi = -r\, \overline{Cc.\varphi}^{\,m}\, \overline{Sc.\varphi}^{\,n} + n r^2 .\; S\, \overline{Cc.\varphi}^{\,m-1}\, \overline{Sc.\varphi}^{\,n-1}\, d\varphi .$$

Prima duo theoremata demonſtrabis, ſi quantitatis $\overline{Ch\,\varphi}^{\,m}\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n}$ differentiam accipias hoc modo $D.\overline{Ch.\varphi}^{\,m}\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n} = m\, \overline{Sh\varphi}^{\,n}\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m-1}\, dCh.\varphi + n\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m} . \overline{Sh.\varphi}^{\,n-1}\, dSh.\varphi$. Pro $dCh.\varphi$, $dSh.\varphi$ eorum valores ſubſtitue, ut habeas

$r D\, \overline{Sh.\varphi}^{\,m}\, \overline{Sh\varphi}^{\,n} = m\, \overline{Sh.\varphi}^{\,n+1}\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m-1}\, d\varphi + n\, \overline{Ch.\varphi}^{\,m+1} . \overline{Sh.\varphi}^{\,n-1}\, d\varphi$. In hac ſi pro $\overline{Sh.\varphi}^{\,n+1}$ ponas $\overline{Sh.\varphi}^{\,m-1}$.

$\overline{Ch.\varphi}^{2} - r^{2}$, & opportune tranſferas terminos, orietur primum theorema; ſi vero pro $\overline{Ch.\varphi}^{m+1}$ ſcribas $\overline{Ch.\varphi}^{m-1}.r^{2} + \overline{Sh.\varphi}^{2}$ orietur ſecundum theorema.

Simili modo reliqua duo theoremata demonſtrabis. Nam $D\,\overline{Cc.\varphi}^{m}\,\overline{Sc.\varphi}^{n} = m\,\overline{Sc.\varphi}^{n}\,\overline{Cc.\varphi}^{m-1}\,dCc.\varphi + n\,\overline{Cc.\varphi}^{m}.\overline{Sc.\varphi}^{n-1}\,d\varphi$. Pone $dCc.\varphi = \frac{-d\varphi\, Sc.\varphi}{r}$, $dSc.\varphi = \frac{d\varphi\, Cc.\varphi}{r}$, ut oriatur $rD\,\overline{Cc.\varphi}^{m}\,\overline{Sc.\varphi}^{n} = -m\,\overline{Sc.\varphi}^{n+1}\,\overline{Cc.\varphi}^{m-1}\,d\varphi + n\,\overline{Cc.\varphi}^{m+1}.\overline{Sc.\varphi}^{n-1}\,d\varphi$. Si pro $\overline{Sc.\varphi}^{n+1}$ ſubſtituas $\overline{Sc.\varphi}^{n-1}.\overline{r^{2} - \overline{Sc.\varphi}^{2}}$, factis congruis ſubſtitutionibus tertium theorema ſeſe offeret; ſi vero pro $\overline{Cc.\varphi}^{m+1}$ ſcribas $\overline{Cc.\varphi}^{m-1}.\overline{r^{2} - \overline{Sc.\varphi}^{n}}$, quartum theorema apparebit.

Si exiſtente n numero integro vel poſitivo, vel negativo, ſit m numerus integer affirmativus, in quantitatibus hyperbolicis utere theoremate primo, in circularibus tertio. Namque ſi m ſit impar, & $m+1$ par, formula $\overline{S\varphi}^{n-1}.\overline{C\varphi}^{m+1}\,d\varphi$ dependet a $\overline{S\varphi}^{n-1}\,\overline{C\varphi}^{m-1}\,d\varphi$; hæc a $\overline{S\varphi}^{n-1}.\overline{C\varphi}^{m-3}\,d\varphi$; atque ita deinceps, donec $C\varphi$ exponens $= 0$: ergo propoſita integratio dependebit ab integratione $\overline{S\varphi}^{n-1}\,d\varphi$, quæ in ſuperioribus litteris tradita eſt.

Si vero eſſet m par, & $m+1$ impar, methodus producenda eſt, donec deveniamus ad terminum, in quo $C\varphi$ habeat exponentem $= 1$; ergo propoſita formula ab hac dependebit $\overline{S.\varphi}^{n-1}\,C.\varphi.d\varphi$, ſed $C\varphi.d\varphi = rdS\varphi$; ergo ultima formula fiet $r\,\overline{S\varphi}^{n-1}\,dS\varphi$, quæ ſemper integrabilis eſt, excepto caſu, in quo $n = o$, quia in hoc dependet a logarithmis.

Si exiſtente m numero integro vel poſitivo, vel negativo, ſit n integer & affirmativus, adhibe pro quantitatibus hyperbolicis theorema ſecundum, quartum pro circularibus. Si n ſit impar, & $n+1$ par, demonſtrabis propoſitam depen-

pen.

pendere a $\overline{C\varphi}^{m-1} d\varphi$, de qua in litteris ſuperioribus dictum eſt ſatis. Si vero n ſit par, & $n+1$ impar, propoſitam reduces ad $\overline{C\varphi}^{m-1} S\varphi . d\varphi$: atqui $S\varphi . d\varphi = \pm r d C\varphi$; ſignum $+$ valet in hyperbolicis, $-$ in circularibus; ergo reductio fit ad formulam $\pm r \overline{C\varphi}^{m-1} dC\varphi$, quæ algebraice integrabilis eſt excepto caſu $m = o$. Si tam m, quam n eſſet numerus integer, & affirmativus, duplex formula duplicem modum præberet perveniendi ad integrationem.

Quod ſi m, n uterque eſſet negativus, ad integrationem opus erit aliquantulum invertere theoremata propoſita. Methodum oſtendam in primo theoremate. Mutentur ſigna ſpeciebus m, n, ut ex negativis fiant poſitivæ, & orietur

$$\overline{-m-n}\, S \frac{d\varphi}{\overline{Sb.\varphi}^{n+1}\, \overline{Cb\varphi}^{m-1}} = \frac{r}{\overline{Sb.\varphi}^{n}\, \overline{Cb\varphi}^{n}} - mr^2 .$$

$S \frac{d\varphi}{\overline{Sb.\varphi}^{n+1}\, \overline{Cb.\varphi}^{m+1}}$; ergo opportune translatis terminis

$$mr^2 S \frac{d\varphi}{\overline{Sb.\varphi}^{n+1}\, \overline{Cb.\varphi}^{m+1}} = \frac{r}{\overline{Sb.\varphi}^{n}\, \overline{Cb.\varphi}^{m}} + \overline{m+n}.$$

$S \frac{d\varphi}{\overline{Sb.\varphi}^{n+1}\, \overline{Cb.\varphi}^{m-1}}$. Simili ratione in ſequentia convertes reliqua theoremata inventa

$$nr^2 S \frac{d\varphi}{\overline{Cb.\varphi}^{m+1}\, \overline{Sb.\varphi}^{n+1}} = \frac{-r}{\overline{Cb.\varphi}^{m}\, \overline{Sb.\varphi}^{n}} - (\overline{m+n}.$$

$$S \frac{d\varphi}{\overline{Cb.\varphi}^{m+1}\, \overline{Sb.\varphi}^{n-1}}$$

$$mr^2 S \frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{n+1}\, \overline{Cc.\varphi}^{m+1}} = \frac{r}{\overline{Sc.\varphi}^{n}\, \overline{Cc.\varphi}^{m}} + \overline{m+n}.$$

$$S \frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{n+1}\, \overline{Cc.\varphi}^{-m-1}}$$

$$nr^2 S \frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{m+1}\, \overline{Cc.\varphi}^{n+1}} = \frac{-r}{\overline{Cc.\varphi}^{m}\, \overline{Sc.\varphi}^{n}} + \overline{m+n}.$$

$$S \frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^{m+1}\, \overline{Sc.\varphi}^{n-1}}.$$

Qua-

Quatuor hæc theoremata adhibenda ſunt eo prorſus modo, quo ſuperiora. Nam m exiſtente integro, & affirmativo, primum & tertium theorema in uſum eſt traducendum. Si m ſit impar, & $m+1$ par, formula, in qua coſinus exponens $= m+1$, dependet ab ea, in qua exponens $= m-1$; hæc ab ea, cujus exponens $= m-3$, atque ita deinceps. Hunc progreſſum produc, donec exponens $= o$. Quo facto ſummatoria propoſitæ formulæ dependebit ab ea, in qua $d\varphi$ dividitur per ſolum ſinum elatum ad poteſtatem $n+1$, de qua actum eſt ſatis.

Si m ſit par, & $m+1$ impar, res eſt difficilior. Etenim eo tantum produci poteſt calculus, donec coſinus exponens $= 1$. Si enim ulterius produceretur, ut hic exponens fieret $= -1$, prodirent coefficientes $= o$, qui dum tranſeunt in diviſores, reddunt quantitates infinitas, & integrationem inutilem.

Eodem modo uſurpanda ſunt theoremata ſecundum, & quartum, ſi n ſit integer affirmativus. Nam ſi n ſit impar, & $n+1$ par, per eumdem progreſſum devenies ad formulam, in qua ſinus exponens $= o$, & habetur $d\varphi$ diviſa per coſinus poteſtatem $m+1$, cujus integrationem ſuperior epiſtola exhibet.

Si n ſit par, & $n+1$ impar, devenies ad formulam, in qua coſinus exponens $= 1$. Inutile eſt ulterius progredi propter diviſores $= o$.

Si alteruter ex numeris m, n ſit impar, conſtat quomodo integranda ſit formula; ſed ſi uterque par ſit, nondum res confecta eſt. In hoc caſu per primum aut tertium theorema deveni ad formulas $\frac{d\varphi}{\overline{Sh.\varphi}^{n+1}\,Ch.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{\overline{Sc.\varphi}^{n+1}\,Cc.\varphi}$. Deinde has ipſas formulas per theorema ſecundum aut quartum reduc ad ſequentes $\frac{d\varphi}{Sh.\varphi\,Ch.\varphi}$, $\frac{d\varphi}{Sc.\varphi\,Cc.\varphi}$. Quapropter quicumque has duas noverit integrare, & propoſitam integrabit.

Quæro primum integrationem formulæ $\frac{r^2\,d\varphi}{Sh.\varphi\,Ch.\varphi}$. Pro r^2 ſubſtituo quantitatem æqualem $\overline{Ch.\varphi}^2 - \overline{Sh.\varphi}^2$, ut fiat

$r^2\,d\varphi$

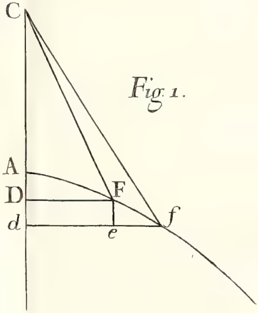


Fig. 1.

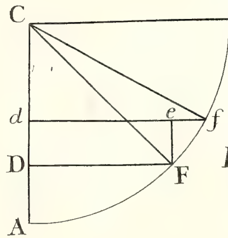


Fig. 2.

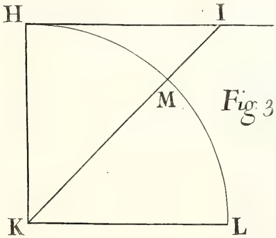


Fig. 3.

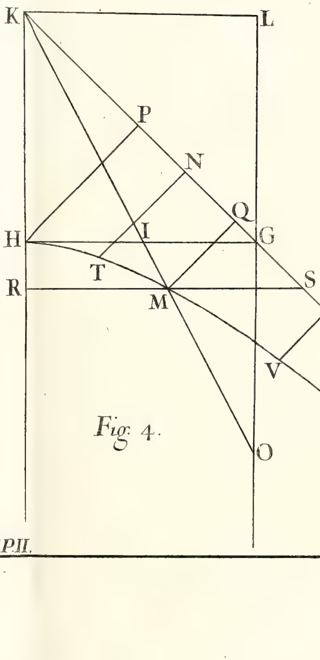


Fig. 4.

$\frac{r^2 d\varphi}{Sh.\varphi Ch.\varphi} = \frac{d\varphi \overline{Ch.\varphi}^2 - d\varphi \overline{Sh.\varphi}^2}{Sh.\varphi Ch.\varphi} = \frac{d\varphi Ch.\varphi}{Sh.\varphi} - \frac{d\varphi Sh.\varphi}{Ch.\varphi}$: ſed $d\varphi Ch.\varphi = r dSh.\varphi$, $dSh.\varphi = r dCh.\varphi$: ergo $\frac{r^2 d\varphi}{Sh.\varphi Ch.\varphi} = \frac{r dSh.\varphi}{Sh.\varphi} - \frac{r dCh.\varphi}{Ch.\varphi}$, & integrando, facta logarithmici ſyſtematis ſubtangente $= r$, fiet $r^2 S \frac{d\varphi}{Sh.\varphi Ch.\varphi} = lSh.\varphi - lCh.\varphi$, quam ſi dividas per r^2, habebis $S \frac{d\varphi}{Sh.\varphi Ch.\varphi} = \frac{lSh.\varphi - lCh.\varphi}{r^2}$.

Venio ad aliam $\frac{d\varphi}{Sc.\varphi Cc.\varphi}$, in qua pro r^2 ſubſtitue $\overline{Cc.\varphi}^2 + \overline{Sc.\varphi}^2$, ut obtineas $\frac{r^2 d\varphi}{Sc.\varphi Cc.\varphi} = \frac{d\varphi \overline{Cc.\varphi}^2 + d\varphi \overline{Sc.\varphi}^2}{Sc.\varphi Cc.\varphi} = \frac{d\varphi Cc.\varphi}{Sc.\varphi} + \frac{d\varphi Sc.\varphi}{Cc.\varphi}$: ſed $d\varphi Cc.\varphi = r dSc.\varphi$, $d\varphi Sc.\varphi = - r dCc.\varphi$; ergo $\frac{r^2 d\varphi}{Sc.\varphi Cc.\varphi} = \frac{r dSc.\varphi}{Sc.\varphi} - \frac{r dCc.\varphi}{Cc.\varphi}$, factaque ut antea integratione, & diviſione per r^2, $S \frac{d\varphi}{Sc.\varphi Cc.\varphi} = \frac{lSc.\varphi - lCc.\varphi}{r^2}$.

Quæ a me in hiſce litteris expoſita ſunt, tibi referenda eſſe cenſeo; namque ad ea fortaſſe non advertiſſem, niſi tuis me petitionibus excitaſſes. Itaque hac de cauſſa inventa iſta, qualiacumque ſint, gratiora tibi eſſe debent. Vale.

Bononiæ quinto Kal. Martii 1764.

GUS-

GUSMANI GALEATII.

De cortice peruviano.

Mirabilis corticis peruviani vis in intermittentibus febribus, aliiſque periodicis morbis curandis adeo noſtris hiſce temporibus explorata, perſpectaque eſt, ut eam ulterioribus obſervationibus confirmare non amplius opus eſſe videatur; verumtamen cum in medicina facienda multa ſæpe occurrant, quæ aperte nos doceant, nullum remedii genus ita clarum, perſpicuumque eſſe, quin novis ſemper obſervationibus illuſtrari valeat, atque in hujuſmodi remedii non ſecus ac in aliorum adminiſtratione cautiones quaſdam ſervandas eſſe, quæ niſi opportune ſerventur, remedium ipſum omnino inutile, vel ſumme nocuum evadere poteſt, ideo operæ pretium me facturum putavi, ſi obſervationibus, & cautionibus illis, quæ ab Auctoribus afferuntur, non nullas alias adjungerem, quæ ab Auctoribus ipſis vel neutiquam, vel obſcure admodum propoſitæ ſunt.

Inter cæteros, qui de præclara prædicti corticis vi, & efficacia in intermittentibus febribus loquuti ſunt, nullus ſane, meo judicio, rem hanc melius attigiſſe videtur, quam clariſſimus Torti, qui non ſolum eximiam hujuſmodi febrifugi præſtantiam rationibus, & obſervationibus multis declaravit, verum etiam dilucide nobis oſtendit, quibus in febribus unicum, & ſingulare remedium ſit, in quibus innocuum quidem, ſed non omnino neceſſarium, in quibus denique inutile, immo etiam nocuum exiſtat. Verum cum in hujuſmodi remedio adminiſtrando quædam mihi occurrerint obſervanda, quæ allatam a prædicto Auctore de Peruviano Cortice doctrinam vel magis illuſtrant, vel non niſi circumſpectionibus multis amplectendam eſſe oſtendunt, opportunum duxi ea vobis afferre, quæ in ipſa Torti doctrina approbanda, aut excipienda eſſe cognovi.

Et

Et primum quidem diviſio illa, quam Tortus aſſignat, perniciofarum febrium in duas ſupremas Claſſes, quarum prima ſeptem ſpecies, altera unicam tantum comprehendit, etſi multas ex inſignioribus exprimat, non omnes tamen ita includit, quin primis ſeptem ſpeciebus alia adjungi queat, quæ ex peculiari quodam ſymptomate eam comitante, aſthmatico nempe inſultu, aſthmatica dici poteſt. Tortus ipſe in iis, quas ex Mercato tranſtulit, perniciofarum intermittentium ſpeciebus aliquam hujuſce ſymptomatis mentionem fecit, & Hiſtoriam affert ſatis mirabilem, a Corghio, Mantuano Medico, ſibi communicatam, febris cujuſdam modo intermittentis, modo continuæ aſpectu recurrentis, cum aſthmatico inſultu ſemper conjunctæ, quæ peruviani corticis uſu pluries repetito curata fuit; ſed cum in perniciofis illis, quas ipſi vidiſſe contigit, raro, & fere nunquam ſymptoma iſtud obſervaverit, ipſum, tanquam aliquid accidentale, cum febribus conjungi aliquando poſſe concedit, ſed non ideo tamen ad peculiarem aliquam febris ſpeciem conſtituendam ſufficere aſſerit. Ego vero cum, non ſecus ac reliquas a Torto deſcriptas, hanc quoque non ſemel obſervaverim, cum ſymptoma, quod ipſi adjungitur, æque periculoſum, & lethale ſit, ac lethargus, ſyncope, diarrhœa, & reliqua ſymptomata, quæ cæteris perniciofis febribus ab ipſo recenſitis adjungi ſolent; cum denique, non minus ac illæ, peruviani corticis uſui facile cedat, ideo, eadem ratione, qua ipſas, inter perniciofarum intermittentium febrium claſſem aſthmaticam quoque ponendam eſſe judico.

Aſſertum hoc meum ſummopere confirmant duo inſigniores caſus, qui elapſis annis mihi ſe obtulerunt obſervandi. Laborabat enim febre continua periodica, & acutiore Homo quidam ſeptuagenarius temperamenti ſanguineo-billioſi, habitus vero corporis ſatis robuſti, & obeſi, largiori vini potui indulgere ſolitus, qui eo ipſo tempore, quo febre correptus fuit, maxima ſpirandi difficultate, cum aliquo ſtertore, & tuſſi ita vexari cœpit, ut, ægre admodum jacens, plerumque in lecto ſedere cogeretur. Pulſus erat durus, & frequens, lingua arida, vox ob pectoris anguſtiam languida, & rauca, tuſſis vero irrita, & ſine ullo fere excreatu. Bis, aut ter ſanguis extractus fuit, ſed nullo fere cum levamine, quamvis enim, horis præſertim matutinis, febris, nec non etiam ſpi-

randi difficultas, & ſtertor aliquantulum remittere viderentur, quod primis diebus peractis ſanguinis miſſionibus tribui ſolebat: (ejus enim craſſamentum durum, nigrum, & compactum cum aliqua cruſta plerumque apparuit, ſerum vero turbidum, & paucum) horis tamen pomeridianis ſymptomata omnia, una cum febre, augebantur, neque ulla per ſputum materiæ in pulmonibus murmurantis excretio haberi poterat; urinæ quoque paucæ, turbidæ, & rubræ, ſudor nullus. Circa ſeptimam inſignior aliqua febris, & ſymptomatum remiſſio horis dictis apparere cœpit, ſed poſt meridiem omnia magis exacerbabantur, perſentiente etiam ægro in principio exacerbationis ad artuum extremitates leviorem quemdam frigoris ſenſum. Spectabilior hæc periodorum diſtinctio, quæ obſervari cœperat, me duxit in ſuſpicionem, fermentum aliquod in hoc morbo latitare ſimile illi, quod in intermittentibus febribus pernicioſis lethalium ſymptomatum cauſa eſſe ſolet, unde de ipſo, peruviani corticis uſu, expugnando cogitavi. Tres itaque corticis drachmæ in aqua violarum infuſi in febris remiſſione propinatæ ſunt prima die, totidemque etiam iiſdem horis altera die: mirum dictu, vix ſecundam chinæ chinæ doſim aſſumpſerat æger, cum non ſolum febris, & aſthmatica affectio remittere cœpit, verum etiam copioſa materiæ cujuſdam cattarrhalis, ſanguineæ, & bilioſæ per ſputum excretio haberi, ut quod neque oleoſis, neque emollientibus, neque attenuantibus ullis remediis obtineri potuit, ſola corticis exhibitione facile aſſequeremur; unde proſecuto ulterius ejuſdem uſu, & imminuta remedii doſi, donec ad drachmam, & ſemidrachmam contraheretur, poſtquam tres circiter chinæ chinæ uncias aſſumpſerat, ceſſato tandem heterogeneæ materiæ ſputo, eademque in concoctam, & mere cattarrhalem mutata, auctis admodum urinis, æger perfecte convaluit, nullis remanentibus prioris orthopnœæ, & febris indiciis, neque ulterius eo anno, vel ſequenti recidivam paſſus eſt; cumque tertio anno iterum periodica febre, inſtar tertianæ duplicis acutioris recurrente, abſque ullo tamen aſthmatico inſultu correptus fuerit, poſt largas ſanguinis miſſiones ter factas, ſolo peruviani corticis uſu ad priſtinam ſalutem reſtitutus fuit.

Non diſſimilis fuit exitus mulieris cujuſdam quadragenariæ, ruri commorari ſolitæ, quæ cum a tertiana ſimplici, æſtivo tempore eam aggreſſa, prædicti corticis exhibitione liberata

ſatis

ſatis ſuperque fuerit, neglecto poſtmodum ulteriori ejuſdem uſu, atque ad conſueta ſua munia, & laborioſæ vitæ genus regreſſa, circa autumnum contumaci tuſſi, & ſpirandi difficultate correpta adeo fuit, ut vel in lecto ſedere, vel in uno tantum latere decumbere cogeretur. Febris quoque continua, & lenta acceſſit, quæ una cum tuſſi, & ſpirandi difficultate, noctu exacerbabatur, & ſputum, quod ægre aliquantulum, ſed abunde excernebat, craſſum, & quaſi puri ſimile apparebat. Sanguinis miſſio, emollientia, expectorantia, & edulcorantia plurima remedia adminiſtrata fuerant, ſed omnia incaſſum, accedente etiam prædictis ſymptomatibus aliqua virium proſtratione, & corporis macie, ut Medicus, qui eam curaverat, de phthiſi jam jam inchoata ſuſpicionem non levem habuerit. Mulieri huic, meo conſilio, peruvianus cortex exhibitus fuit ad duarum drachmarum quantitatem ſingulo mane horis a febris exacerbatione remotioribus, non neglectis tamen remediis iis, quæ poſſent ſputi excretionem faciliorem reddere. Vix unam corticis unciam aſſumpſerat, cum ſpirandi difficultas imminuta fuit, ita ut ſupina, & in utroque latere facile decumbere poſſet: febris quoque, & tuſſis valde minor facta, immo catarrhalis materiæ puri ſimilis copia, & qualitas admodum mutata fuit, ut tandem, omnibus ſemper in melius converſis, poſt unam, vel alteram hebdomadam ſalutem, & robur, prædicti corticis uſu ad aliquot dies etiam protracto, recuperaverit.

Non minori facilitate, qua aſthmaticam, lethargicam quoque febrem chinæ chinæ ope ſanatam vidi; nam Sacerdoti cuidam fere octogenario, qui inſultu quodam, apoplexiæ ſimili, repente correptus, ſanguinis miſſione, aliiſque remediis, quæ apoplecticis convenire ſolent, primo curatus, integrum diem ſine ſenſu, & motu, cum febri, & ſtertore permanſit; altera vero die, quaſi a ſomno expergefactus, priſtino ſenſu, & motu recuperato, ſine febre, aliove gravi incommodo, vitam ad horas pluſquam viginti perduxit. Poſtquam adventu novæ febris iiſdem ſymptomatibus comitatæ certi facti fuimus, ipſum tertiana ſimplici lethargica pernicioſa affectum eſſe, corticis unciam ſequenti die a paroxyſmo libero adminiſtravimus, eundemque non ſolum ab apoplectico, quem timebamus, inſultu poſtridie immunem non ſine admiratione vidimus, verum etiam tam modica febre detentum, ut de integra ſanitate,

quam poſtmodum, continuato remedii uſu, optime fuit conſequutus, certam quodammodo ſpem, in ipſo primo peruviani corticis effectu, afferre potuerimus.

Eventum plane ſimilem habuit convulſiva quædam, & ſpaſmodica affectio, cum febre, & ſopore conjuncta, quæ in juvenem annorum circiter triginta improviſo impetu invaſit. Hic enim vix a tertiana febri, ex genere fortaſſe depurativarum, peruviani corticis uſu liber evaſerat, & ab icterica, quæ poſt febrem ſequuta fuit, affectione aliorum remediorum ope ſanatus vix fuerat, valetudinarius adhuc, cum conſuetis ſuæ artis, & vitæ muniis ſe tradere cœperit, loquela, & ſenſu repente deſtitutus apparuit: oculi clauſi, facies livida, lingua arida, membraque omnia vel immota, vel ſpaſmodicis motibus agitata cernebantur, & niſi clamores, & ejulatus, quos interdum emittebat, pulſuſque, qui vehemens, frequens, & vibratus apparebat, virium robur adhuc in eo conſiſtere indicaſſent, jam jam morti proximus dictus eſſet. Viginti, & ultra horas in hoc ſtatu permanſit, neque ſanguinis miſſione, nec cucurbitulis, nec violentis frictionibus, neque ullo alio artis præſidio, vel incitamento commoveri, aut expergefieri potuit; donec ſponte ſua, quieſcentibus omnibus, vox rediit, oculos aperuit, & potum, quem vel reſpuere, vel, ſi violenter in os intruſum, per os evomere ſolebat, placide aſſumpſit. Horas non amplius ſex duravit hæc quies, ægro tamen non omnino adhuc a febre libero, cum poſt meridiem, aucta denuo febre, omnia prædicta ſymptomata reſurrexerunt, nihil juvantibus adjumentis illis, quæ ad eum excitandum iterum adminiſtrabantur. A veſicantibus ipſis coxis applicitis, licet affrictu commotis, nullo doloris ſenſu affici videbatur, & quamvis a violentioribus prædictis convulſionibus interdum perculſus, quaſi e lecto ſurgere tentans, violentum aliquem motum, & vocem ederet, plerumque tamen ſupinus, aphonus, & immotus in lecto jacebat. Hujuſmodi febris tanto ſymptomatum numero ſtipata nos duxit ad ſuſpicandum, eam ex intermittentium lethargicarum genere eſſe, ideoque ſummopere pernicioſam, immo etiam lethalem, niſi prompta peruviani corticis exhibitione funeſtus ejuſdem exitus impediretur. Hunc igitur ægro quam citiſſime propinavimus, cumque nihil aliud aſſumeret, quam potionem quandam cordialem, quam etiam vomitu aliquando ejiciebat, in hanc ipſam

ipſam injecimus ſemiunciam corticis in ſubtiliſſimum pulverem redacti. Hujuſmodi potionis hauſtus identidem offerebantur, & quanquam, his per vomitum magnam partem rejectis, vix prædictæ doſis dimidium primis horis recipere, aut retinere potuerit, in progreſſu tamen, diminuto febris, & ſymptomatum impetu, aliam ſimilem doſim haud difficulter aſſumpſit, & intra ſtomachum retinuit. Poſt aſſumptam utramque chinæ doſim non ſolum illam, quam diximus, antecedentis diei ſex circiter horarum quietem habuit, ſed horis etiam ſequentibus, aucta ſolum aliquantulum febre, nullum ex prædictis ſymptomatibus eam comitarunt. Reſumpſit itaque iterum corticem, & quanquam poſtridie horis illis, in quibus febris, & ejuſdem deſcripta ſymptomata magis urgere ſolebant, aphonus aliquantulum factus fuerit, in progreſſu tamen, repetito pluries corticis uſu, & vocem, & ſenſum, & motum, & reliqua, quæ integram, & perfectam in eo ſalutem ante primæ intermittentis febris adventum conſtituere ſolebant, iterum feliciter eſt conſequutus.

Non ita porro ſolicitus, & promptus fuit corticis effectus in febribus aliis perniciofis, quas ſolo ejuſdem uſu facile ſanari poſſe Torti obſervationes nos docent; nam in cholericis, & dyſentericis pluribus chinam chinam ſimpliciter adminiſtratam, neque febres tollere, neque fluxus ſiſtere non ſemel obſervavi, ita ut ad aliud quodpiam remedium, quod cum ea uniretur, tunc quidem confugere opus habuerim, quo pluries exhibito febris tandem, una cum pernicioſo ſymptomate eam comitante, haud difficulter ablata fuit. Exempla duo afferam, unum in robuſtiore quodam ſene dyſenterico fluxu, & periodica lentiore febre ad plures hebdomadas afflicto; alterum in grandæva muliere, quæ poſtquam pluries in tertianam modo ſimplicem, modo duplicem, ſed intermittentem reciderit, atque ab ea peruviani corticis uſu libera evaſerit, vomitu tandem, & paulo poſt diarrhœa contumaci una cum febre correpta fuit. Primus ſanguinis miſſionibus, & diluentibus, ac detergentibus primo, deinde corroborantibus pluribus, ſed nullo fere cum levamine curatus fuit, poſtmodum, cum ex notabili quadam febris remiſſione horis præſertim matutinis obſervata, & ex modico rigoris ſenſu, in ipſo exacerbationis initio ægrum interdum divexante, dubium aliquod oriretur, ne febris ex ſpecie illarum intermittentium

eſſet,

eſſet, quæ cholericæ nuncupantur, peruviani corticis uſu tentandam eſſe putavi; præſertim cum certus ab ipſo ægro factus fuerim ab hoc remedii genere alias in tertiana uſurpato adeo alvum obſtrictum fuiſſe, ut clyſteribus illum ciere oportuerit. Ad duarum drachmarum pondus præſcriptus fuit cortex, eodemque in tali doſi ad plures dies aſſumpto, a febre quidem aliquantulum, a dyſenterico vero fluxu nihil ægrum levari vidi, immo ſtatim poſt chinam aſſumptam dejectiones crebriores, & copioſiores fieri. Imminuta itaque chinæ doſi, ſcrupulum unum caſcarillæ pulveris eidem adjunxi, non neglectis etiam aliis quibuſdam corroborantibus ante chinæ uſum adhibitis; ut diaſcordio, pulvere nucis moſcatæ torrefacto, & ſimilibus. Vix ſeptem, aut octo dies chinam chinam cum caſcarilla conjunctam aſſumpſerat æger, cum, ablata febre, dejectiones etiam rariores, & minus fluidæ apparuerunt, nec ullo ſanguine tinctæ; tandemque, appetitu, & viribus reſtitutis, circa quadrageſimum a prima morbi invaſione diem omnino convaluit.

Mulieri autem, quam ſecundo loco innui, eandem caſcarillæ doſim cum chinæ chinæ drachma, tres vel quatuor dies ab ipſo morbi initio, exhibere cœpi, non neglectis tamen remediis aliis cordialibus, & corroborantibus, quæ ad vires reſtaurandas opportuniora duxi; cumque ea primis diebus alvum terve, quaterve deponere, & febris ſingulis diebus poſt meridiem conſtanter recurrere ſoleret, in progreſſu, poſt aſſumptum remedium, ablata febre, dejectiones imminutæ admodum fuerunt, & circa vigeſimam omnino ad naturalem conſiſtentiam, & copiam reſtitutæ: ſtomachi quoque, & virium languor omnino ablatus, ut quæ in ipſo principio morbi, vomitu tentata, cibos vix aſſumere valebat, & vix in lecto moveri, ceſſato cholerico fluxu, & cibos appetere, & e lecto aſſurgere facile poſſet; immo, aucta etiam urinarum copia, & moderata quadam ſudoris excretione, bonam adeo valetudinem adepta eſt, ut recidivam, cui ſæpius obnoxiam diximus, non amplius paſſa fuerit. Ex his itaque intelligere facile poſſumus, quantæ utilitatis ſit in dyſentericis, & cholericis febribus unio caſcarillæ cum peruviano cortice; tali enim conjunctione non ſolum pernicioſa ſymptomaticæ excretionis qualitas, & copia corrigitur, verum etiam febrifuga corticis vis augetur quodammodo, & ad ſcopum dirigitur; ita ut in

ſubje-

ſubjectis quoque iis, in quibus ſolicitæ nimis, & copioſæ alvi excretiones impediunt, ne ad debitum tempus cortex in ventriculo, & in inteſtinis detineatur, ideoque febrile fermentum non ſatis per ipſum corrigatur, addita caſcarillæ vi, & dejectiones moderentur, & febris promptius, & facilius auferatur. Hoc pluribus exemplis confirmare poſſem, ſed præſertim uno, quod elapſo anno mihi obſervare contigit in adoleſcente quodam equite, qui tertiana duplici intermittente laborabat; in eo enim, cum immodicæ alvi excretiones, & uberrimi ſudores, qui ſingulis diebus poſt aſſumptum corticem ſuccedere obſervabantur, impedimento eſſent, ne febris abigeretur; ideoque plures chinæ chinæ uncias, modo in minore, modo in majore doſi, viginti, & ultra dierum ſpatio incaſſum aſſumpſerit; poſt unionem caſcarillæ cum cortice, & excretiones duas, illico moderari, & febriles paroxyſmos breviores fieri, & tandem, aucta urinarum copia, & virium robore, poſt trigeſimam diem febrem omnino fugari vidimus.

Non igitur in univerſum conſtare videtur clariſſimi Torti opinio, chinam chinam ſcilicet ſimpliciter ſumptam effectum ſuum felicius præſtare, quam ſi cum alio quopiam remedio conſocietur; nam, præter ea, quæ ego modo attuli, Albertinus quoque, in Commentariis noſtræ ſcientiarum Academiæ aperte nos docet, in febribus, quæ a ſuppreſſa aliqua habituali evacuatione originem habent, ad criſim ſtatim ciendam opportunum eſſe, ut chinæ chinæ adjungantur modo purgantia, modo diuretica, modo diaphoretica; remque fere ſemper ſibi bene ceſſiſſe; ſi, vel in ſuppreſſis prædictis habitualibus evacuationibus, vel in febribus, quibus antecedunt, aut ſubſequuntur aliquæ viſcerum obſtructiones, chinam ipſam cum purgante aliquo remedio conjungeret. Doleus vero, & Mangetus vel cum alkalicis tam fixis, quam volatilibus, vel cum ſalibus mediis, puta cum ſale ammoniaco mixtam præbent. Poſſunt enim remedia iſta diſpoſitionem illam tollere, quæ in ſanguine eſt, propter quam pernicioſæ febres modo colliquativæ, modo coagulativæ a Torto ipſo dicuntur. Diſpoſitio enim hæc cum cauſſa eſſe poſſit multorum ſymptomatum, quæ cum febribus conjunguntur, niſi a china tollatur, oportet ut aliis remediis auferatur; cæterum neque ſymptomata, neque febres ipſæ omnino curari poterunt. Ego id quoque in re medica exercenda ſæpiſſime obſervavi, ideoque non ſolum

lum caſcarillam, ſed & opium, & ſales dictos; & alia plurima remedia cum peruviano cortice conjungere opus habui, prout humores vel ſiſtere, vel ſolvere, vel compeſcere, vel movere oportebat, neque exinde febrifugam corticis vim imminutam, aut mutatam vidi, immo ægros ad vitam, & ſalutem promptius, & melius perductos quandoque fuiſſe cognovi.

Contigit præterea mihi id ſæpe expe'ri, quod ab obſervationibus Torti aliquantulum differt, videlicet chinam chinam ad duas, & ultra, uncias, ea, quam ipſe docet, methodo adminiſtratam, nullum effectum præſtitiſſe in febribus etiam, quæ tum ex natura ſua, tum ex ſymptomatibus, quæ eas comitabantur, vere intermittentes, pernicioſæ, & corruptivæ dici poterant: in his enim ſi chinæ uſus aliquantulum relinqueretur, pernicioſæ magis, & acutiores reddebantur, ita ut eam iterum, & ſolicite exhibere oporteret, atque ſaltem ad dimidiam unciam ſingulo die, vel horas aliquot ante paroxyſmum, vel in ejuſdem declinatione; unde ad quinque, ſex, & ultra unciarum quantitatem devenire opus fuerit, ut febrilis fermenti vis infringeretur; immo in nobili quodam Viro pingui admodum, & eryſipilaceis fluxionibus ad crura pluries ſubiecto, integram corticis libram ſpatio circiter quadraginta dierum impendere neceſſe fuit, ut a febre omnino liber evaderet. Laborabat enim hic febre continua periodica horis præſertim matutinis remittente, plerumque poſt largos ſudores, quæ ſi, detracto cortice, tantillum in libertate poneretur, vehemens, & ferox fieri obſervabatur, cortice vero depreſſa miteſcebat admodum, & leniebatur, donec cortice ipſo perfecte ſubacta, poſt copioſas urinas, omnino tandem ceſſavit. Hanc autem majoris chinæ chinæ copiæ exhibendæ neceſſitatem obſervavi præſertim in hemitriteo, in tertiana duplici continua ſubintrante, & in iis etiam, quæ ſubcontinuæ a Torto dicuntur. Ex adverſo in iis, quæ primo ſub aſpectu continuarum, deinde poſt aliquot dies, præmiſſis præſertim ſanguinis miſſionibus, aliiſque minorantibus, & attemperantibus medicamentis, vere intermittentes, ſed acutiores, & pernicioſæ fiunt, in his, inquam, intermittentibus veluti ſecundariis, quarum prælaudatum Torti mentionem nullam feciſſe vidi, corticis effectum promptiorem eſſe obſervavi, eaſdemque, non minus ac intermittentes

pri-

primarias ab ipſo Torto deſcriptas, & ſuperius recenſitas, moderatæ illi, quam ſtatuit, duarum unciarum menſuræ facile cedere. Cedunt autem febres omnes, quæ characterem habeant illum, per quem a peruviano cortice ſanari poſſe diximus, vel cortex ipſe eo, quem Tortus proponit, modo exhibeatur, vel ſi Mortoni, aut Scydenhamii methodo adminiſtretur; confert tamen ſæpiſſime primam illam doſim, quam ægris acutioribus febribus detentis præſcribimus, paulo ampliorem eſſe, quam reliquæ, quæ ſucceſſive poſtmodum exhibentur. Hæc omnia poſſem pluribus exemplis confirmare; niſi diuturnitas temporis, qua vos, Sodales ornatiſſimi, in levioribus hiſce Hiſtoriolis detinui me tandem moneat humaniſſima patientia veſtra non amplius eſſe abutendum.

HYACINTHI FABRI.

De humano quodam Monſtro.

SI quid eſt in Phyſiologicis rebus adhuc perobſcurum, & cui lux tamen aliqua ſumma cum utilitate conjuncta ut affulgeat, & deſiderandum, & enitendum ſit, illud profecto rerum genus eſt, quæ Monſtrorum rationes, & cauſſas attinent. Quemadmodum enim ars obſtetricia tanti apud humanum genus intereſt, quanti in naſcentibus fœtibus membrorum integritas, incolumitas, ac vita facienda eſt; ſic profecto nihil magis cordi nobis eſſe debet, quam ut eas cauſſas internoſcamus, ex quarum cognitione ea avertere poſſimus, quæ vitiare quoquomodo valeant naſcentes fœtus. Hinc plura, & multa quidem cum laude, ſummi viri hac de re meditati, in lucem prodiderunt, adeo ut nihil ſupra a me expectandum videretur. Verum, cum Monſtrum quoddam ſingulare caſu mihi fortuna obtulerit conſiderandum, cujus vix unum, aut alterum apud ſcriptores, quos pervolutaverim, exemplum reperi; idcirco, ut in hoc genere exemplorum copia augeatur, illud deſcribere hoc ſpectabili loco conſtitui, & quæ de ipſo cogitaverim exponere.

Itaque, quod intuemini Monſtri genus ſpurio complexu ſuſceptum, Villica quædam, bene vigens, robuſta Puella, non obſcuro prorſus hujus noſtræ Diœceſis loco, felici partu anno 1748 enixa eſt. Cum nobis oblatum fuit, erat illud plane mortuum. At vivum tamen in lucem prodiiſſe, non levia nobis ex ſacris myſteriis ſuppetunt argumenta. Etſi vero clam, & quaſi furtim, nobis ab eo fuiſſet homine exhibitum, quo ad Forum Criminale deferebatur, commodum tamen accidit, ut ejuſdem formam, ſtructuram, & habitum explorarem diligenter, juberemque, ut ab induſtri Pictore, ne ejus memoria interiret, diligentiſſime effingeretur. Effictam imaginem, præſtantiſſimi Academici, præ oculis habetis. Quæ autem obſervando compererim, quidque philoſophando conjecerim, paucis excipite. Prin-

Principio autem, ut nobiliorem partem aggrediamur, ingentem in capite omnium fere cranii oſſium compreſſionem admirati ſumus. Os frontis, oſſa parietalia, & partim etiam temporalia, atque occipitis, quæ cartilaginea verius dixiſſes, ita ſupra cranii baſim appreſſa vidimus, ut omni ferme naturali interna cavitate deleta, ſuperficiem extrinſecus plano-concavam exhiberent. Veſtiebantur tamen communibus de more integumentis, adeo ut ne ipſi quidem capilli deeſſent, licet valde rari, ſimul implexi, & quadam quaſi cruſta cranium obducentes. Pulſatilis fontis nullum erat veſtigium, ſed quidpiam dumtaxat eo loci prominebat, quod digito tentatum, formam ſellæ equinæ referre quodammodo viſum eſt. Hæc porro oſſa, ſive, ut monui, potius cartilagines tenues maxime & flexiles, frontalibus quidem foveis ac temporalibus, ut dictum eſt, adhærebant, at non ita tamen, ut cavitati occipitali plane incumberent, ſed oblique potius verſus centrum baſeos cranii declinantes, exiguam cavitatem complecterentur, in qua molle aliquid tactu experti, quod cerebelli portionem aliquam fuiſſe conjecimus. Volebamus equidem conjecturam noſtram cartilagines elevando, quantum nobis res concedebat, viſu quoque confirmare; ſed illæ inferiori cranii baſi arcte adeo conjungebantur, ut fruſtra omnino ſeparationem tentaverimus. Quædam aliæ præterea prominentiæ proſtabant, ſed in illis, utcumque deorſum verſus criſtam oſſis etmoidis comprimerentur, nihil perſenſimus. Illud tamen notatu dignum hoc loco videtur, nimirum os frontale ita incubuiſſe glabræ ſuperficiei interioris laminæ, qua orbitarum utriuſque oculi ſuperior pars conſtituitur, ut bulbi oculorum valde tumentes, horrenteſque foras erumpere cogerentur. Palpebrarum cellularis plurimum erat madida; cornea valde lucida, & quaſi vitrificata; vaſis atro-rubeis reticulatis referta videbatur albuginea; vix obſervabatur pupilla; nec demum, propter nimiam humorum confuſionem detegi nudo oculo potuit, qualis eſſet cryſtallini humoris, iridis, multoque minus ciliaris ligamenti conditio & habitus. Patebat os, tumida erant labia, lingua item, quæ tertia ſui parte extra os patulum producebatur: muſculi colli, mobiliſque maxillæ, contracti erant, a quorum contractione collum ipſum perbreve, contractumque fiebat; colli autem contractioni notabilis etiam dorſi ipſius incurvatio & gibboſitas accedebat; tamen cellularis,

ris, qua magnum pectorale tegitur, craſſo turgebat humore, qui naturaliter in collum prorepens, ac maxillares glandulas tumefactus, ad parotides uſque recta protendebatur; tum vero in binos veluti tractus diviſus, quibus auriculæ æquo & ipſæ ampliores, & turgidæ comprehendebantur, ad occipitalem uſque regionem ſerpens, extendebatur. Quæ quidem omnia a nobis diligentiſſime, ſicuti ſunt expoſita, ita & obſervata fuerunt.

Quod ſi vero Anatomico uti cultro, quemadmodum erat maxime in votis, licuiſſet, procul dubio etiam turgidi, ob fluidorum copiam, carotidum trunci apparuiſſent. Cum enim ejuſmodi arteriarum officium ſit multiplici, qua gaudent ramificatione, non modo ad oculorum orbitas & bulbos, ſed ad utrumque præſertim cerebri hemiſphærium, meſſoriam falcem, corpus calloſum, & cætera ut prætermittam, ad anfractus varios cerebri, pro majori parte ſanguinem advehere; profecto cum hujus viſceris defectu non poſſent illæ in has partes libere exonerari, oportebat, ut plus æquo repletæ turgeſcerent. Hæc quidem ſimplex conjectura noſtra eſt, nullis, quod fateor, obſervationibus innixa: ſed cum in expoſitis circumſtantiis phyſica ratione fulciri, & cum rei veritate conſentire mihi videretur, eamdem vobis proferre non ſum veritus. Et revera novum forſan quiſquam arbitrabitur in illo rerum ſtatu, in quo cauſſæ adeſſent impediendis humorum circulationibus aptæ, vaſa, quæ a natura vehendo ſanguini deſtinantur, aut dilatata, aut obſtructa, aut diſtracta ob plenitudinem obſervata fuiſſe? Nonne ex Wieuſſenio novimus in quibuſdam fœtibus materno adhuc utero concluſis, propter ovalis foraminis clauſuram, qua ſanguinis expeditior via in iiſdem a provida natura ſtatuta, ad pulmones impeditur, viſum fuiſſe tumefactum dextrum pulmonis lobum, dextrumque dilatatum cordis ventriculum, tumidum pulmonalis arteriæ truncum, ejuſdemque vaſa diſtracta, ipſam denique totam pulmonis ſubſtantiam viſcida ſtaſi affectam? Cur itaque his, aliiſque experimentis edoctus, conjicere non poteram & affirmare, ob impeditum in fœtu noſtro, defectu cerebri, liberum humorum curſum, carotidum vaſa obſtructa, turgida, & plane diſtracta eſſe debuiſſe? Quinimo ſi ulterius progredi conjectando liceat, quis ambigat œdema illud ipſum, quod in cellulari magni pectoralis adnotavimus a copioſis humoribus in mediaſtino, aut etiam in pulmone ſtagnantibus eſſe

re-

repetendum? Quumque cellularis ubique ſub cute jaceat, & explicetur, non dubitaverim ab univerſali ejuſdem œdemate, univerſam totius corporis turgeſcentiam derivaſſe. Cæterum conjecturas iſtas noſtras, etſi maxime veriſimiles reputem, perſpicaciſſimo tamen judicio veſtro ſubjectas eſſe volo. Tanti enim arbitror æſtimari oportere, quanti vos ipſi faciendas eſſe exiſtimabitis.

Hactenus nihil ferme præter nudam rei hiſtoriam ſum perſecutus. Reliquum modo eſt, Academici ampliſſimi, ut ea in examen revocem, quæ recenſitos monſtroſos effectus facile produxerint.

Non illud tamen operæ pretium exiſtimo, ut in anteceſſum, omnia monſtroſarum affectionum genera recenſeam, quæ ſive animantibus, ſive vegetabilibus, ſive etiam mineralibus, & ſaxis accidere ſolent; quarum, ut probe noſtis, non una, ſed multiplex cauſſa poteſt eſſe, & origo; neque enim id, aut temporis, aut loci, aut inſtituti noſtri ratio patitur. Ad rem potius.

Omnia Monſtrorum genera ad duplicem claſſem revoco; alia nimirum quæ morboſa; alia quæ connaturalia placet appellare. Morboſa voco, in quibus viſcera quædam præter naturam conjuncta invicem aut diviſa; mole aucta vel diminuta; aut figura denique, ſitu, aut conſiſtentia ſic permutata, ut omni organicæ texturæ ordine perturbato, naturalibus vitæ muneribus obeundis omnino inepta, vel ſaltem infirma fiat. Connaturalia vero illa in quibus, non vitium aliquod in vitali œconomia videtur contigiſſe, ſed nova potius ac mira partium organizatio, vel inſueta tranſpoſitio, quæ vitæ officiis, non minus atque conſueta earumdem diſpoſitio, apta invenitur, & accommodata.

In priorem claſſem ea omnia refero, quæcumque a cauſſis minus remotis, minuſque reconditis dependent, quæque ab Hippocrate, libro de Genitura, uteri vitio præſertim attribuuntur; non ſecus atque monſtroſi plantarum morbi a vitiatis nutritionum vaſis non raro originem trahunt. Ejuſmodi ſunt membrorum mutilationes, diſtorſiones, gibboſitates, tumores, labiorum aut palati diffiſſiones, compreſſiones cranii, hydrocephala, aliaque id genus multa. Ad claſſem alteram illa revoco, quæ a remotioribus cauſſis, magiſque abditis, & obſcuris oriuntur, nec niſi conjecturarum ope divinandis. Cujuſ-

juſmodi ſunt, partium earumdem multiplicitas; ordinis inverſio in alicujus partis locatione, præſertim vero viſceris alicujus vitæ officiis a natura comparati; inſitiones denique membrorum variæ; utriuſque ſexus conjunctiones, & his ſimilia.

His præmiſſis, cum manifeſtum ſit, fœtum, de quo diſſerimus, non in hac, ſed in priore illa monſtrorum claſſe contineri; mihi in primis rationes, & cauſſæ monſtrorum ad illud genus pertinentes inquirendæ ſunt. De quibus, ut ſtatim dicam, non me fugit, præſtantiſſimi Academici, a pleriſque vividam præſertim matrum imaginationem in ſubſidium advocari: celebrem ſane quæſtionem, & ſummam, quam mihi hoc loco ingredi non eſt animus. Illud tamen videtur generatim poſſe conſtitui, nempe, quamvis forte in aliis fœtibus eam cauſſam obtinere poſſe quiſpiam oſtenderet, in noſtro tamen monſtro minime poſtulari. Enim vero quis ad obſcuram adeo, & implexam rationem confugiet, ubi cauſſas proximas, & patentes in promptu habere ſibi videatur? Atqui mihi videor proximas, & patentes monſtrorum, quale inſigne eſt noſtrum, cauſſas in matribus videre, quin obſcura earumdem imaginandi vis expetenda ſit. Has vero, ut clarius proponam, animadverto, alias dici poſſe matribus internas, externas alias. Internas, tum affectiones illas, principiaque morboſa intelligo, quæ aut in fluidis ineſſe poſſunt, aut in vitiata forma & ſtructura ſolidorum, & præſertim uteri ipſius, in quo ejuſmodi vitia ſæpe ſunt obſervata; tum etiam violentiores animi affectus, contractiones ſpaſmodicas, hiſtericas convulſiones, quibus mulieres aliquando afficiuntur, aliaſque ſimiles. Ad externas pertinere omnes illæ creduntur, quæ extrinſecus vim habere, & agere in fœtum poſſunt utero concluſum, inter quas recenſeri maxime ſolent immoderatæ veſtium, & cujuſcumque muliebris indumenti conſtrictiones, quæ ventris dilatationi obſiſtere valeant; vectationes inconcinnæ, incongruæ corporis poſitiones, violenti motus, percuſſiones & cætera ejuſmodi, a quibus, & potiſſime a priore illa, cum nequeat uterus pro neceſſitate dilatari libere & extendi, conſequens eſt, ut in ipſo male locati partus contrahantur, contorqueantur, nec ſine aliqua offenſione jactentur, atque adeo, ut magnus advertit Hippocrates, nonnulla ſæpe integrante parte imperfecte oriantur.

Jam vero, priores illas, & præſertim vitiatam uteri ſtructu-

ſturam, ad fœtuum deformationes valere plurimum poſſe, jampridem docuit laudatus Hippocrates, cum ad calcem libri de Genitura, ut monui, perſpicuis verbis ſcripſerit: *Quum in utero juxta locum, in quo mutilatus eſt fœtus, anguſtia fuerit, neceſſe eſt corpus, quod in anguſtia movetur, mutilari juxta illum locum.* Hinc miror equidem, in tantam fuiſſe admirationem raptum expertum Chirurgum Gallum, de quo locutus eſt Dominus Juvet in opuſculo inſerto Tom. 4 *Journal des Journaux* pag. 109 edito Bononiæ 1761 propter fœtum illum a ſe obſtetricia arte extractum, quem ſuperiori dexteri brachii extremitate, abſque ullo ſcapulæ ſigno, nec non partibus continentibus pectoris, & abdominis carere obſervavit; ita, ut dexterum latus, a medio ſterno ad dorſi vertebras, uno peritonæo velaretur. Siquidem, tum ex Hippocratis monitu, cum ex relatis ab ipſo opuſculi ſcriptore, jure exiſtimare licet, earum partium, atque communium integumentorum defectum, ex cauſſa materno utero infixa proveniſſe, quæ obſtiterit, ne partes illæ, atque integumenta, debitæ nutritionis defectu, naturalem accretionem, ſtructuram, firmitatemque obtinerent.

Rem præter cætera, quæ penes alios ſcriptores videri poſſunt, hæc quinque fœtuum ſucceſſive ex eadem Fœmina natorum hiſtoria, ſatis confirmare videtur. Nempe quædam Mulier, quam ipſe pluries Medico-chirurgica arte curaturus adibam, quinque fœtus ſucceſſive, ac debito tempore edidit, quorum ſinguli ſenſibilem in dorſo deformitatem paullatim contrahere viſi ſunt, ſi poſtremum quidem exceperis, qui cum matrem parituram magno in vitæ diſcrimine, tum ob gravem uteri hæmorrhagiam, cum ob ſecundinam in utero relictam conſtituiſſet, oſſa tantum ſterni altiora, quam par eſſet, prætulit. Etenim, quis non videat conſtantem hanc in fœtibus ad ſimile vitium contrahendum diſpoſitionem, non aliunde, quam ab interno uteri vitio derivari potuiſſe? Nam effectuum ſimilium ſimiles cauſſæ. Adde vero ipſum uteri vitium ex circumſtantiis manifeſte probari. Siquidem hæc mulier adhuc puella cum eſſet, & infirmæ ſemper valetudinis viſa eſt, & æquo tardius menſes ſubire cœpit, & perpetuis cum doloribus ſubibat. Nupta autem cum fuiſſet, in geſtationibus ſuis, & præſertim in ſecunda, de dolore ſæpe ad regionem uteri ſiniſtram conquerebatur, & maxime cum dextrum in latus incumberet. Denique, cum ad prædictam hæmor-

morrhagiam avertendam relictam in utero ſecundinam felici plane exitu educerem, quandam in utero ipſo duritiem ſatis ſenſibilem, manu ipſa mea, percepi, apud quam, placenta minus parieti adhæſiſſe viſa eſt, quam verſus uteri fundum, cui arcte infigebatur. Itaque, quemadmodum vitiatum idcirco fuiſſe mulieris uterum non dubitavi; ſic nec dubitaverim unquam cum magno Hippocrate aſſerere, plures fœtuum deformationes internis uteri cauſſis eſſe attribuendas.

At vero, non ideo tamen putetis velim, Academici præſtantiſſimi, me a cauſſis iſtis internis monſtroſi fœtus noſtri vitia repetere: hæc ad ſummi tantum Magiſtri ſententiam tuendam, atque internarum cauſſarum actionem, quam ſuperius conſtitui, oſtendendam propoſui.

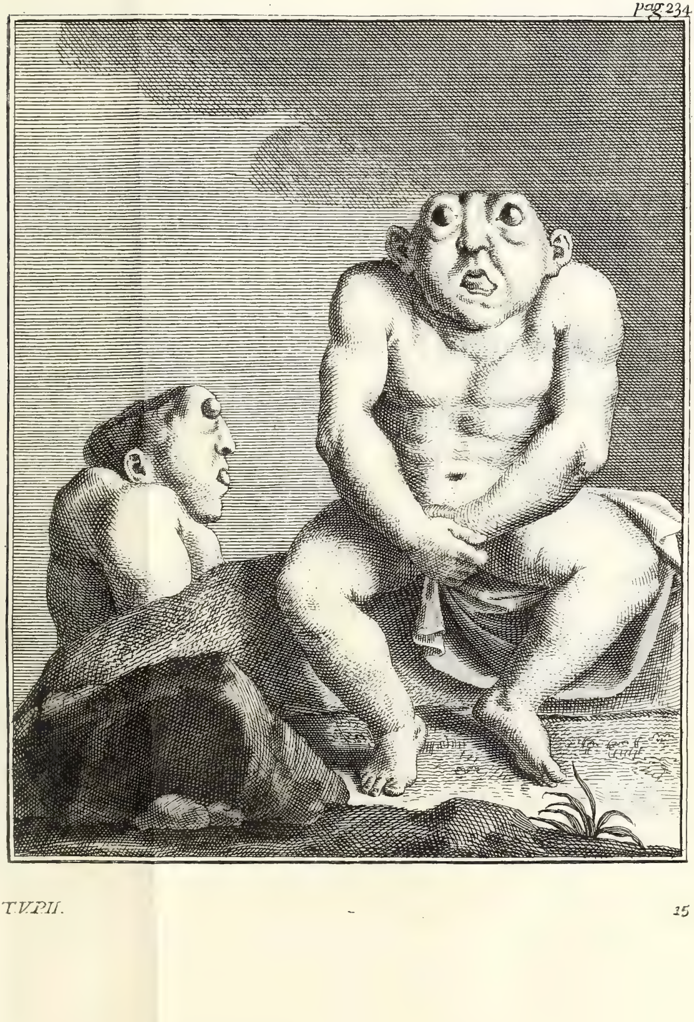
Cæterum in externis tantum cauſſis me proxime rationes habere putaverim, quæ probabilius expoſiti fœtus deformitates judicio meo effecerint. Et certe ponamus prægnantis animum, violentiori quadam paſſione affici, ex qua profecto validiſſima in ſolidis, maximeque in nerveis fibris, quæ ad uterum deducuntur, contractio oriatur neceſſe eſt. Tum vero gravis accedat violentaque matris compreſſio uterum ipſum, in quo immaturus adhuc fœtus hoſpitatur, valde conſtringens, ac præter naturam coanguſtans; quis non videat, quanta ab his tenerrimus infelix Partus incommoda pati debeat ad naturalem ejuſdem ſtructuram vitiandam aptiſſima, atque eo maxime tempore, quo molliora eidem ſunt membra, & organa teneriora? Probe noſtis, quanta cum facilitate tenellæ partes ob ſummam componentium fibrarum flexibilitatem, ac mollitiem cuicumque impreſſioni cedere, ſuccuſſionibus, nempe, impulſibus, aliiſque hujus generis externis agentibus viribus debeant; ac proinde facile imaginando conjicere, quanti hæc omnia valeant ad eadem organa deformanda, atque a naturali ordine & ſtructura deducenda, & deturbanda. Atqui, ſi tanta eſt harum cauſſarum vis, quis ibit inficias, ſiquidem in noſtro fœtu obtinuerint, in eodem maxime valuiſſe? Obtinuerunt autem. Memoria repetite quæſo, me de fœtu verba facere ab adoleſcente Puella ſpurie concepto, cui propterea, nec patrati criminis pudor deeſſe poterat, nec gravis, ne forte detegeretur, metus, nec propterea ex metu ſummæ animi anxietates; nullas quoque prætermittere artes debuit, quibus male ſuſceptum fructum celaret: quare, quot, quæſo, conſtrictionibus urgere ſe,

quot

quot compreſſionibus, quibuſnam aliis artificiis uti, ne a ventris intumeſcentia miſera proderetur? Has profecto conſuetas eſſe incautarum virginum artes novimus. Porro quis noſtrum divinare poterit, quo corporis poſitu in hiſce circumſtantiis fuerit miſella intempeſtiva Proles? An non ſuſpicari liceat, inſignem cranii compreſſionem a quodam valido reniſu proveniſſe, quem fœtus in utero ſit paſſus, præſertim ab ultimis vertebris oſſi ſacro cohærentibus, aut ab oſſibus innominatis, quibus fortuito vertice ſuo incubuerit, facile repetendo? Ipſe quidem veriſimillimum arbitror, mihique videor ſuadere monſtroſam adeo cranii appreſſionem hac, vel ſimili ratione contigiſſe.

Opinionem hanc meam, ut mittam cætera, alter fœtus luculentiſſime confirmat, quem magno hydrocephalo affectum menſe Octobri ſuperioris anni Obſtetricia arte, ſummo cum labore extraxi. Etenim in ejus dorſi ſpina, inter ſextam, & ſeptimam vertebram, gangrænoſam quandam affectionem obſervavi, quæ in media ſui parte ſatis ſenſibili foramine hiare videbatur. Quod cum curioſius digito, ſtiloque tentarem, deprehendi eas vertebras verſus thoracis cavitatem notabiliter incurvatas, & ab invicem ſejunctas, & ita quidem, ut humorem quemdam albo colore donatum in extremis ſuis diſtincte eructarent, medullæ ſpinali fere ſimillimum. Jam vero, cum de eventus cauſſa inquirerem, monuit me Puerpera ſe, inter ſextum & ſeptimum geſtationis menſem, caſu, neſcio quo, ictum in regione abdominis ſupra prægnantem uterum excepiſſe. Porro, quis dubitaverit hanc fuiſſe ejus gangrænæ principem cauſſam? Quamvis enim fœtuum dorſum, non quidem anteriori parti materni abdominis, ſed poſteriori potius naturaliter obvertatur; attamen, cum non raro etiam contingat diverſis modis præternaturalibus in utero fœtus hoſpitari; facile intelligimus, opportunam ad ictum in dorſo excipiendum poſitionem potuiſſe fœtum noſtrum obtinere. Præſertim quod non levia mihi, tum ex gravi poſt ictum incommodo matris, tum ex præternaturali ejuſdem fœtus exitu, illud idem aſſerendi ſuppetunt argumenta. Secundum pedes enim, primum, ac dorſo ſuperius obverſo exire viſus eſt. Hinc porro, etſi acutiſſimus Verdiers, aliique conſtituunt, eo præſertim tempore monſtroſas fieri in fœtibus deformitates, quo dimidius ſolet geſtationis curſus, aut paullo ante definiri; patet nihilominus etiam aliquanto tardius contingere poſſe, quo quidem non parum ſuperius dicta de fœtu noſtro confirmantur.

Unum adhuc ſupereſt, ut nempe de cerebri defectu pauca dicamus. Notum eſt, ſi contingat liberum impediri & naturalem ſanguinis curſum ad eas partes, quibus nutriendis, & augendis deſtinatur, has nutritionis debitæ defectu, aut conſumi, præcipue ſi nondum firmitatem adeptæ ſint, aut flacceſcere, deformari, aut non raro etiam penitus evaneſcere. Conſtitui autem ſuperius arterias carotides probabiliter in noſtro fœtu compreſſas fuiſſe; cumque non poſſent, fluxu ſuo, reſiſtentias ſuperiores vincere, ut ſanguinem in cerebro derivarent, cogi debuiſſe, ut in ſuo exitu incurvarentur, atque obſtruerentur; idque tanto magis, quanto, cum in eo caſu videretur ſublata in membranis ob nimiam diſtractionem oſcillandi vis, ac proinde ſiſtolis tempore retardatus ſanguinis motus, oportebat, ut viſcus illud & neceſſariæ nutritionis defectu, & memoratæ compreſſionis vi paullatim abſumeretur, atque deficeret. Quod ſi, ut puto, quædam cerebelli portio, & quidpiam in foveis temporalibus remanſerit, hæc ex eo derivanda ſunt, primum, quod cum occipitis compreſſio, quemadmodum obſervavimus, non ex integro facta fuerit, oportuit, ut in relicta cavitate, ea illius viſceris pars ſupereſſet, quæ eadem poſſet naturaliter contineri. Quod ſi quæratur, unde in tot compreſſionibus, ac tanta arteriarum obſtructione ali, atque enutriri potuerit; dicam, alimenta aliqua optime potuiſſe a nonnullis poſterioris internæ carotidis, aut cervicalis arteriæ ramificationibus mutuari, quæ quum non tam comprimerentur, quam cæteræ, ſufficientem ſanguinis copiam eidem potuerunt impertiri. Id quod ex ſuperius memorata fœtus ejuſdem, utcumque exigua vita poteſt confirmari. Cum enim nihil aliud præter hanc cerebelli portionem potuerit aptius inſervire, neceſſe eſt, ut eadem ad vitæ functiones fuerit ſufficienter alita, atque enutrita. Id ipſum dic de materia in temporalibus relicta, quæ in foveis illis fere integris extare debuit, & a quibuſdam tenuioribus internis ramificationibus facile nutriri poterat. Quare plurimum erraverit, qui ſibi ſuadeat vitium capitis adeo informis potuiſſe a naturali materni ovi indole proficiſci, quod, vel eo fuerit affectum vitio, vel illud in propria evolutione contraxerit; natura namque in propriis operationibus ſemper recta, ſibique ſemper ſimilis & conſtans eſt; neque quidquam, niſi quod perfectum ſit, ipſa molitur: quo circa ut monſtroſi phœnomeni æqua reddatur ratio, non ad immediatas ac naturales, ſed ad mediatas ac materiales cauſſas confugiendum videtur; præſertim cum hæc planior magiſque naturalis ſit ratio, ne-



neque adeo obſcura, tenebriſque involuta. Accedit poſtremo livorem illum, cæteraſque affectiones, quibus obſervavimus fœtus ipſius dorſum affectum fuiſſe, adhuc clarius commonſtrare, evidentiuſque conficere, eumdem in materno utero plurimum pertuliſſe; ut propterea a perpeſſis incommodis, tamquam a proximis & veris cauſſis monſtroſam ſui formam contraxiſſe videatur. Atque hæc ſunt, ſapientiſſimi Academici, quibus expoſiti monſtroſi fœtus deformitates explicari probabilius poſſe opinatus ſum. Probe conſpicitis, hæc non niſi conjecturalia eſſe argumenta; ſed tamen non infirmis eadem rationibus fulciri, ac roborari. Poteram equidem pluribus aliorum monſtrorum in totum, aut ex parte noſtro non diſſimilium exemplis rem illuſtrare, quæ facile aut in Academiarum Actis legi poſſunt, vel apud Licetum, Skenchium, Mangetum, Bartholinum, Scultetum, Pareum, Stalpartium Vander Wiel, Blondellium, Valiſnerium, Morgagnium, Winslowium alioſque, præſertim vero penes Jobum a Mekreen clariſſimum Anglum, qui in ſuis obſervationibus Medico-chirurgicis Monſtrum protulit a noſtro fœtu, quem in conſpectu habetis, non niſi ſexu diverſum: verum conſulto omittenda exiſtimavi, ne vos in notiſſimis narrationibus detinendo, potius quam voluptate, tædio ac moleſtia afficerem. Liceat tantum mihi coronidis loco, hæc quaſi corollaria ad praxim fortaſſe non importuna colligere.

Primum eſt, ejuſmodi informes effectus, potius quam maternæ phantaſiæ viribus, mechanicis & accidentariis cauſſis generatim eſſe attribuendos. Alterum cum conſtet, plurimum per externa incommoda matres propriis fœtibus nocere poſſe, impenſius monendas eſſe, ut extrinſecas quaſcumque impreſſiones diligenter caveant, & ab iis omnibus abſtineant, quæ uterum vel contrahere, vel urgere, vel quovis modo poſſit ejuſdem ſtatum naturalem perturbare. Tertium denique, ubi contingat prodire fœtum orbatum cerebro aut in totum, aut etiam ſecundum aliquam partem tantum, utcumque vivus egrediatur, non diu fore victurum, ſiquidem in cerebro, aut notabiliter vitiato, aut manco & imperfecto, tanta peragi nequit animalium ſpirituum ſecretio, quanta ad nervos omnes plene ac perenniter irradiandos, & ad organa omnia functionibus naturalibus, vitalibus, & animalibus obeundis a natura deſtinata, in perpetuo motu ad vitam prorſus neceſſario agenda & conſervanda exigitur, & poſtulatur.

EUSTACHII ZANOTTI.

De ſupputandis æquationibus in orbitis planetarum.

PLanetarum motus ea lege temperantur in orbitis ellipticis, ut cuique notum eſt, quæ in eo continetur, ut areæ deſcriptæ ſint temporibus proportionales. Quæſtio igitur de inveniendo planetæ loco quadraturam circuli involvit, agitur enim de ellipſis area dividenda juxta quemlibet numerum, aut juxta quamlibet rationem, ductis radiis ab altero foco. Hoc autem parum negotii faceſſit in iis, quæ ad praxim deducuntur, in quibus utcumque aſtronomicam exactitudinem aſſequamur, geometricam morari nihil eſt neceſſe. Verum alia ſunt, quæ valde implicitam reddunt problematis ſolutionem, ac propterea quamvis aſtronomos non deterruerit problematis difficultas, deterruit certe labor ſupputationis. Plures methodi excogitatæ fuerunt a recentioribus aſtronomis, qui in id præſertim ſtudium omne ac diligentiam contulerunt, ut calculum expeditum redderent. Nunc eam propono, quæ cum ſimpliciſſimis principiis innitatur, facile ab iis etiam percipietur, qui parum in geometria verſati ſunt. Quod ſi commoda, & expedita alicui videbitur, is æquationes pro quovis anomaliæ puncto, conſtituta orbitæ excentricitate, & axe ellipſis, aſſequetur in hunc modum.

Antequam methodum explico de theoria excentrici nonnulla præmittam. Scio equidem hanc theoriam nunc omnium aſtronomorum conſenſu rejectam eſſe; ea tamen utar propterea quod viam aperit ad æquationes expedite ſubducendas in theoria, quam Keplerus primum propoſuit, quæque deinceps a Newtono ſic nobilitata eſt, & mechanicis rationibus comprobata, ut aſtronomi omnes noſtræ ætatis non modo planetas, ſed etiam ſatellites, & cometas huic parere exiſtiment.

Fingamus nobis planetam moveri per orbitam circularem (*Fig.* 1.) exiſtente ſole in puncto S a centro orbitæ diſſito linea

linea C S, quæ propterea excentricitas appellabitur; ductaque diametro A R erit A aphelium, R perihelium. Planeta ea lege moveatur, ut area A P S ſit ubique tempori proportionalis, quæ ratio motus longe differt ab ea, quam veteres ſequebantur; ſed hoc parum refert, non enim veterem illam excentrici theoriam illuſtrandam ſuſcipimus, novam potius exornamus, quam calculi noſtri ratio poſtulat. Fingamus præterea circa punctum C lineam C M motu æquabili circumvolvi, & revolutionem conficere eo temporis ſpatio, quo planeta orbitam prætergreditur. His ita conſtitutis erit ubique area A M C areæ A P S æqualis, ac ducto radio P C, demptaque communi area A P C relinquetur triangulum P C S æquale ſectori P C M.

Hæc omnia ſi calculo trigonometrico perſequi volumus, expedita erit ſupputatio. A puncto S demittatur perpendicularis S H ſupra P C, & ſumpto quovis angulo P C A in triangulo rectangulo C S H, cujus hypothenuſa data eſt, ſupputetur S H, quæ neceſſario æqualis exiſtit arcui P M ob triangula æqualia P C S, P C M. Supputetur præterea angulus C P S in triangulo C P S, in quo datæ ſunt P C, & C S, & angulus ab his comprehenſus, qui ſupplementum eſt anguli aſſumpti P C A. Cum autem ſupponamus conſtitutam eſſe proportionem inter radium & peripheriam circuli, inventam S H = P M per numerum graduum, & eorum partium ſexageſimalium exprimemus, ex quo dignoſcemus angulum P C M. Addito angulo P C M angulo P C A conficietur anomalia media, quod ſi idem angulus P C M addatur angulo C P S conficietur æquatio ſeu proſtaphæreſis anomaliæ mediæ reſpondens A C M.

Hæc ſane methodus indirecta eſt, non enim licet quamlibet anomaliam mediam ponere, & inde æquationem illi reſpondentem calculo ſubducere, ſed ea anomalia media habetur, quæ prodit ex aſſumpto angulo P C A. Quoniam vero æquationes in duobus proximis orbitæ punctis nihil ad ſenſum differunt, quoties quæſtio fuerit de invenienda æquatione, quæ datæ anomaliæ mediæ reſpondeat, ea accurate elicietur, ſi duo puncta inquirantur ſatis proxima, quæ datam anomaliam comprehendant; quæ ratio calculi in aſtronomica praxi frequentiſſima eſt. Veniamus nunc ad ellipſim.

Moveatur planeta per ellipſim A Q R (*Fig.* 2.) exiſtente ſole in altero foco S. Fingamus nobis alium planetam moveri per circulum A P R, cujus diameter ſit eadem ac major

axis

axis ellipſis A R. Hi duo planetæ revolutionem conficiant eodem tempore, atque una moveri incipiant a puncto A. Velocitatis lex ea ſit, quam poſtulant areæ temporibus proportionales. His ita poſitis dico utrumque planetam perpetuo reperiri in eadem recta ad axem normali; exem. gratia ſi locus planetæ revolventis in circulo fuerit P, ducta ordinata PD alterius planetæ locus cadet in Q. Demonſtratum habent geometræ ſegmentum circuli A P D ſe habere ad ſegmentum ellipſis A Q D, uti ſe habet ordinata P D ad ordinatam Q D, ideſt in ratione axis majoris ad minorem ellipſis; atqui eadem eſt ratio triangulorum P D S, Q D S; ergo, ſi utrumque ſegmentum adjacenti triangulo addatur, fient areæ A P S, A Q S, quæ eamdem rationem ſequentur; verum circulus, & ellipſis ſunt in eadem ratione axium; igitur area A P S erit ad circulum, quemadmodum area A Q S ad ellipſim, ac propterea exiſtente altero planeta in P non poterit quin alter planeta reperiatur in Q. Quod erat demonſtrandum.

Sint itaque ſupputandæ æquationes in orbita elliptica juxta legem arearum temporibus proportionalium. Primum in excentrico inveniatur quæſita anomalia media, & æquatio illi reſpondens, ex quo dabitur etiam anomalia vera. Deinceps ex anomalia vera planetæ revolventis in circulo colligetur anomalia vera planetæ revolventis in ellipſi inſtituta hac proportione, videlicet ut P D ad Q D, ſeu ut axis major ellipſis ad axem minorem, ſic tangens anguli P S A ad tangentem anguli Q S A, qui anomaliam veram exhibet in ellipſi. Fiat demum differentia inter anomaliam veram & mediam, ex quo prodibit æquatio, ſeu proſtaphæreſis. Hujuſmodi æquationes in primo anomaliæ quadrante majores reperiuntur quam in circulo, minores vero in ſecundo quadrante ut cuique vel figuram inſpicienti ſatis manifeſtum fiet.

Cum ipſe vellem explicatam methodum experiri ad æquationes ſolis ſubducendas me converti, quod ſane exequi non poteram, niſi prius excentricitatem orbitæ ſtatuerem, in qua aſtronomi omnes non conveniunt. Celeberrimus Euſtachius Manfredius in eo libro, qui inſcribitur *De Gnomone Meridiano Bononienſi*, non modo novam pro inveſtiganda orbitæ excentricitate methodum propoſuit; verum etiam ex pluribus obſervationibus in eodem gnomone habitis excentricitatem definivit 1681 earum partium, qualium ſemiaxis ponitur 100000.

Hanc

Hanc itaque eligere volui, tum quod nullus dubitandi locus relinquitur, quin recte conſtituta fuerit, tum propter jucundiſſimam tanti viri, meique præceptoris recordationem. Elementis calculi ſic conſtitutis, & poſita ratione ſemidiametri ad gradum unum ut 100000 ad 1745½ eas ſolis æquationes inveni, quas ſubjecta tabula exhibet.

Caſſinianæ ſolis æquationes, quæ accuratiſſimæ habentur, parum ab his differunt. In mediis elongationibus, ubi æquatio maxima eſt, differentia non excedit ſcrupula viginti; in aliis elongationibus differentia adhuc minor exiſtit. Æquationes noſtræ a prædictis ubique defficiunt, quia ſcilicet excentricitas a Caſſino ponitur paullo major. Si comparatio inſtituatur cum æquationibus Hallei, major diſſenſus reperitur. Verum ipſe Hallejus fatetur ſolares tabulas emendandas eſſe, atque orbitæ excentricitatem imminuendam, ex quo illi æquationes juſto majores prodierunt. Noſtræ æquationes accurate conveniunt cum iis, quas Nicolaus de la Caille tradidit in ſuis tabulis ſolaribus, ſæpius enim differentia nulla eſt, & quoties diſſenſus aliquis reperitur, is nuſquam minuta ſecunda quatuor excedit; quod ſane ſupputationum errorculis potius adſcribendum arbitror, quam excentricitatum differentiæ, quæ adeo perexigua eſt, ut pro nulla haberi poſſit. Ad hoc illud etiam accedit, quod ſi diſſenſus ab excentricitate proficiſceretur, conſtans ordo & perpetuus in eo appareret. Æquationes, ut in ſubjecta tabula conſcriptæ extant, ſingulis anomaliæ mediæ gradibus reſpondent, quibus poſitis, ſi datus fuerit apogei locus, nec non epocha mediarum longitudinum, ac motus medii ſolis, longitudo vera pro quovis dato tempore elici poterit. Hæc omnia Manfredius perſecutus eſt in eo libro, quem ſupra indiximus. Unum deerat nempe ut ex elementis, quæ diligentiſſimis obſervationibus ſtabilivit, æquationum tabula extrueretur; quod ne impoſterum deſit, propoſita methodo diligenter curavimus.

Tabu-

Tabula æquationum centri Solis.

Anomalia media.

Subtrahe.

	0	I	II	III	IV	V	
0	0 0 0	0 56 44	1.39 1.	1.55 32	1.41 9	0 58 50	30
1	0 1 59	0 58 27	1 40 2	1 55 33	1 40 8	0 57 3	29
2	0 3 58	1 0 9	1 41 1	1 55 32	1 39 5	0 55 15	28
3	0 5 56	1. 1.50	1 41 58	1 55 30	1 38 1	0 53 26	27
4	0 7 55	1 3 30	1 42 53	1 55 26	1 36 55	0 51 37	26
5	0 9 53	1 5 9	1 43 47	1 55 20	1 35 48	0 49 47	25
6	0 11 51	1. 6 46	1 44 39	1 55 11	1 34 39	0 47 55	24
7	0 13 49	1 8 22	1 45 30	1 55 0	1 33 28	0 46 2	23
8	0 15 47	1. 9 57	1 46 18	1 54 47	1 32 15	0 44 8	22
9	0 17 45	1 11 31	1.47 4	1 54 31	1 31 0	0 42 13	21
10	0 19 42	1 13 4	1 47 48	1 54 13	1 29 43	0 40 17	20
11	0 21 39	1 14 36	1 48 30	1 53 53	1 28 24	0 38 20	19
12	0 23 35	1 16 7	1.49 11	1 53 31	1 27 4	0 36 23	18
13	0 25 30	1.17 36	1 49 50	1 53 7	1 25 42	0 34 26	17
14	0 27 25	1.19 4	1 50 26	1 52 41	1 24 19	0 32 28	16
15	0 29 19	1 20 30	1 51 0	1 52 13	1 22 54	0 30 30	15
16	31 13	1.21 55	1 51 32	1 51 43	1 21 27	0 28 32	14
17	33 7	1 23 18	1 52 2	1 51 10	1 19 59	0 26 33	13
18	0 35. 0	1.24 40	1 52 31	1 50 35	1 18 30	0 24 33	12
19	0 36 53	1.26 0	1 52 58	1 49 58	1 17 0	0 22 32	11
20	0 38 45	1.27 19	1 53 22	1 49 20	1 15 28	0 20 30	10
21	0 40 36	1 28 36	1 53 44	1 48 40	1 13 55	0 18 28	9
22	0 42 27	1 29 52	1 54 4	1 47 58	1 12 20	0 16 26	8
23	0 44 17	1 31 6	1 54 22	1 47 14	1 10 43	0 14 23	7
24	0 46 6	1 32 19	1 54 38	1 46 28	1 9 5	0 12 20	6
25	0 48 54	1 33 30	1 54 52	1 45 39	1 7 26	0 10 17	5
26	0 49 42	1 34 40	1 55 4	1 44 48	1 5 45	0 8 14	4
27	0 51 29	1 35 48	1 55 15	1.43 50	1 4 3	0 6 10	3
28	0 53 15	1 36 54	1 55 23	1 43 3	1 2 20	0 4 7	2
29	0 55. 0	1 37 58	1 55 29	1 42 7	1. 0 36	0 2 4	1
30	0 56 44	1 39. 1.	1 55 32	1.41 9	0 58 50	0. 0 0.	0
	XI	X	IX	VIII	VII	VI	

Adde

SE-

Fig. 1.

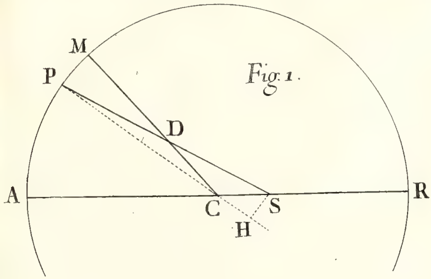
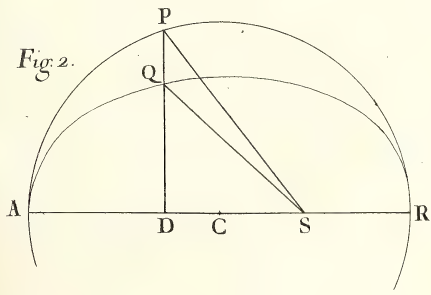


Fig. 2.



SEBASTIANI CANTERZANI
AD
HIERONYMUM SALADINUM

Monachum Cæleſtinum Lucenſem in Bononienſi Univerſitate publicum matheſeos Profeſſorem, Inſtituti Socium.

EPISTOLA

Qua Euſtachii Zanotti obſervatio Veneris Solem trajicientis, ab omni erroris ſuſpicione liberatur.

QUæris nempe, Saladine optime, quid nobis de iis viſum ſit, quæ Pingreus, aſtronomus longe præſtans, in noviſſimo Pariſienſis Academiæ Commentario obſervationi illi objicit, qua tribus ante annis Euſtachius Zanottus Venerem cum Sole congredientem perſecutus eſt. Qui poſſim tibi non obſequi? Ea ergo ad te ſcribam, quæ & a Zanotto ipſo audivi, & calculis, illo hortante, ſubduxi ipſe; quibus facile intelliges, nec juſtam eſſe illam Pingrei reprehenſionem, nec ſatis aſtronomo dignam. Ceterum qua diligentia in his rebus Zanottus ſit, qua ſolertia, & omnes norunt, & in illo ipſo, quem ſupra dixi, Commentario declarat ſatis Caillius, qui inſtar eſt omnium. Sed jam ad rem venio.

Veneris, ut ſcis, e Sole egreſſum ſex diverſis tubis obſervavimus. Zanottus ſingularum obſervationum tempora notavit, quo & eorum diſcrimina ex diverſa tuborum vi apparerent, & daretur optioni locus, ſi qui vellet obſervationem noſtram in comparationem adhibere. Quis vero non miretur, Pingreum, quaſi Zanotti liberalitate abuſum, ad eam ſtatim ſe obſervationem contuliſſe, quæ tubo habita fuit pedes longo non amplius duos ſupra dimidium, quam compararet cum ſua, quæ habita fuerat tubo longo ad pedes uſque decem & octo? Quæ enim erat in ſex illis obſervationibus minus ad eam comparationem accommodata, quæ Solis parallaxi deducendæ ſervire deberet, in qua nemo aſtronomus non ante omnia, quantum fieri poſſet, tuborum æqualitatem requiſiviſſet?

Sed neque minus illud mirandum videtur, quod offende-

rit Pingreum anticipatio temporis eodem tubo definiti; ut ſtatim affirmarit, pluribus opus non eſſe, quo appareat, quam obſervatio non ſit accurata. Quis enim non illam facile a tanta ejus tubi brevitate repetat? nonne etiam ſatellitum in umbram Jovis immerſiones citius tubis non ita longis videre ſolemus, quam longiſſimis?

Nunc autem ſic habeto, in ſex illis obſervationibus eam nobis anteferri ceteris, atque optimam haberi, & declarari, quæ tubo habita fuit pedum 22. Et ſane memineris etiamnum, Zanotto, jam tum cum totum obſervationis contextum in diſſertationem contulit, & in lucem edidit, multa ad Veneris theoriam pertinentia calculis pluribus deducenti, & parallaxis effectum eleganti, maximeque apta, a ſe tum primum excogitata, methodo perquirenti, nullos alios numeros uſui fuiſſe, niſi quos obſervatio illa præbuerat. Fuit enim meliori teleſcopio inſtituta ab obſervatore perſpicaciſſimo, exercitatiſſimoque; quam præterea confirmavit obſervator alius longe diligens. Nunc vero, quando Gallorum etiam obſervationes vulgatæ ſunt, eo accedit, quod eamdem confirmare quoque videtur Veneris mora in limbo ſolis. Oſtendunt enim calculi, eam moram breviorem videri oportuiſſe Bononiæ, quam Pariſiis, minutis ſecundis paulo amplius ſex. Quare cum nemini ex iis, qui Pariſiis, aut prope obſervarunt, ſit viſa minor, quam 18′. 12″, non levi id quidem argumento eſt, obſervationem illam, in qua viſa fuit 18′. 9″, valde fuiſſe accuratam.

Quod ſi Pingreus, dimiſſa obſervatione, quæ tubo breviori habita fuit, alia uſus, cujus tempus vix ab eo diſtat, quod notatum fuit tubo illo pedum 22, parallaxim Solis adhuc deducit grandiorem, neque cum ea ſatis conſentientem, quæ ex pleriſque aliis obſervationibus ſequitur, quas cum ſua ad Rodriquetium habita comparat; videat, ne id non noſtræ quidem obſervationi, ſed iis, quæ ſuis ipſe calculis ſupponit, dandum ſit. Atque hic iiſdem fere defenſionibus poſſem obſervationem noſtram tueri, quibus tuetur ipſe ſuam. Sed quid verbis opus eſt? Jam enim vitium in longitudinum differentia, quam Pingreus uſurpat, inhærere, ſatis declarant Zanotti calculi.

Bononia ſane, ſi Dominici Caſſini tabulas conſulas, orientalior eſt, quam Lutetia, horariis minutis 36, & ſcrupulis ſecundis 30. Verum illud diſcrimen jam inde ab anno 1715

juſto

juſto majus a Manfredio cenſebatur, qui in tabulis, quas ſuæ in ephemerides introductioni adjunxit, eoque primum anno vulgavit, illud ad 36 minuta prima ipſa contraxit. Sed non multo poſt cæpit dubitare, an detrahi adhuc deberent aliquot minuta ſecunda; veluti ex primo tomo commentariorum noſtræ Academiæ cognoſcere poteris, qua parte geographica, & aſtronomica explicantur. Enimvero ſi ex tabula, quam Maximilianus Hellius in ſuas ſingulorum annorum ephemerides inſerit, quam ſane pro ſumma ſubtiliſſimi Aſtronomi ſolertia non niſi ex accuratiſſimis obſervationibus petitam putabis; ſi, inquam, ex ea tabula longitudines Bononiæ & Pariſiorum quæras, eas invenies, quarum differentia major non ſit minutis primis 35, & ſcrupulis ſecundis 55. At Pingreus eam adhibet differentiam, quæ traditur in ephemeride, quam inſcribere ſolebant *La connoiſſance des temps:* nempe eam ponit 36′. 5″. Quamquam in appendice, quam deinde ſuo ſermoni, cum jam ſub prælo eſſet, addidit, illam paululum minuit, eique ſufficit, quam Caillius ſtatuerat 36′. 3″. Qua facta imminutione, parallaxim Solis deducit, etſi etiam paulo grandiorem, tamen ab ea minus diſſitam, quæ ex aliarum obſervationum comparatione fere conficitur. Vult ergo adhuc ad ſeptem, vel octo ſcrupula ſecunda erratum eſſe, vel in obſervatione noſtra, vel in ſua longitudinum differentia: videturque in nos humanior quidem in appendice eſſe, quam in ſermone fuerat, quando quidquid minus commode reſponderet, omnino obſervationi noſtræ vitio vertebat.

Quod autem diſſidii cauſa in longitudinum differentia inſideret, in id eo proclivius jam initio inclinabat Zanottus, quod cum de obſervatione non poſſet ſuſpicionem habere, tum vero etiam in ea ſemper opinione fuerat, ut minor ponenda eſſet, quam 36′. 0″. Sed occaſio fecit, ut in eam vellet diligentius inquirere. Et cum in promtu non haberet eas ſatellitum Jovis eclipſes, quibus comparandis methodus adhiberi poſſet, quam Hellius in ephemeride ad annum 1764 proponit, ad Lunæ defectiones ſe convertit. Itaque ex omnibus Lunæ defectionibus Pariſiis, Bononiæque juxta obſervatis, illas ſelegit, quæ totales cum fuerint, promtiores propterea ſupra Lunæ faciem umbræ progreſſus habuere: atque in his earum tantum macularum rationem habuit, quæ & majores ſunt, & magis conſpicuæ, & longius a limbo diſſitæ: denique ſingularum

 com-

comparavit non immerſiones ſolum, ſed etiam emerſiones; Quæ omnia cauta cum fuerint, Hellius auctor eſt, tuque profecto intelligis, magnam ſpem afferre, ut quod ex hujuſmodi comparationibus colligitur, vix a veritate abſit. Collegit autem Zanottus eam meridianorum diſtantiam, quæ minutis primis 35, & ſecundis omnino 49 continetur.

Sed quo res eadem pluribus modis inveſtigata certius conficeretur, voluit præterea Mercurii cum Sole congreſſus comparare. Quod quidem phœnomeni genus, modo obſervationibus correctio propter parallaxim adhibeatur, eſt ad rem, quæ quæritur, opportuniſſimum; præſertim ſi interiores planetæ & Solis contactus uſurpentur. Quin etiam, ne aut diverſa tuborum ratio, aut varia oculorum vis, quibus fit, ut ii contactus citius, ſeriuſve notentur, quidquam turbarent, conſtituit iis tantum uti velle Mercurii congreſſibus, in quibus ambo interiores contactus fuerint obſervati: ſic enim quidquid vitii afferre poteſt tuborum, oculorumque varietas, quia in utrumque contactum cadit, contrarioſque effectus parit, facta compenſatione, medium, quem vocant, planetæ tranſitum prorſus non afficit. Quamobrem phœnomeni opportunitas tanta eſt, ut minus jam dolendum ſit, quod in uno tantum Mercurii congreſſu potuerit Zanottus periculum facere. Is contigit anno 1736. Bononiæ obſervarunt Euſtachius Manfredius, Zanottus, aliique; eſtque tota obſervatio deſcripta in commentariorum noſtræ Academiæ tertia parte tomi ſecundi: Pariſiis Maraldus, & Caſſinus Dominici nepos; quibus accedit Jacobus Caſſinus, qui obſervationem ad Clermontium habuit: hique ſuas obſervationes in acta Academiæ Pariſienſis ad annum 1736 retulerunt.

Cum ergo uterque contactus Bononiæ pluribus tubis fuerit definitus, ſumſit Zanottus ea tempora, quæ jam tum Manfredio ante alia placuerant, quæque tubus præbuerat pedes 22 longus: idque eo libentius, quod ſi alia aliis tubis definita ſumſiſſet, meridianorum diſtantiam collegiſſet adhuc minorem. Comparationem deinde inivit cum tribus ſingulatim Gallorum obſervationibus; ſicque phœnomeni inopiam quaſi comparationum copia compenſavit. Et quoniam nec ita longum eſt, nec ab inquiſitionis, in qua verſamur, ſubtilitate alienum, ipſam totius calculi rationem ſubjiciam: ſi illud quidem ante monuero, in obſervationibus ad terræ centrum traducendis poſitam a Zanotto fuiſſe Solis parallaxim 10″; eademque uno ſcrupulo

aucta,

aucta, imminutave non variari longitudinum differentiam niſi quatuor ſcrupuli partibus decimis; ut intelligas, hanc longitudinis inveſtigandæ viam admodum eſſe certam.

Obſervatio Bononiæ habita tubo pedum 22.

In ingreſſu		*In egreſſu*	
h. 22. 11'. 12"	cont. inter. obſervatus.	h. 0. 50'. 50"	cont. inter. obſervatus.
21	effectus parallaxis.	1. 18, 7	effectus parallaxis.
h. 22. 11. 33	idem cont. e terræ centro.	h. 0. 49. 31, 3	idem cont. e terræ centro.

Medius ☿ tranſitus e terræ centro viſus h. 23. 30'. 32", 1.

Quamquam tempora utriuſque contactus tubo pedum 11 notata non parum ab his, quæ modo retuli, ſint diverſa, ex iis tamen medius Mercurii tranſitus e centro terræ viſus prodit h. 23. 30'. 31", 1: unico ſcilicet ſcrupulo ſecundo ante eum, qui ex temporibus elicitur hic notatis. Ex qua etiam conſenſione major longitudinum differentiæ, quæ hac via invenitur, auctoritas accedit.

Obſervatio Pariſiis a Maraldo habita tubo pedum 16.

In ingreſſu		*In egreſſu*	
h. 21. 35'. 15"	cont. inter. obſervatus.	h. 0. 15'. 5"	cont. inter. obſervatus.
17, 4	effectus parallaxis.	1. 23. 7	effectus parallaxis.
h. 21. 35. 32. 4	idem cont. e terræ centro.	h. 0. 13. 41, 3	idem cont. e terræ centro.

Medius ☿ tranſitus e terræ centro viſus h. 22. 54'. 36", 8.

Obſervatio Pariſiis a Caſſino Dominici nepote habita tubo ped. 14.

In ingreſſu		*In egreſſu*	
h. 21. 35' 10"	cont. inter. obſervatus.	h. 0. 15'. 18"	cont. inter. obſervatus.
17. 4	effectus parallaxis.	1. 23. 7	effectus parallaxis.
h. 21. 35. 27. 4	idem cont. e terræ centro.	h. 0. 13. 54, 3	idem cont. e terræ centro.

Medius ☿ tranſitus e terræ centro viſus h. 22. 54'. 40", 8.

Obſervatio ad Clermontium a Jac. Caſſino habita tubo ped. 14.

Hujus obſervationis numeri, non quales ad Clermontium notati fuere, deſcribuntur, ſed quales eos eſſe oportuiſſet ſub regii obſervatorii meridiano. In traducendis autem temporibus ab uno meridiano ad alterum, propter exiguam locorum diſtantiam, nulla diſcriminis inter parallaxes in uno atque in altero loco ratio habita eſt.

In ingreſſu		*In egreſſu*	
h. 21. 35'. 21", 5	cont. inter. obſervatus.	h. 0. 15'. 5", 5	cont. inter. obſervatus.
17. 4	effectus parallaxis.	1. 23. 7	effectus parallaxis.
h. 21. 35. 38. 9	idem cont. e terræ centro.	h. 0. 13. 41. 8	idem cont. e terræ centro.

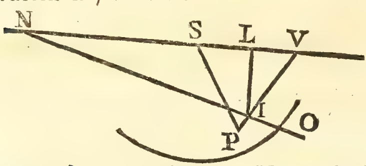
Medius ☿ tranſitus e terræ centro viſus h. 22. 54'. 40", 3.

Nunc

Nunc facta comparatione medii tranſitus ex obſervatione bononienſi cum eo, qui prodiit ex ſingulis pariſienſibus, ſequentes exiſtunt meridianorum diſtantiæ

35'. 55", 3 ex prima compar. 35'. 51", 3 ex altera. 35'. 51", 8 ex tertia.

Hactenus Zanotti calculos expoſui. Neminem autem adeo difficilem fore arbitror, qui poſt hæc non ultro concedat, longitudinum differentiam, quam Pingreus ſumſerat 36'. 5", eſſe ſatis proxime ſtatuendam 35'. 53". Media enim inter tres, quas modo deduximus, eſt 35'. 52", 8; quæ ſcrupulis tantum 3", 8 eam ſuperat, quam ante dixi, ex lunarium defectionum comparatione ſequi. Conſtituta ergo longitudinum differentia hac 35' 53", animum cupido inceſſit, ut quid Solis parallaxi fieret, cognoſcerem. Igitur calculos aliquot retexens quid denique compererim, breviter explicabo. Sed methodi, quam ſecutus ſum, rationem primum exponam. Nam cum Pingreus quanam methodo ſuos calculos ſubduxerit, non declaret, ad eam me converti, quam Zanottus olim ſimili in re cogitaverat, quæque eſt longe ſimpliciſſima, & commodiſſima. Eſt autem hujuſmodi.



Sit S Solis centrum; NS ecliptica; NO apparens Veneris ſemita e centro terræ viſa. Sumatur momentum temporis, quantum fieri poteſt, proximum ei, quo videatur Venus Solis limbum tangere. Dabitur huic temporis momento conveniens Veneris latitudo LI, atque longitudinum differentia SL. Sit VP verticalis circulus, qui per Veneris centrum tranſit, & IP parallaxium differentia. Dabitur angulus SVP. Quare in triangulo LIV colligetur VL, & VI. Ad VL addatur SL, & IP ad VI: atque in triangulo SVP ex lateribus SV, VP, & angulo SVP colligatur SP. Si SP, quæ colligitur, ipſam æquet ſemidiametrorum Solis, & Veneris differentiam, jam res confecta erit. Sin minus: inſtauretur calculus mutato convenienter temporis momento, quod primo ſumitur. Quo loco animadvertendum eſt, angulum SVP, etiam poſt unum minutum, ita mutari poſſe, ut non ſit mutatio negligenda. Quod ſi SP etiam in ſecundo calculo ſemidiametrorum differentiam non æquet, poterit contactus momentum analogiæ ope inveniri.

Hac

Hac igitur uſus methodo, poſita Solis parallaxi 10″, calculum ſubduxi, quo differentiam temporum, in quæ contactum planetarum Pariſiis, & Bononiæ obſervatum, atque ad terræ centrum traductum, cadere oportuit, comperirem. In eo autem calculo præter meridianorum diſtantiam, quam poſui 35′. 53″, & latitudinem loci, in quo obſervatio noſtra habita eſt, quam e Manfredii, & Zanotti obſervationibus poſui 44. 29′. 52″, non autem, uti Pingreus, 44. 29′. 36″ (eſt enim 44. 29′. 36″ latitudo Gnomonis in Divi Petronii) præter hæc, inquam, nulla alia elementa mutavi: nam ad Solis, Veneriſque longitudines, & ad latitudines Veneris quod attinet, uſus ſum ipſa tabula, quam Pingreus ſuum in ſermonem inſeruit. Volui enim, ut quidquid diſcriminis intercederet ea inter, quæ ex meis calculis conſequerentur, & ea, quæ collegit Pingreus ex ſuis, totum meridianorum diſtantiæ, quam ipſe ſumſerat, eſſet tribuendum.

Cum ergo invenerim, planetarum contactum citius Pariſiis, quam Bononiæ, videri oportuiſſe 28″, 48; ex Pingrei autem tabula, quæ obſervationum comparationes continet, appareat citius eumdem videri oportuiſſe Pariſiis, quam ad Rodriguetium 4′. 33″, 56; collegi temporum diſcrimen Bononiam inter & Rodriguetium eſſe debuiſſe 4′. 5″, 08. At eum ponit Pingreus viſum eſſe Pariſiis ad horam 20 28′. 26″ (Landii enim obſervatione utitur): Bononiæ autem viſus eſt ad horam 21. 4′. 58″, quæ hora, ad pariſienſem meridianum deducta, fit 20. 29′. 5″. Sequitur ergo, ut viſus fuerit citius Pariſiis, quam Bononiæ 39″. Ex eadem vero, quam modo dixi, tabula conſtat, illum viſum fuiſſe citius Landio Pariſiis, quam Pingreo ad Rodriguetium 4′. 57″. Igitur diſcrimen temporum bononienſem inter, & rodriguetienſem obſervationem fuit 4′. 18″.

His comparatis elementis, atque analogia inſtituta, ſequitur, parallaxim Solis ponendam fuiſſe, non 10″, ſed 10″, 53. Atque hanc poſtulat noſtræ cum rodriguetienſi obſervatione comparatio. Inſtitutis porro analogiis, quas docet Pingreus, ubi ſuæ comparationum tabulæ rationem explicat, inveni, Solis parallaxim, quam poſtulat comparatio obſervationis noſtræ cum Ulyſſiponenſi, eſſe 10″, 70; quam denique poſtulat ejuſdem comparatio cum illa, quæ ad Caput Bonæ Spei eſt habita, eſſe 8″, 31.

Jam vero parallaxis 10″, 53 non ſolum a ceteris, quæ

ex

ex aliarum cum rodriguetienſi obſervationum comparatione deducuntur, non diſcrepat, ſed media etiam fere eſt inter ſex, quas in appendicem ſuo ſermoni adjunctam confert Pingreus, & eſſe valde inter ſe conſentientes animadvertit. Media autem plane fieret, ſi quatuor centeſimæ detraherentur: quæ ſane detrahi facile poſſent, modo longitudinum differentia, quod non ſine probabili ratione ex iis, quæ ſupra dixi, fieri poſſet, uno ſcrupulo ſecundo minueretur. Quæ cum ita ſint, vides jam, adeo non fuiſſe obſervationem bononienſem non accuratam, ut nullum majus in èa ſummæ accurationis argumentum deſiderari poſſit.

Denique quod ad parallaxim 10″, 70 attinet, quæ ex comparatione noſtræ cum ulyſſiponenſi obſervatione oritur, quoniam, ipſo auctore Pingreo, nondum ſatis perſpecta eſſe creditur Ulyſſiponis longitudo, de ea nihil affirmare interim poſſumus. At quod ad illam ſpectat 8″, 31, quæ ex comparatione profluit cum obſervatione ad Caput Bonæ Spei a Maſſono habita, non abs re eſſe videtur, quod animadverti, eam mediam eſſe non ſolum inter illas, quas ex decem & ſeptem reliquis comparationibus Pingrei tabula exhibet (eſt autem media ipſa 8″, 36), ſed maxime inter duas 8″, 10, & 8″, 50, quas Landius ſub finem ejus libri tradit, quem nuper de Venere anno 1769 Solem trajectura conſcripſit: quarum primam aliquot ante annis collegit Wargentinus, cum obſervationes permultas, quæ alias ad Caput Bonæ Spei habitæ fuerant, ad reſpondentes aliis in locis habitas referret; alteram collegit Londinenſis Aſtronomus Shortus ex quamplurimis a ſe diligentiſſime inſtitutis calculis. Quocirca ſentis profecto, obſervationem a Zanotto ita commode conſtitutam eſſe, ut ſive Pingrei obſervationi fidendum ſit, ſive Maſſoni, utrique reſpondeat, & præterea Wargentini etiam, & Shorti calculis commendetur. Utra autem, an Pingrei, an Maſſoni obſervatio potior habenda ſit, non auſim quærere. Landius quidem de Maſſoni ſolertia, diligentiaque negat poſſe dubitari.

Hæc habebam, mi Saladine, quæ de Pingrei accuſatione ad te ſcriberem. Quibus exponendis ſi forte plus, quam opus erat, indulſi, noſtræ amicitiæ dabis. Vale, meque, ut facis, ama. Bononiæ X. Kal. Nov. MCCLXIV.

JOAN-

JOANNIS BRUNELLI.

De Pororoca.

EPISTOLA.

JOANNES BRUNELLUS EUSTACHIO ZANOTTO S. P. D.

JAmdiu hoc mecum reputavi, Zanotte ornatiſſime, earum rerum, quæ in mundo accidunt, nullam poſſe contemni ab iis, qui in naturæ contemplatione verſari cupiunt. Cum vero aliquid novum, aut inſolens apparet, cujus cauſam inveſtigare oporteat, omnes periclitandas eſſe vires ingenii arbitror, diligenterque etiam cavendum, ne, ſi quid forte negligatur, quamvis leve ſit, atque exiguum, ea, quæ aut intelligi, aut explicari nequeunt, conſulto videantur fuiſſe prætermiſſa. Quapropter brevi quidem, ſed tamen accurate, ut potero, rem tibi exponere conſtitui magnam in primis atque admirandam, cujus rei a te, qui ingenio & doctrina excellis, tum etiam a noſtræ civitatis philoſophis, cauſam aliquam audire velim. Quod ſi nonnulla etiam hic leges ex meo ſenſu deprompta, ſcito non in ea me opinione eſſe, ut videar mihi lucem aliquam in tantis tenebris attuliſſe. Ingenium ſolummodo experiri volui, & num quid dicere poſſem, quod probabile videretur, tentavi. Sed jam rem ipſam cognoſce, eoque libentius, quod eam nemo adhuc, quod ſciam, tractandam ſumpſit. Urbs eſt in america meridionali a præterlabente flumine *Parà* dicta, quæ ab æquatore auſtrum verſus gradum unum diſtat cum dimidio fere; ab oceano vero, quem reſpicit inter orientalem plagam, & borealem, quinquaginta milliaria & amplius. Flumen, quod urbem alluit in ora ſitam meridionali, multarum aquarum concurſum potius dixerim, quæ undique per amnes, & minora flumina delatæ huc confluunt oceanum ingreſſuræ. At Amazonum fluminis ora extima, quæ in eumdem intrat oceanum, longo ab urbe diſtat intervallo innumeris prope inſulis conſperſo, quarum una, quam Indi *Marayo* vocant, gyro ad quingenta fere milliaria produ-

ℓto continetur. Atque hinc facile colliges quam vehementer illi errent, qui *Para* urbem in ora fluminis Amazonum meridionali ſitam eſſe affirmant. Verum de hoc nonnullorum geographorum errato alias dicam, cum de flumine ipſo Amazonum ſermonem inſtituere otium mihi fuerit. Inter minora illa flumina, quæ, ut paulo ante dixi, aquas ad *Para* urbem deferunt, unum eſt, quod *Guama* dicitur americana voce. In eo inter cæteras inſula quædam eſt parvi quidem circuitus, ſed celeberrima, & accolis omnibus notiſſima; ab ipſa urbe diſtans milliaria quadragintaquinque circiter, jacenſque in medio flumine ducentos fere paſſus lato. Ibi, ut in cæteris fluminibus accidit, quæ oceano propiora ſunt, bini quotidie maris acceſſus, ac receſſus fiunt, modo Luna a Syzygiis non longe abſit. Proximo enim, altero, ac tertio poſt novilunium, aut plenilunium die, quo tempore æſtus contingunt longe omnium maximi, paulo ſupra eam inſulam, quam nuper commemoravi, tanta vis ac moles exuberantium aquarum ſubito, ac tam celeriter erumpit, ut tempore quam breviſſimo retro acti omnes eo uſque ſe attollant, quo reliquis ante aut poſt diebus ſex, ſeptemve horarum ſpatio conſcendunt. Hanc ſubitam, concitatiſſimamque aquarum eruptionem *pororocam* Indi appellant. Quo vocabulo ſatis apto & velocitatem aquæ, & navigantium metum, & fortaſſe etiam periculum exprimunt. Eam vero inſulam, unde *pororoca* initium ſumit, *pororocæ* inſulam vocant. Vix autem horrendus fragor exaudiri incipit, cum terni, aut quaterni fluctus albentes ſpuma, ſibique incumbentes ab ea inſula præcipiti impetu ruunt, ac ſurſum circumque effuſi per immane ſpatium late campos inundant. Tunc vero abripiunt ſecum magna vi & arborum truncos, & animalium cadavera, & cymbas, & ingentia ſaxa, & quidquid in medio curſu deprehendunt. Ubi vero flumen anguſtiorem alveum tenet, vel in minores amnes diſcerpitur, tantus eſt impetus *pororocæ*, atque vis tanta, ut aquæ plane furere videantur. Sic *pororoca* ſurſum per amnes, quos invenit, fertur; donec, viribus paulatim amiſſis, tandem in quietem redigitur, ac penitus evaneſcit, aquis jam ſummam ubique altitudinem obtinentibus. Quamquam *pororoca* altero die longe debilior eſt, & impetus habet multo minores; tertio vero die vix metuenda. Verum inſtante *pororocæ* tempore, præſertim maximæ, quæ ſtatim conjunctionem ipſam, vel oppoſitionem

con-

conſequitur; quiſquis in eo fluminis tractu navigat, qui ſupra inſulam *pororocæ* ſitus eſt, diligenter cavere debet, ne a *pororoca* improviſo deprehendatur; ſecus actum de ſe judicet. Et ſane quoſdam audivi miſere ſic periſſe; & hominem ſum allocutus, qui dum in illa fluminis parte navigaret, & jam *pororocæ* fragorem ſatis longinquum, ut ſibi videbatur, audiret; mihi retulit, ſe proceriorem arborem una cum ſociis conſcendere vix potuiſſe, cum jam cymbam infra ſe poſitam incredibili velocitate a fluctibus rapi videret, ac tandem demergi. Quamvis autem *pororocæ* vires omnes atque impetus in ſuperiores fluminis partes, ut ſupra dixi, ferantur, nolim tamen credas, ortum verſus, in iis præſertim locis, quæ ab inſula *pororocæ* non multum diſtant, nullos aquarum ſibi occurrentium perturbatos motus contingere. Fieri enim non poteſt, ut ab ea inſula tanta vis, tantaque moles aquarum ad ſatis magnam altitudinem ſubito erumpat, quin pars aliqua pondere ſuo in contrariam fluminis partem deorſum cadat. Aquis igitur tum ab oceano, tum a *pororoca* ex adverſo concurrentibus, motus aquarum ſatis vehementes fieri debent, ut navigantibus & metum, & etiam periculum afferre poſſint; donec aquæ omnes ubique per illum etiam fluminis tractum ad virium æqualitatem veluti componantur. *Pororocæ* autem omnium maximæ ſunt, quæ poſt æquinoctia, luna Syzygias de more prætergreſſa, contingunt. Etenim aquæ tunc temporis & majori copia foras erumpunt; & vires quoquoverſum exercent multo validiores magiſque metuendas. Hactenus *pororocam* illam expoſui, quam in *Guama* flumine, in quo bis iter facere mihi contigit, incolæ fere omnes propter urbis viciniam & videre facile, & obſervare poſſunt. Sed aliis in locis ab urbe remotioribus aliæ quoque fiunt *pororocæ* temporibus fere iiſdem; quarum illa longe omnium maxima, & præ omnibus ſumme metuenda, quæ in ipſo fere oſtio fluminis Amazonum prope illud promontorium, quod appellant *Cap du Nort* maximis viribus, & ingenti ſupra modum celeritate prorumpit. Ibi Condaminius, dum in *Cajennam* inſulam navigaret, Indorum negligentia, ut ipſe teſtatur, pene interiit. Nunc vero, Zanotte ornatiſſime, antequam tibi de hujuſce phœnomeni cauſa quid cogitaverim exponere incipio; hoc unum ſcire te velim, ſatis multa ab illius loci incolis proferri ad rem obſcuriſſimam, difficillimamque expla-

nandam, quæ mihi potius irridenda videntur, quam digna, ut ad examen revocentur. Putant nonnulli, *pororocam* oriri ſtatim ac propter maris æſtum aquæ ſurſum aguntur majore impetu, quam flumen in oceanum delabi ſolet. Verum ſi hoc ita contingeret, ubique terrarum, pelago æſtu intumeſcente, flumina ſuam haberent *pororocam*, quæ bis in ſingulos dies ab omnibus facile obſervaretur. Præterea cur nulla umquam conſpicitur *pororoca* infra *Para* urbem, ſcilicet in illo fluminis tractu, in quo tot aliorum fluminum, minorumque amnium undique confluentes aquæ marinis aquis occurrunt viribus multo majoribus? Cur vero in illo ipſo *Guama* flumine, ubi æſtus maris fere ſemper admodum lente procedit, paulo ſupra illam inſulam, quam toties commemoravi, *pororoca* ſubito erumpit viribus tantis, tamque immani celeritate? Id autem cur ſemper accidit poſtquam Luna Syzygias prætergreſſa fuit? Alia multa prætermitto, quæ ab homunculis rerum ignaris excogitata ſunt. Nolo enim tibi ſtomachum, & nauſeam movere. Venio igitur ad illa, quæ ipſe, re diligenter expenſa, ad obſcuriſſimi phœnomeni cauſam inveſtigandam dici aliquo modo poſſe cenſeo; quæque licet difficultatibus involvantur non contemnendis, aliquo modo tamen mihi viſa ſunt eſſe probabilia. Atque illud in primis tamquam certum, ac veluti obſervationi conſentaneum firmiſſime tenendum eſt, *pororocam* ipſam ita cum æſtu marino conjungi, ut ab illo plane pendere videatur; quod ex illis, quæ ſupra dixi, abunde patet. Atque hoc modo æſtus ipſe marinus horrendæ illius aquarum eruptionis cauſa facile fuerit. Verum qui hoc ita ſicce dixerit, nihil omnino explicet; & rem difficilem valde, atque obſcuram intactam prorſus, uti erat, relinquat. Ratio igitur in medium afferri debet, qua marini æſtus, qui ſemper poſt Lunæ ac Solis conjunctionem vel oppoſitionem per dies aliquot cæteris omnibus multo majores obſervantur, efficere poſſint, ut tanta vis, ac moles aquarum foras erumpat illo in loco, unde *pororoca* initium ſumit. Quomodo igitur id fieri poſſit, paucis dicam in hunc modum. Paulo ſupra inſulam *pororocæ* apertum os ac ſatis amplum occulti canalis eſſe cenſeo, ac ſubter terras cæcis meatibus in mare exeuntis non longe ab littore. Et ſane quoſdam eſſe hujuſmodi ſubterraneos canales, quibus latentes aquæ ad loca etiam longe diſſita deducuntur, certiſſima res

eſt;

eſt; atque is ignorare ſolum potuerit, qui nihil prorſus audiverit. Per hunc igitur canalem puto, tantam illam aquarum copiam, atque vim, quibus *pororoca* efficitur, a mari ad illam uſque inſulam propria gravitate ferri; ac tandem foras erumpere, ita tamen, ut non recta ſurſum emittantur, ſed obliquo itinere propter canalis ductum, contra vim fluminis ingenti cum celeritate aſcendant. Idque fieri cenſendum eſt ſtatim ac tumor ille maximi maris æſtus ſupra canalis hiatum, qua parte canalis ipſe in mare deſinit, totus incumbit. His enim poſitis cum paulo poſt Syzygias marinæ aquæ illum tumorem efficiant cæteris omnibus multo majorem; fortaſſis fieri poterit, ut eædem aquæ longe quoque majorem ſupra eumdem canalis hiatum habeant altitudinem, quam quæ prope inſulam *pororocæ* in flumine continentur; quæ ſane tunc temporis depreſſiſſimæ ad mare feruntur. Igitur marinæ aquæ canalem ingreſſæ, per eumdem proprio ac naturali pondere ad illam uſque inſulam ferri debent magna velocitate, magnoque impetu, fluidorum legibus ſic poſtulantibus; donec aquæ omnes, & quæ in flumine ſunt, & quæ a mari per canalem decidunt, altitudinem obtineant prorſus æqualem. Id vero quam brevi temporis ſpatio fieri neceſſe ſit, omnes facile intelligent, qui fluidorum naturam, atque leges perſpectas habeant. Cæteris autem diebus, cum ſcilicet Luna à Syzygiis longe abeſt, quoniam tumor ille ad tantam non attollitur altitudinem; cur non dicamus, aquis, quæ ſuper utrumque canalis hiatum incumbunt, eamdem prorſus tunc eſſe altitudinem, ut, quemadmodum in ſiphonibus accidit, eadem utrimque prementium virium magnitudo ſit? Nulla igitur his diebus erit *pororoca*; cum ſatis magna, & concitatiſſima, quæque breviſſimo tempore abſolvatur, ſemper eſſe debeat, quoties Luna vel Soli conjungitur, vel illi opponitur. Facile etiam intelliges, cur exiſtente Luna in Syzygiis æquinoctiorum tempore, *pororocæ* prodeant multo majores. Tunc enim marini æſtus contingunt longe omnium maximi; atque idcirco tumor ille ad maximam quoque aſſurgit altitudinem; quo fit, ut aquæ maris in canalem irruant majori vi; atque etiam in flumine foras erumpant impetu, ac velocitate, & copia longe majore. Tandem cum canalis ille ſubterraneus in mare deſinat non longe a littore, ſatis commode explicare poſſe mihi videor, cur *pororoca* eodem ſemper tem-

po-

pore prorumpat, quo aquæ a mari per flumina ſurſum extruduntur. Neque enim tumor ille maris ſupra canalis hiatum totus incumbet, niſi prius aquæ ad littora ſenſim appellant, ſeque in flumina quoquoverſum immittant. Habes jam, Zanotte ornatiſſime, meam de *pororoca* ſententiam, vel potius conjecturam quamdam; quæ ſi minus placuerit, non ægre feram; neque, mihi crede, iraſcar. Quin immo ea tibi referam, quibus conjectura hæc qualiſcumque mea labefactari poteſt. Quid enim ab eo diſſimulandum eſt, qui veritatem potius, quam ingenii laudem quærit? Ac primum recedente mari, atque in ſemetipſum redeunte vortex ſatis amplus ad inſulam *pororocæ* gigni deberet ob præcipitem aquarum lapſum in ſubterraneos ductus. Nullus autem, quod ſciam, vortex obſervatur toto illo temporis intervallo, quo aquæ fluminis oceanum verſus fluere conſpiciuntur. An vero iis in locis ad oceanum uſque per id tempus eamdem aquæ altitudinem tenent? Si enim ita eſſet, nullus vortex ſpectari poſſet. Verum ſi id affirmem, ex veritate loqui nolim. Satis enim obſervatione didici æſtu deferveſcente, aquarum ſuperficiem, quo propius a mari abeſt, eo eſſe depreſſiorem. Verum quod ſequitur difficultatem affert longe majorem. In ipſo *Para* urbis conſpectu toto eo tempore, quo aquæ in mare delabuntur, vortex periculoſus admodum, in ampliſſimumque gyrum quoquoverſum extenſus conſpicitur, quem ipſe aliquoties trajeci non ſine metu. Et ſane cum e nigro flumine ad urbem redirem, memini cymbam, qua vehebar, cum vix oram vorticis attigiſſet, paulatim deflexiſſe a curſu, ac tandem magna vi in orbem abreptam fuiſſe. A quo periculo vix una cum ſociis per ſummos remigum conatus evaſi. Multos autem periiſſe audivi in illo vortice, quorum cadavera nuſquam apparuerunt. Sic cymbæ quoque abſorptæ ſunt ſatis multæ, quas nemo umquam iterum videre potuit. Magnæ autem, proceræque arbores, quod frequenter accidit, ſtatim ac in centro vorticis veluti ſiſtuntur, primum erigunt ſe ſe, deinde ſub aquis magna vi ſic demerguntur, ut nullibi poſtea conſpiciantur. Verumtamen pelago æſtu intumeſcente, tantus hic vortex nullus apparet, ac penitus evaneſcit. Qui tamen utrum de illorum genere ſit, quos vivos appellant, tute affirmare non poſſum; ſed nec facile negaverim; illa enim, quæ modo attuli, ſuſpicionem pariunt non contem-

tem-

temnendam; & quaſi demonſtrant, ab aquis hunc verticem ſic efformari per occultum canalem decidentibus. Quod ſi ita eſſe dixerimus, cur nulla prorſus hoc in loco fuerit *pororoca* mari æſtu turgeſcente, quemadmodum & in *Guama* flumine contingit, & aliis etiam in locis? Fortaſſis canalis ille, ſi quis eſt, in mare non deſinit; ſed alio fertur, atque ad remotiſſima loca. Verum qui hoc dixerit, mihi quoque dicat, & plane, ſi poteſt, explicet, cur vortex ille non ſemper appareat; ſed tunc ſolum, cum aquæ ad mare redeunt. Igitur ſi vortex ille ab aquis per occultum canalem ad mare uſque protenſum labentibus ortum ducit; & tamen nullæ per eumdem canalem regrediuntur deinceps, foraſque umquam erumpunt, quæ *pororocam* efficiant; conjectura ſane, quam ſupra ad *pororocam* ipſam explicandam in medium attuli, plane concidit, ac nulla prorſus eſt. Atque hæc, Zanotte ornatiſſime, diſſimulare ipſe non debui, qui cum veram admirandi phœnomeni cauſam ignorare me fatear, eam tamen ſcire vehementiſſime cupio. Hæc de *pororoca* habui, quæ ad te ſcriberem. Quæ ſi Academicis noſtris legenda curaveris, & mihi gratum facies, & me tibi magis magiſque obſtrictum habebis. Etenim exiſtimo magnos illos viros, ob rei novitatem, hæc libenter audituros. Quod ſi pro ſummo ingenio, quo pollent, cauſam aliquam inveſtigabunt, quæ ad rem pertinere videatur, de ea ſtatim fac me certiorem. Vale.

EUSTA-

EUSTACHII ZANOTTI.

De angulo poſitionis, & ejus uſu in determinanda Telluris figura.

A Quovis puncto ſuperficiei terreſtris ſi objecta circumpoſita ad horizontem referantur, anguli, quos lineæ viſuales cum linea meridiana comprehendunt, idoneis inſtrumentis comparati ad chartas topographicas perficiendas maxime conferunt. Die 10 menſis Maji Anni 1753 interea dum ipſe, & ſocius Mateuccius diverſas Solis altitudines proſequeremur, quibus inſtrumenta in meridiano ſita expendere ſolemus, animadvertimus eam eſſe Solis declinationem, per quam occaſus fieri deberet prope illud horizontis punctum, qua celſiſſima mutinenſis turris prominet, & a bononienſi obſervatorio proſpecta in altitudinem minutorum circiter quinque aſſurgit. Ingruente occaſu Solis teleſcopia eo direximus, ac tandem e regione turris Solem conſpeximus, cumque turris faſtigium in apicem deſinat, notavimus ex horologio tempus, quo apex in diſcum Solis ſe immittere, & tempus, quo ab eo egredi viſus eſt. Ex hac mora longitudo chordæ deducitur intra Solem apparenter deſcriptæ, & cum data ſit Solis diameter, conſtabit etiam de chordæ diſtantia a centro. Addita hac diſtantia complemento declinationis Solis, vel ab eo ſubducta, pro ut chorda deſcripta meridionalis fuerit, vel borealis, conficitur arcus horarii circuli, qui a polo uſque ad verticalem circulum per apicem turris tranſeuntem protenditur. Elicui præterea punctum temporis medium inter ingreſſum, & egreſſum, quos obſervatione deprehendimus. Hoc tempus a meridie numeratum, & in arcum circuli converſum anguli menſuram exhibet, quem circulus horarius efficit cum meridiano. Quod ſi præterea nobis conſiderandum proponamus arcum meridiani, nempe complementum altitudinis poli, quod ſatis liquet ex pluribus obſervationibus Bononiæ habitis, conficietur triangulum ſphæri-

cum,

cum, in quo cognoſcuntur duo crura, & angulus ab his comprehenſus, unde reſultabit angulus verticalis circuli cum meridiano abſque eo quod refractiones, & parallaxes huic determinationi quidpiam officiant. Antequam ad ea me conferam, quæ trigonometricis rationibus conſequutus ſum, non erit præter rem monere, quo pacto declinationem ſolis comparaverim pro eo tempore, quo obſervatio habita eſt; nam quamvis per aliquot præcedentes, & ſubſequentes dies meridianæ ſolis altitudines captæ fuerint, quibus conficitur meridiana ſolis declinatio, cum tamen inæqualis ſit motus ſolis in declinationem, dubitari ſemper poterit, quin declinatio, quæ pro quovis intermedio tempore deducitur, aliquibus ſecundis ſcrupulis a vero aberret, ſi ab ordine dumtaxat, quo declinationes meridianæ procedere videntur, diſtributio fiat. Quamobrem in hac re ſatius eſſe duxi, ſi tabulis Nicolai de la Caille uterer, quæ omnium conſenſu accuratiſſimæ habentur. Ex his itaque tabulis non modo eam ſolis longitudinem ſubduxi, quæ obſervationis tempori reſponderet, ſed illas etiam, quæ ſoli convenirent utroque meridie obſervationi proximo. Inventis ſolis longitudinibus, & comparata eclipticæ obliquitate, tandem ad ſolis declinationes deventum eſt, quarum ordinem ſequutus ſum, ut ex obſervatis declinationibus meridianis eam colligerem, quæ obſervationis tempori reſponderet. Hæc inveſtigatio eo ſpectabat, ut accurate determinaretur arcus circuli horarii, & quoniam cetera, quæ in propoſito triangulo ſupputationi trigonometricæ inſervire debent, ſatis perſpecta ſunt, concludemus angulum circuli verticalis cum meridiano eum eſſe, qui ex calculo prodiit videlicet gr. 63. 42. 51.

Cognito angulo poſitionis quoties in charta topographica deſcriptus fuerit meridianus bononienſis, & notatum fuerit punctum, ubi Bononiam ſitam volumus, ſtatim apparebit quonam ſpectet linea, quam urbs mutinenſis tenet.

Longitudo, ac latitudo Mutinæ non eadem ponitur ab aſtronomis, qui inſigniorum urbium catalogos evulgarunt. Manfredius in catalogo, quem alteri ephemeridum tomo adjunxit, differentiam latitudinum inter Bononiam & Mutinam exhibet min. 8. 35″; Caſſinus vero min. tantum 4 —, qui diſſenſus in poſitione urbis non eſt parvi faciendus; nam locata urbe in eo puncto, quod illi Manfredius aſſignat, illinc abducenda erit, ſi Caſſinum audimus, & verſus æquatorem promo-

venda milliaria circiter quatuor. Certo nunc ſtabilire nequimus, cui potius in hac re deferendum ſit an Caſſino, an Manfredio, uſquedum aliæ menſuræ capiantur; nam quamvis latitudo Bononiæ ſatis perſpecta ſit, & angulus poſitionis recte conſtitutus fuerit, ſi tertium elementum non accedat, veluti differentia longitudinum, numquam dabitur quæſitam latitudinem tuto decernere. Deficiente hoc tertio elemento inquiſivi ex duobus jam præcognitis quænam prodiret differentia longitudinum poſita primum latitudine Caſſiniana, & deinceps poſita latitudine, quam Manfredius amplexus eſt. Ex altera mihi prodiit longitudinum differentia min. 11. 15″, ex altera vero min. 23. 29″, quæ quoniam itinerariis menſuris ſat accurate reſpondet, a quibus altera longiſſime aberrat, non ſine ratione concludemus latitudinem, quam Manfredius ponit, latitudini Caſſinianæ anteponendam eſſe.

Quoniam res eo deducta erat, ut ab angulo poſitionis de emendandis ſummorum virorum catalogis ageretur, eaſdem obſervationes iterum inſtituere decrevi, quibus de menſura prædicti anguli certius conſtaret; ſed alia ex aliis impedimento fuerunt ne res perficeretur; ſæpe id fruſtra tentavimus ſole inter vapores obliteſcente antequam horizontem aſſequeretur. Die prima auguſti anni ſuperioris 1763 Mateuccio, & Canterzano obtigit turris faſtigium intra ſolis diſcum intueri, cumque chorda apparenter ab apice deſcripta ad meridiem ſpectaret, & ſol in dies vergeret ad æquatorem, non erat dubitandum quin poſtero die idem objectum iterum in diſco ſolis eſſet apparitcurum. Spes non fefellit, ac tertia vice eadem obſervatio peracta eſt. Ex his deinceps angulum poſitionis calculo ſubduxi ea methodo, quam ſuperius declaravi. Angulus, qui reſultat ex obſervatione habita die 2 Auguſti, compertus eſt gr. 63. 42. 49 ab eo nihil ferme diſcrepans, quem nobis exhibet obſervatio prima, diei ſcilicet 10 Maji, etenim differentia non excedit min. ſec. 2. At obſervatio diei 1. Auguſti angulum poſitionis efficit majorem uno minuto primo, & ſecundis circiter decem. Quod autem obſervationes omnes æque diligenter peractæ fuerant, non ſatis intelligebam quid cauſæ eſſet, cur unus angulus ab aliis duobus tantumdem diſſentiret. Dum hæc animo pervolverem animadverti die prima Auguſti chordam in ſole exaratam parum a centro abfuiſſe, quare ſi vel minimum in longitudine chordæ erratum ſit, in diſtan-

tiam

tiam a centro, quæ inde deducitur, error invadet non contemnendus. Contra vero accidit in chordis a centro remotioribus, quas ſi eadem quantitate a vero aberrare fingimus, error diſtantiæ fiet perexiguus. Hæc igitur potiſſima cauſa eſt, cur duæ obſervationes conſentiant inter ſe tertia diſſentiente. Itaque auctor ſum iis, qui angulum poſitionis hac methodo metiri voluerint, ut dierum obſervationes præferant, quibus objectum chordam deſcribat a centro ſatis diſſitam; quæ cautio ſi habeatur, recte conſtituetur angulus poſitionis, de quo obſervationes noſtræ fidem faciunt.

Quoniam poſitionis angulus tali pacto comparatus tantam certitudinem præſefert, quantam vix ab uſitatis inſtrumentis expectare licet, voluntas inceſſit explorandi, an inſervire aliquo modo poſſet ad illuſtrandam celeberrimam, ſi qua alia eſt, quæſtionem de figura telluris, de qua graduum menſuræ hactenus perquiſitæ novas inter philoſophos diſſenſiones commoverunt; atque ut eos omittam, quibus non placet forma regularis, ſunt nonnulli qui terreſtrem globum ſibi repræſentant, tamquam ſi ortus eſſet ex rotatione ellipſis circa axem minorem, cujus rei indicium erit ſi graduum incrementa ab æquatore ad polos eam fere proportionem ſequantur, quam habent ſinuum latitudinum quadrata. Alii vero cum Boughe-rio obſervatas graduum longitudines ſcrupuloſius examini ſubjicientes proportionem plane diverſam ſe inveniſſe putant, & curvam rotari volunt, in qua graduum incrementa ſint in ratione quadruplicata eorumdem ſinuum. Itaque, ut ad propoſitum revertar, conſiderabam triangula, quæ certis analogiis a geometria deprompţis reſolvuntur, haberi tamquam ſphærica, qua figura poſita valent utique analogiæ, quæ nihil valerent, ſi triangula in ſphæroidica ſuperficie deſcripta forent.

Atque ut hoc ad tellurem transferamus, imaginemur triangulum, quod contineatur a duobus meridianis, qui a plano verticali ſecentur in duobus punctis. Quoties datum fuerit complementum latitudinis unius puncti, & angulus, quem meridiani comprehendunt, ideſt differentia longitudinis, & præterea datus ſit angulus, quem planum verticale efficit cum alterutro meridiano, ex hiſce tribus jam cognitis colligere licet complementum latitudinis alterius loci, dummodo proportiones inter latera, & angulos eæ ſint, quæ ſphæricis triangulis conveniunt; verum ſi propoſita triangula in alia qualibet ſuper-

 ficie

ficie curva deſcripta fuerint, adhibita eadem ſupputatione in errorem nos labi oportebit, ac propterea latitudinis complementum, quod calculo eruitur, cum eo convenire non poterit, quod immediatis obſervationibus definietur. Hæc ſane veriſſima ſunt, ſi geometrica ſubtilitate ſpectentur; reſtat inquirendum an differentia in hoc breviſſimo telluris tractu, quem ad examen nunc revocamus, ſit adeo exigua, ut poſſit in errorum ambiguitate, quos nemo obſervando cavere poteſt, prorſus deliteſcere.

Repræſentet ellipſis P M *p* meridianum bononienſem, & locus, ubi angulus poſitionis dimenſus fuit, habeatur in M. Ibi linea verticalis deſignabitur ducta ad ellipſim normali M Q, quæ axem telluris ſecet in Q. Equidem obſervatori, qui diverſatur in M, perinde erit, ac ſi tellus ſphærica eſſet habens centrum in Q, ubi normalis incurrit in axem. Concipiamus in ſuperficie telluris alteram ellipſim deſcriptam eſſe per polos P, *p*, & per objectum ab obſervatore in M proſpectum, quæ propterea meridianus objecti appellabitur. Fingamus præterea hanc ellipſim una cum objecto revolvi circa axem P *p*, donec congruat cum meridiano P M *p*, & ſit objecti locus in H. Per H ducatur normalis, quæ alteri occurrat in puncto E, ac propterea tum M E tum H E haberi poterunt pro radiis evolutæ punctorum M, & H, quæ parum diſſita ſunt. Jungantur duo puncta H, Q linea H Q. Enim vero ſi tellus ſphærica eſſet habens centrum in Q, qualem ſibi fingit obſervator in M, latitudinum differentia æqualis foret angulo M Q H; & revera ſi ponimus differentiam longitudinum inter duo loca M, & H accuratiſſimis obſervationibus conſtitutam eſſe, & ſi data ſit latitudo puncti M, & angulus poſitionis, quem ſupra innuimus, ab hiſce tribus elementis latitudinem loci H trigonometricis rationibus ſupputantes a figura ſphærica nihil recedentes tandem deveniemus ad angulum M Q H; at ſi immediatis obſervationibus latitudinum differentiam inveſtigabimus obſervando ſcilicet tum in M, tum in H altitudinem meridianam ejuſdem ſideris prope verticem tranſeuntis, reſultabit angulus M E H. Cum autem in ellipſi relata ad axem minorem radius evolutæ brevior ſit normali, latitudinum differentia minor in ſphæra exiſtet, quam in ſphæroide compreſſa ad polos, contra vero major erit, ſi ſphæra comparetur cum ſphæroide oblonga. Nunc videamus quantum alter angulus ab altero differat.

Jam,

Jam, ut ſcitis, plures ab aſtronomis graduum menſuræ comparatæ fuerunt, quæ ſi invicem conferantur, ea fere axium proportio deducitur, quam Newtonus præſenſerat adhibita vi centrifuga ab Hugenio prius excogitata, & poſita gravitatis lege, quæ a mutua corporum attractione pendet. Et revera gradus Laponiæ cum gradu Peruviano comparatus eam axium proportionem exigit, quam habent numeri 224 : 225, cui proportioni non repugnat gradus a Nicolao de la Caille dimenſus prope Caput Bonæ-ſpei, & gradus ipſe Picardi, donec correctio fiat, quæ a ſtellarum anomaliis proficiſcitur. Statuta axium proportione normalis linea M Q, & radius evolutæ M E ſic exprimetur. Fiat ſemiaxis $Pp = 1$, & denominetur ſinus anguli M Q P ideſt ſinus complementi latitudinis loci $M = 5$ exiſtente radio $= 1$; & dimidium parametri $= p$. Hinc prodit normalis $MQ = \frac{p}{\overline{1 + \overline{p - 1} : 55}^{\frac{1}{2}}}$, & radius evolutæ $ME = \frac{p}{\overline{1 + \overline{p - 1} : 55}^{\frac{2}{3}}}$.

Cum autem M Q, N Q nihil ad ſenſum differant, erit ſinus anguli M E H ad ſinum anguli M Q H ut M Q : M E. Subſtitutis deinceps valoribus quantitatum, quæ in propoſitis formulis continentur, & admiſſa latitudinum differentia inter Bononiam & Mutinam, quam Manfredius in ſuo catalogo exhibet, percipiemus tandem angulos M E H, M Q H differre duobus tantum ſecundis ſcrupulis, quæ differentia adeo perexigua eſt, ut ſolertiſſimum quemque obſervatorem fugere poſſit, & deſpondendum animis ſit indagationem tali pacto ſuſceptam abſolutum iri. Atque illud in primis ſpem noſtram minuit, quod longitudinum inveſtigatio, a qua calculus pendet, fallaciis, ut omnes norunt, non contemnendis obnoxia ſit. Nam ſi ſatellitum obſervationes in auxilium vocentur, facile eſt in errorem labi ſupra minuta ſecunda quinque aut ſex temporis, quæ in arcum circuli converſa errorem facient unius minuti primi cum ſemiſſe. Equidem minus peccari poterit differentiam longitudinis inquirendo ea ratione, qua olim Picardum uſum fuiſſe accepimus, ut differentiam longitudinis noſceret inter Uranoburgum & Haphniam. Methodus in eo conſiſtit, ut duo obſervatores e duobus locis ſubitam quamdam flammæ extinctionem referant ad tranſitum ejuſdem ſtellæ

per

per meridianum, ex quo ſtatim intelligunt quantum duo loca in longitudine differant; omnino tamen in duobus minutis ſecundis tum ex horologii viſione, tum ex obſervatorum cunctatione hærere poſſumus, quo fieret ut arcus circuli a vero diſſideret minutis ſecundis triginta.

Quamvis propoſita methodus ad illuſtrandam quæſtionem de figura telluris parum accommodata videatur, attamen non erit inutile hæc vobiſcum diſſeruiſſe, quæ viam aperient ad differentiam longitudinis tutiori, quam antea, ratione determinandam, in qua omnis difficultas poſita eſt, cui poſtea ſi acceſſerint menſuræ geodeticæ, atque omnia recte comparata fuerint, ex duplici menſura arcus meridiano perpendicularis reſultabit linea ad ellipſim normalis, quæ inter elementa recenſetur, a quibus pendet determinatio figuræ telluris. Jam, ut ſupra diximus, latitudo Bononiæ ſatis perſpecta eſt, ac præterea nullus dubitandi locus relinquitur, quin angulus poſitionis recte conſtitutus fuerit, quare ut tria cognita habeantur in triangulo ſphærico, quibus ſupputetur angulus, quem duo meridiani comprehendunt, differentiam latitudinum inquiremus, quam profecto ex obſervationibus ſtellarum prope verticem tranſeuntium ſubtiliter admodum aſſequemur. Sed antequam ex hiſce tribus elementis ad calculum progrediamur, notare oportet differentiam latitudinum, quam immediatis obſervationibus definivimus, eam eſſe, quæ ſphæroideæ figuræ convenit, quare ne ſupputatio in errorem nos adducat, eadem differentia erit prius ad figuram ſphæricam redigenda. In propoſito ſchemate cum datus ſit ex obſervatione angulus M E H, inveniendus erit angulus M Q H, quo deinceps utemur, ut differentiam longitudinis trigonometrico calculo aſſequamur; & quamvis in inveſtigatione anguli M Q H axium proportio, de qua quæſtio eſt, tamquam explorata habeatur, ſufficiet tamen ſi ea, quam ponimus, a vero longiſſime non aberret.

Juvabit nunc quærere quantum arcus longitudinis augeatur vel minuatur propter errores, quos ſolertiſſimus quiſque obſervator cavere nequit. Ceteris elementis nihil immutatis finxi angulum poſitionis gr. 63. 42, ac deinceps uno minuto majorem; omnino tamen diſcrimen prodiit prorſus contemnendum; ex quo manifeſtum eſt prædictum arcum ab angulo poſitionis nihil detrimenti capere poſſe, niſi ſi turpiſſime obſervatores labantur. Eadem ratione experiri volui quid efficeret

ret error ex differentia latitudinum. Errorem finxi ſecundorum non amplius trium. Quoties enim inſtrumenta exquiſita adhibeantur, intra eum limitem errores cohibere licet, ſi Maupertuſio fides habenda eſt. In hac ſuppoſitione longitudinis arcus a vero deſciſceret min. ſec. 8. cum ſemiſſe. Itaque ex his, quæ hactenus expoſita fuerunt, concludendum videtur nullam aliam rationem capeſſendæ differentiæ longitudinis inter duo loca uſque adhuc adhibitam fuiſſe, quæ majorem ſubtilitatem præſeferat; quod ſi geodeticæ operationes acceſſerint menſura arcus meridiano perpendicularis abſolutiſſima fiet.

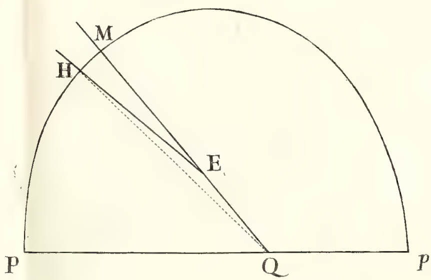
Quoties agitur de metiendo arcu in ſuperficie telluris, in illud maxime contendunt aſtronomi, ut tractus quo fieri poteſt longior ad examen revocetur, tunc enim errores, in quos facile rapimur in captanda longitudinum differentia, uti ſupra dictum eſt, per longius intervallum diſtributi determinationi minus nocent. Cum autem difficile ſit aliud objectum invenire, & magis diſtans, & ſatis conſpicuum, quod ſolem vel occidentem, vel orientem intercipiat, menſuris jam exactis aliæ adjungi poſſent in hunc modum.

Inquiratur locus, qui ſit ad occidentem turris mutinenſis, & cujus latitudo parum differat a latitudine bononienſis Obſervatorii, quæ porro differentia exquiſitis inſtrumentis comparanda eſt. Iis diebus, quibus ſol pone turrim oriri conſpicietur, definiatur angulus poſitionis. Cognito angulo, & ceteris elementis jam conſtitutis differentia longitudinis eruatur inter turrim & locum obſervationis, quo pacto differentiam longitudinis inter eum locum, & Bononienſe obſervatorium tuto aſſequemur. Et quoniam in latitudinum differentia errorem tantum licet ſupponere min. ſec. 3., nullum majus diſcrimen in differentia longitudinis timendum erit quam ſec. $8\frac{1}{2}$. Quamobrem linea meridiano bononienſi perpendicularis, quæ in Longobardiam longe protenditur, quæque unum fere gradum complectitur, aptior reddetur ad quantitates quaſdam tuto ſtabiliendas, a quibus figura telluris repetenda eſt.

Hæc commentus ſum quod noverim angulum poſitionis methodo propoſita ſubtiliter admodum præfiniri, quod cum ita ſit, idem angulus ad alias quæſtiones reſolvendas traduci poterit. Non defuerunt aſtronomi, qui ſuſpicati ſint poſitionem meridianæ lineæ nequaquam conſtantem eſſe, ex quo angulum poſitionis ejuſdem objecti tractu temporis variari opor-

oportebit. Nullum hac ſuper re judicium in præſens haberi poteſt, deſiderantur enimveteres obſervationes, quas cum noſtris comparemus; attamen contenti erimus ſi experimenta poſteris reliquerimus, quæ a majoribus non accepimus; non enim de aſtronomia bene mereri exiſtimabimus eos dumtaxat, qui res perfecerint, ſed eos etiam, qui inchoaverint. Plura quoque de refractionibus horizontalibus dicenda occurrerent, quarum viciſſitudines nondum exploratæ ſunt; ſed nimius ſim ſi ſingula perſequi velim, quæ in alium ſermonem rejiciam. Hæc tamen notare volui, ut quiſque intelligat quam multa a ſimpliciſſima obſervatione conſequantur, idque nobis obtigiſſe, quod ſæpius accidere ſolet, ut experimenta, quæ aliud agentes, & quaſi per jocum ſuſcepimus, viſa ſint poſtmodum ad nobiliſſimas quæſtiones reſolvendas accommodata.

pag: 264



T.V.P.II.

17

ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH SOC. JESU.

De unione colorum aliorum poſt alios per binas ſubſtantias, ac unione multo majore per tres.

1. SUb finem anni 1763 tranſmiſi ad Academiam Diſſertationem, quæ impreſſa eſt in prima parte hujuſce Tomi, in cujus Diſſertationis fine promiſeram uberiorem fœcundiſſimi argumenti pertractationem edendam fuſiore opuſculo, illud adjiciens, *ubi per tempus licuerit*. Id quidem adhuc nequaquam licuit. Primo enim a Summo Romano Pontifice miſſus ad inviſendas cum Eminentiſſimo Cardinali Bonaccurſio Pontinas paludes, tum ab Ampliſſimo Mediolanenſi Senatu evocatus ad Matheſim docendam publice in antiquiſſima, & celeberrima Ticinenſi Academia, vacationum vero tempore adhibitus & Mediolani ad inquirendum in vaſtiſſimam illam Principis templi molem, de cujus faſtigio ſupremo agebatur, an ſcilicet oneri complementi nondum extructi ferendo par eſſet, & Arimini ad inviſendum portum illum jam fere obſtructum, & opportuna proponenda remedia, de quibus omnibus argumentis ſcribendum mihi fuit, & quidem admodum fuſe, præter quotidianas alias curas quamplurimas, ingentem in primis epiſtolarum vim, quarum plurimæ de argumentis ad Matheſim pertinentibus, & nonnullæ de hoc ipſo argumento, ex quibus excerpta multa cum illa ipſa Diſſertatione Germanice reddita nunc eduntur a Scherffero Noſtro Viennæ, nihil ſane ocii ſum nactus ad liberandam fidem, & ea omnia, quæ mihi animo propoſueram, evolvenda. Acceſſit etiam inuſitata ſane Cæli inclementia, quæ iis ipſis temporibus, quibus obſervationum ordinatam ſeriem inſtituere potuiſſem, & inſtrumenta quidem idonea paraveram, ſole obducto per menſes integros plures, ſæpe inchoatum opus abrupit.

2. Cum idcirco ejuſmodi tractatio in aliud mihi tempus differenda ſit, quod ignoro, an unquam ſim habiturus, proponam hic ea tantummodo, quæ ope mei vitrometri obſervare mihi licuit, pertinentia ad unionem colorum non omnium ſimul, ſed aliorum poſt alios per duas ſubſtantias, & quæ inde deducuntur, vel cum eo relationem habent, potiſſimum de objectivo ad conjungendos multo magis heterogeneos radios componendo per tres lentes, ſive per duas continentes aquam incluſam.

§. I.

De unione colorum non omnium ſimul, ſed aliorum poſt alios per binas ſubſtantias heterogeneas ex experimentis.

3. DE unione filorum radii habentium diverſos colores egi in Diſſertatione nominata §. IV., ubi num. 87. hæc habentur. *Supereſt monendum illud circa hanc hujus erroris correctionem: ſi in omnibus radiorum heterogeneorum binariis in ingreſſu in eadem bina media ex aere ſit eadem ratio* $\frac{dM}{dm}$ (nimirum ratio qualitatum diſtractivarum); *correcto errore pertinente ad bina radiorum genera, corrigi errorem pertinentem ad omnia reliqua: ſecus, ſi in aliis ſit alia. Id patet ex ipſa formula, in qua res omnis reducitur ad valorem ejus fractionis. An res ita ſe habeat, inquirendum eſt per experimenta methodis, de quibus infra. Ex obſervationibus huc uſque inſtitutis videtur res ita ſe habere, ſi minus accurate, ſaltem proxime.* In ea formula valor M eſt ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti pro vitro altero pro uno quopiam radio, dM differentia binorum ejuſmodi valorum pertinentium ad binos radios heterogeneos, m, & dm eadem pro altero vitro.

4. Porro rationem dM ad dm pertinentem ad omnia colorum binaria in iiſdem binis ſubſtantiis eandem eſſe, ſuppoſuerunt omnes, quos quidem ego huc uſque videre potui, qui hoc argumentum pertractarunt Geometræ, qui idcirco ubi formulas propoſuerunt pro corrigendo errore diverſæ refrangibilitatis, aſſumpto M, & m pertinente ad radios medios, ac $\frac{dM}{dm}$ pertinente ad radios rubeos, & violaceos, corrigendum ſuſceperunt errorem inductum a diverſa refrangibilitate ejus unius binarii, tanquam ſi eo correcto, corrigeretur ſimul error reli-

reliquorum omnium, & iis binis conjunctis conjungerentur ſimul reliqui omnes, quod quidem ita ſe habere nonnulli etiam diſerte affirmarunt.

5. Affirmavit quidem Clairautius in diſſertatione inſerta Commentariis Acad. Pariſ. ad annum 1757, ſe pluribus inſtitutis experimentis nunquam potuiſſe omnes prorſus colores ſimul accurate conjungere, & ejus phœnomeni cauſam eam eſſe ſuſpicatus eſt, quod ratio decurtationis ſinus pro diverſis coloribus in aliis vitris alia eſſet reſpectu ejuſdem colorum binarii; verum is etiam binario tantum unico formulas ſuas applicavit; & D'Alembertus in tertio Opuſculorum ſuorum tomo, in quo idem argumentum pertractavit uberrime, licet innuat, incertum eſſe, an valor hic $\frac{dM}{dm}$ pro omnibus colorum binariis ſit prorſus idem, adhuc tamen eum valorem ubique adhibuit ut omnibus colorum binariis generalem, perſecutus errorculorum multo minorum correctionem, & nihil ſollicitus de eo, qui oriri debet ex ejus ipſius valoris diſcrimine in binariis diverſis: uſque adeo ea opinio inſederat animis, valorem ipſum in omnibus vel accurate eumdem eſſe, vel ſaltem quamproxime, adeoque conjunctis binis quibuſque coloribus, reliquos vel accurate, vel ſaltem quamproxime ſimul conjungi, quod ipſe etiam in ſuperius memorato loco affirmaveram.

6. Plures ego quidem jam tum obſervationes inſtitueram pluribus methodis, cum diſſertationem ipſam conſcripſi, ſed nullum adhuc inſtrumentum habueram, quo in eam rem ſatis certo poſſem inquirere: illud, quod ibidem fuſe, ac diligenter deſcripſi, jam ab Opifice acceperam, ſed nullas adhuc ſatis accuratas obſervationes ejus ope inſtitueram, quibus paullo poſt inſtitutis, quæ ad eam rem pertinent, evidentiſſime comperi, & pluribus tam nobilitate, quam doctrina præſtantiſſimis viris oſtendi tam Romæ ſuperiore anno ante, quam ad paludes Pontinas diſcederem, quam Mediolani, & Papiæ, quos inter ipſe Eboracenſis Dux, Regis Angliæ frater, Phyſicarum rerum & amantiſſimus, & peritiſſimus ad ea ſpectanda phœnomena meum hoc Mediolanenſis Collegii anguſtum cubiculum, in quo hæc ineunte anno 1765 ſcribere incipio, adire non eſt dedignatus, & ibidem, immoderati æſtus incommodo ſuperato, verſari diutiſſime. Proponam primo, quid ejus inſtrumenti ope viderim, & quomodo eorumdem confirmatio-

 nem

nem habuerim per obſervationes aliis methodis inſtitutas, tum quid inde deducatur pertinens ad variam illam qualitatum diſtractivarum rationem, & impedimentum unionis colorum omnium per bina vitra, diligenter exponam; ac demum oſtendam etiam, quanto major, & fere perfecta unio haberi poſſit per tria genera mediorum diaphanorum.

7. Primo quidem direxi radium ſolis ope ſpeculi aptati machinulæ expreſſæ in fig. 10. ejuſdem diſſertationis per rectam ad ſenſum horizontalem a foramine feneſtræ ad oppoſitum parietem: tum ipſi foramini applicavi vitrometrum expreſſum in fig. 25. ita, ut latus immobile feneſtrella vitrea munitum reſpiceret foramen ipſum: cujus quidem lateris poſitionem perpendicularem ipſi radio facile obtinebam ita movendo per cochleas ſubjectum planum, ut radii pars reflexa a prima ſuperficie ejuſdem vitri rediret ad foramen ipſum, licet prorſus accurata ejuſmodi poſitione opus non eſſet. Tranſmiſſo per utramque feneſtram radio, vidi ipſum abire ad eumdem in pariete locum, ad quem abibat ſublato repente inſtrumento, vel abierat ante, ubi meum helioſtatæ genus adhiberem expreſſum in diſſertationis fig. 22. Atque id quidem indicio fuit, vitreas laminas ſatis accurate parallelis planis terminari, quæ nimirum a ſua directione radium nequaquam removerent, nec idcirco futuris obſervationibus impedimento eſſent.

8. Aqua in inſtrumentum infuſa, adduxi ope cochleæ latus mobile ad eam poſitionem, quæ feneſtræ utriuſque paralleliſmum oculo exhiberet: eam deinde poſitionem prorſus accuratam acquiſivi movendo antrorſum retrorſum latus ipſum, donec obtinerem locum in pariete radii per aquam incluſam tranſmiſſi eumdem itidem, qui eſſet locus ejuſdem radii directi: cum vero in eo caſu is radius ne in latus quidem detorqueretur a poſitione directa, illud comperi, axem machinulæ rite collocatum, in recta nimirum parallela lateri immobili, ſine qua conditione latus mobile ad accuratum paralleliſmum cum immobili adduci non poſſet per motum circa eumdem axem. Notabam autem locum indicis in arcu circularis faſciæ, a quo nimirum rectificatio inſtrumenti pendet, cum ab eo numerari debeant arcus metientes angulos, quos latus mobile cum immobili continet, ſive adducatur ad fixum, ſive ab eodem abducatur, qui ſunt aquei priſmatis anguli obverſi ſurſum verſum in primo caſu, & deorſum verſum in ſecundo.

9. Ad-

9. Adducto mobili latere radius deſcendit, & imago Solis apparuit ex inferiore parte violaceo, ac indico, & cæruleo colore tincta, e ſuperiore rubeo, aureo, ac flavo, in medio alba, uti in exigua fit priſmatum exigui anguli refractione: radio enim ita detorto in partem angulo refringenti contrariam, ut illis coloribus maxime, his minime detortis, ii omnium maxime a ſede naturali diſcedant, hi omnium minime, fit ſeries quædam continua circularium coloratarum Solis imaginum, quarum magnitudo illud efficit, ut in extremis tantummodo colorati ſpectri marginibus colores appareant puri, in remotiore a loco naturali violaceus, in propiore rubeus, tum ab illo pergendo ad medium ſpectrum, occurrat primo violaceus, & indicus conjuncti, tum etiam cæruleus, mox & viridis, ac alii poſt alios ita, ut in medio habeatur albedo ex omnibus ſimul compoſita, a rubeo vero pergendo itidem ad medium habeantur primo quidem bina genera, rubeus nimirum, & aureus, tum tria, adjecto & flavo, donec eodem pacto per mixtionem eorum, qui accedunt alii poſt alios, ad eamdem albedinem deveniatur.

10. Abducto latere a poſitione paralleliſmi elevabatur imago Solis eodem pacto a binis extremis marginibus in colores inducta, ſed ordine inverſo poſitis, angulo nimirum aquei priſmatis jam deorſum verſum directo, ut nimirum violaceus in ſummo emineret vertice colorati ſpectri, rubeus in imo omnium maxime ad naturalem locum accederet.

11. Traducto latere mobili lento motu continuo hinc, & inde a paralleliſmi poſitione ita, ut per illam tranſiret, ſpectabatur in pariete Solis radius lento itidem motu continuo deſcendens, ac aſcendens ita, ut ubi per ſedem naturalem tranſiret ipſius Solis imago, appareret ibidem rotunda, & prorſus alba ſine ullo ullius coloris veſtigio. In quovis ejuſmodi tranſitu invertebatur colorum ordo ita, ut rubeus, qui, imagine infra naturalem ſedem deſcendente, eminebat, omnium altiſſimus, idem, eadem ſupra ipſam evecta, omnium infimum teneret locum, violaceo ita cum velocitate omnium maxima traducto. Inverſio autem ipſa fiebat ſemper per conjunctionem omnium accuratam, quæ ita ſimul habebatur in omnibus, ut extremis conjunctis, omnes etiam ſimul intermedii conjungerentur.

12. Deducto latere mobili ad paralleliſmum immittebam in

in aquam priſma exiguum ex flint ita, ut ipſius angulus refringens ſurſum verſum ſpectaret. Plerumque autem applicabam priſmatis latus ad planum feneſtræ vitreæ lateris immobilis, quo pacto obtinebantur bini anguli refringentes, alter ejuſdem vitri poſitione ſurſum directa, alter contraria directione deorſum obverſus aquæ contentæ inter alterum ejus vitrei priſmatis latus, & vitrum feneſtræ lateris mobilis applicatum, qui quidem anguli æquales omnino evadebant: eo autem priſmatis latere non ita applicato oriebantur bini aquei anguli hinc, & inde a vitreo priſmate, quorum ſumma ipſius priſmatis angulo æquabatur, uti facile eruitur ex num. 196 diſſertationis.

13. Eo priſmate adjecto, imago in pariete ſtatim deſcendit. Manſiſſet utique, ſi vitrum habuiſſet eamdem qualitatem refractivam, quam aqua. Vitri angulus ſurſum obverſus imaginem deprimebat, angulus aquæ contraria poſitione ſitus eumdem elevabat: cum æquales eſſent, ſi viribus etiam æqualibus pollerent materiæ, ex quibus conſtabant, æquales effectus ſe invicem deſtruxiſſent: ſed cum vitri refractiva vis eſſet major, illud omnino conſequi debuit, ut deſcenſus ab ipſo inductus aſcenſum actioni aquæ debitum ſuperaret. Eadem autem imago apparuit coloratis marginibus ita, uti pars infima violaceum, ſumma rubeum haberet colorem, illo, uti par erat, a ſede naturali recedente omnium maxime, hoc omnium maxime ad ipſum accedente.

14. Huc uſque omnia evenere juxta conſuetas refractionum leges a Newtono traditas, & ante recentiſſima hæc comperta notiſſimas: in iis, quæ conſequentur, occurret primo Dollondianum inventum, Newtoni inventis contrarium, tum illud, quod propoſueram, quod quidem ipſi Dollondianorum teleſcopiorum theoriæ ita obſtat, ut ne ea quidem perfici omnino poſſint, ac omnem nimirum diverſæ refrangibilitatis errorem corrigere.

15. Abducto latere mobili ita, ut angulus aqueus creſceret, cæpit elevari ſpectrum coloribus in utroque margine manentibus cum eodem ordine, ſed minus dilatatis, donec devenit ad locum imaginis directæ ita, ut margo ſuperior ſpectri imbutus colore rubeo occuparet accurate locum ſuperioris marginis imaginis directæ, qui ſummoto ſpectro facile obtinebatur, & deſignabatur applicato margine chartæ albæ in ejus

lo-

locum, ad quem inſtrumento ſtatim reſtituto, ne motus Solaris imaginis poſſet eſſe ſenſibilis (ubi nimirum helioſtatam non adhiberem, quo adhibito, imago manet immota, nec ulla feſtinatione eſt opus) ſpectrum adducebatur per cochleam latus mobile promoventem. In eo ſtatu quandoque notabatur angulus priſmatis, tum is adhuc augebatur aſcendente ſpectro, donec imus ipſius margo violaceus congrueret cum loco imi marginis directæ, ac eo itidem notato angulo, tum aucto, elevabatur ſpectrum ſupra locum ipſum directæ imaginis, in quo adhuc iidem colores, licet ſemper minus dilatati aſpiciebantur, eodemque ordine ita, ut rubeus in ſummo jam omnium maxime diſtaret a loco naturali, violaceus in imo ad ipſum omnium maxime accederet.

16. Hoc quidem pacto imago Solis refracta motu continuo tranſiit per locum imaginis directæ ſine conjunctione illa colorum, quæ in albedinem deſineret, uti per ipſam albedinem tranſierat in caſu ſolius aquæ, & ſine ulla conjunctione colorum quorumvis, ſine inverſione ſpectri: in ſpectro ipſo elevato ſupra naturalem ſedem color rubeus majorem eſt viſus refractionem habere, quam violaceus, non quod in ſingulis refractionibus majorem habuerit, ſed quod licet refractio ab aqua inducta pluſquam correxerit refractionem inductam a vitro; adhuc tamen nondum correxerit differentiam refractionum violacei, & rubei, adeoque violaceus adhuc rubeo depreſſior remanſerit. Verum adhuc id ipſum opponitur iis, quæ a Newtono videntur diſerte tradita, & quæ Dollondus invenit falſa.

17. Inſtrumento adhuc magis aperto, perpetuo magis aſcendit ſpectrum, & interea color rubeus in ſummo margine ita ſenſim attenuatus eſt, ut demum evanuerit, ac in vertice jam cepit eminere aureus, tum flavus, violaceo adhuc tenente infimum locum: paullo poſt ſucceſſit in parte ſumma flavo viridis, tum vero in imo violaceus in purpureum abire cæpit vinaceum colorem illum, qui oritur ex mixtione rubei cum violaceo, quando ii ſoli e ſpectro aſſumpti conjunguntur, qui quidem evaſit admodum ſatur, ubi procedente inſtrumenti motu pulcherrimus in oppoſito margine viridis apparebat. Ibidem excepit viridem cæruleus, & indicus, rubeo in inferiore ora jam libero, & puro, ac demum violaceus quoque emerſit in ſummo, facta inverſione ſpectri, qua rubeus eſſet loco naturali pro-

proximus, tum aureus, & flavus, ac remotiſſimus omnium violaceus diſcederet.

18. Inverſio ſpectri eo pacto facta eſt ſine tranſitu per albedinem, coloribus non ſimul omnibus conjunctis, ſed aliis poſt alios ita, ut non niſi bini coirent alii poſt alios. Colorata fimbria ſemper apparuit cum minima dilatatione tum, cum puriſſimus in alto appareret viridis, & vividiſſimus in imo purpureus circa medium nimirum inverſionis, ſed adhuc erat tum etiam admodum ſenſibilis, nec vero illud ipſum minimum ſatis accurate definiri poterat, cum ab uno colore ad alium, & a poſtremo ad albedinem tranſitus fieret ſenſim per inſenſibiles gradus, non repente, & quodam veluti ſaltu abrupto, nec, eamdem ob cauſam, niſi paullo craſſiore quodam oculorum judicio poterant illi ipſi limites determinari, in quibus alter alteri in ſupremo margine ſuccedebat.

19. Porro eam ipſam ſucceſſionem ſuperpoſitionis, ſeu congruentiæ diverſorum colorum obſervavi ſemper, quotieſcumque vitra utcumque diverſa intra ipſum vitrometrum collocavi, flint, ſtraſs, vitrorum communium plura genera, quin etiam cryſtallos montanas plures, in quibus tamen quid diſcriminis notatu maxime dignum invenerim, dicam inferius; immo etiam ubi diverſa vitra inter ſe compararem per angulum vitreum variabilem; quamquam multo magis notabilis, & lenta, ac evidentiſſima ſucceſſio ſemper apparuit, ubi intra vitrometrum immittebam flint, vel ſtraſſ, & eo evidentior, ac lentior, quo angulus refringens eſſet major, qui tamen, ubi plus æquo eſſet magnus, ante ad maximam inſtrumenti aperturam deveniebatur, quam tota inverſio deſineret. Verum ante ipſum phœnomenum adjectis ſchematis explicabo, quam clariſſime potero, tum quæ inde conſectaria deducantur, evolvam.

20. Verum ne res complicatior evadat, adhibebo colores tres tantummodo, ut rubeum, ac violaceum extremos, & viridem medium, quos in fig. 1. deſignabo litteris R, W, V, quæ autem dicentur de ipſis, intelligenda erunt de aliis ternis quibuſcumque.

21. In fig. 1. refert B imaginem naturalem albam, in qua omnes colorati circuli conjuncti exhibent colorem album, quæ quidem imago remanet æque commixta, & alba, ubi radius tranſit per inſtrumenti feneſtras vitreis laminis tenuibus munitas æque craſſis in poſitione laterum, & ſi latera ſint parallela,

ſela, etiam infuſa aqua. Adducto latere inſtrumenti ita, ut habeatur angulus aqueus refringens ſurſum obverſus, deſcendit imago in locum A, ſed rubeus circulus (circulos nominabo, & eoſdem expreſſi in ſchemate, licet ob obliquum incurſum in parietem circuli ſinguli abeant in ellipſes nonnihil oblongas) minimam omnium refractionem paſſus minime omnium deſcendit, tum viridis infra ipſum, ac violaceus omnium maxime deprimitur. In medio ex omnium commixtione efformatur albedo, ſolus rubeus in ſupremo margine apparet purus, violaceus ſolus purus in imo, viridis nuſquam purus, niſi circa lateralem marginem per ſpatiolum fere prorſus inſenſibile.

22. Abducto latere mobili, & accedente ad parallelifmum, aſcendit ſpectrum marginibus eodem ordine coloratis, donec in ipſo parallelifmo uniantur ſimul omnes in B: continuato motu, & angulo aqueo in contrariam partem obverſo, aſcendit ſpectrum in C, ubi circulis inverſo ordine poſitis violaceus tenet marginem ſummum, rubeus imum, viridi poſito in medio. In utraque poſitione violaceus omnium maxime refractus, omnium maxime a naturali ſua ſede recedit; quam ob cauſam per parallelifmum tranſeundo refractionibus omnibus correctis, invertitur ſpectrum tranſeundo per albedinem efformatam a conjunctione ſimultanea colorum omnium.

23. Series imaginum *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* in eadem fig. 1. exhibet inverſionem ſpectri longe alia ratione peractam, ubi priſma ex flint immiſſum eſt in aquam. Imago naturalis, quæ ante immiſſum priſma, lateribus inſtrumenti exiſtentibus parallelis, erat alba e regione B, immiſſo priſmate, ſtatim deſcendit ad locum *a*, ubi ut in A color rubeus omnium maxime eminet, violaceus omnium maxime deprimitur.

24. Aperto magis inſtrumento, auctoque idcirco angulo aqueo, aſcendit ſpectrum, & tranſit per locum naturalem in *b*, ſed ibi colores ſuos non amittit. Prius animadvertitur adveniens ad locum marginis ſummi naturalis margo ſummus rubeus, tum ad locum marginis naturalis margo imus violaceus, quod indicat ad locum naturalem advenire prius circulum rubeum, tum viridem, ac demum violaceum.

25. Creſcente adhuc angulo aqueo aſcendit imago ſupra locum naturalem in *c* manente adhuc eodem colorum ordine, ubi jam rubeus magis diſtat a loco naturali, quam vio-

laceus, magis nimirum, quam ille, a ſua naturali directione detortus, tamquam ſi majorem refractionem paſſus eſſet, quam violaceus, quamquam & in aqua is quidem majorem refractionem ſit paſſus, & in vitro, cujus refractionem in eo ſtatu aqua pluſquam correxit, elevato utroque colore pluſquam eos vitrum deprimat, ſed nondum correxit differentiam refractionum inductam ab ipſo vitro, ut idcirco licet violaceus plus deprimatur a vitro, & plus elevetur ab aqua, quam rubeus; adhuc tamen exceſſus elevationis ſupra depreſſionem in violaceo ſit minor, quam in rubeo; quo quidem pacto præcipuum doctrinæ Newtonianæ fundamentum maneat, ſitum in majore violacei refrangibilitate, quam rubei, licet ex combinatione binarum contrariarum refractionum relinquatur major receſſus a directione naturali in colore rubeo, quam in violaceo: quamquam hoc ipſum phœnomenum cum priore imaginis *b* partem aliquam Newtonianæ doctrinæ evertit, ut innui num. 16., & de quo fortaſſe aliquid inferius.

26. Inverſio ſpectri per ulteriorem aperturam fit abeundo ab imagine *c* per *d*, *e*, *f* ad *g*. Primum nimirum in *d* conjungitur rubeus cum viridi, violaceo adhuc depreſſo infra utrumque: tum ipſe rubeus unitur in *e* cum violaceo, eminente viridi jam puro, & orto ex illorum commixtione in parte ima purpureo violaceo: deinde in *e* rubeus in fundo jam habetur purus, violaceo, & viridi prorſus permixtis, ac demum in *f* colores ordine contrario diſpoſiti ſpectrum exhibent prorſus inverſum, ut in C.

27. Re ipſa antequam extremus rubeus uniatur in *d* cum extremo violaceo, poſt illam poſitionem *c* unitur cum ſingulis aliis rubeis, ſingulis aureis, flavis &c., aliis poſt alios, & ubi in *e* rubeus unitur cum viridi, vel in *f* cum eodem viridi violaceus, non eminet in ſummo vertice color ex iis compoſitus, ſed ſimplex aliquis ex aureis in primo caſu, ex indicis in ſecundo: verum ex iis tribus, quos ſolos conſideravimus, diu ſinguli extremos tenent margines, tum alii poſt alios ita conjunguntur, ut primum binarium conjungatur in parte ſuperiore, ſecundum in inferiore, tertium iterum in ſuperiore.

28. Conſideratis ſimul omnibus, in ſummo vertice ſemper eminet unicus puriſſimus ita, ut ad partem ſummam deveniant alii poſt alios ſinguli ex tot rubeis, aureis, flavis &c.: in

in parte autem ima videtur haberi ſemper ſolus violaceus poſtremus, donec ad ipſum rubeus primus adveniat, tum poſt binarium unicum extremi violacei cum extremo rubeo in ipſo fundo videtur haberi unicus ipſe rubeus cæteris binariis conjunctis inter utrumque marginem; licet ob ſummam extremorum ſimplicium debilitatem aliquandiu in fundo appareat purpureus ille vinaceus ortus ex conjunctione margini proxima reliquorum violaceorum cum reliquis rubeis.

29. Ut rem totam mihi animo ſiſtam, concipio in fig. 2. tria fila ſub litteris *m*, *n*, *p*, quorum partes ſint tinctæ omnibus primigeniis coloribus. In filo *m* ii habent ordinem, quem habet ſpectrum ante inverſionem in fig. 1. in A, vel *c*: in filo *p* jam habetur ordo colorum ſpectri inverſi idem, qui in fig. 1. in C, vel *g*. Si filum contrahatur totum ita, ut ſine ulla flexione partes ejus omnes veluti compenetratæ per arctiſſimum ſpatiolum ſimul tranſeant; tum ex parte oppoſita explicentur, & extendantur; id filum exhibebit tranſitum per albedinem B figuræ 1. in inverſione ſpectri. Sed ſi plicetur, ut in *n*, coarctatis quidem ſpatiis, ſed non ſimul conjunctis; exhibebitur ſeries phœnomenorum a ſpectro *c* figuræ 1. ad *g*. Dum extremum punctum intervalli R deſcendit infra ſummum verticem, eminebunt omnium intervallorum puncta ſingula alia poſt alia: manebit autem in fundo extremum punctum intervalli VV, donec conjungatur cum extremo intervalli R; tum ipſo aſcendente intra ſpectrum, hoc ejus vices excipiet: circa illam conjunctionem margo ille imus aliquandiu vinaceum habebit colorem ſaturum, ante quem diutiſſime violaceus purus a rubeis omnibus ſatis remotus, poſt ipſum purus rubeus a violaceis omnibus liber apparebit. Dum autem funiculus ita plicatus invertitur, ſimul itidem contrahitur plurimum, uti ex meis obſervationibus videor deducere ita, ut in media poſitione *n* multo minus ſpatii ejus partes occupent, quam in *m*, & *p*, licet non penitus compenetrentur.

30. Hujuſmodi ſucceſſivam colorum ſuperpoſitionem obſervavi in pluribus priſmatis ex flint, ex ſtraſs Viennenſi, ex compoſitionibus ſimilibus ipſi ſtraſs alibi factis, in quibus omnibus hæc inverſio ſpectri facta eſt cum mora majore, vel minore pro diverſa vitrorum natura, & pro diverſis angulis ejuſdem vitri, ac in iis id ſemper accidit ſupra locum naturalem, uti exhibet figura 1. Eamdem autem moram inverſio-

 nis

nis ſine tranſitu per albedinem obſervavi etiam in pluribus generibus vitrorum communium, ut etiam in crown Anglicano, ſed in iis ſemper inverſio ſpectri cæpit ante adventum ipſius ad locum naturalem, ac deſiit poſt ita, ut in ipſo loco naturali nec unio haberetur colorum omnium, nec ibidem in ſummo ſpectro extaret utervis ex extremis, ſed aliquis ex intermediis. Inverſio ſemper eſt facta eodem ordine, nimirum obtinente ſummum ſpectri verticem poſt rubeum colore aureo, tum flavo, viridi, cæruleo, ac demum violaceo, & ſemper cum puriſſimus, & pulcherrimus viridis emineret, vividiſſimus itidem, ſed admodum tenuis, habebatur in fundo purpureus ille vinaceus, qui oritur e rubeo, & violaceo conjunctis.

31. Adhibui etiam priſmatula ex cryſtallo montana tum ita ſecta, juxta præclariſſimum nuperrimum inventum ſummi viri Taurinenſis Profeſſoris Beccariæ, ut unica, tum ita, ut duplex haberetur refractio. In iis ſemper immiſſo priſmate in vitrometrum parallelis ſuperficiebus terminatum, imago deſcendit, & colores erant ſemper vividi, & lati tam in unica imagine, quam in binis, licet ſuperioris imaginis margo inferior, & inferioris ſuperior conjuncti cum vivido imaginis alterius lumine (neque enim altera imago diſtabat ab altera per totam imaginis amplitudinem ob exiguos priſmatum adhibitorum angulos, & diametrum apparentem imaginis ſolaris ſine helioſtata nimis amplam, cum eo non ſatis contractam) multo minus diſtincti, & aliquando fere penitus confuſi apparerent. Aperto vitrometro aſcendit ſpectrum, & eodem ordine facta eſt inverſio tota multo ante, quam ad locum naturalem deveniretur, dum in vitro communi ea accidit circa locum naturalem, & in flint, ac ſtraſs ſupra ipſum, quod quidem maxime notatu eſt dignum, & magno futurum uſui.

32. Circa inverſionem, & potiſſimum in media ipſa inverſione ſpectri binæ imagines cryſtalli montanæ habuerunt ſemper margines admodum diſtinctos, collecta nimirum ibidem in ipſo margine in admodum tenue ſpatium omni ea colorum vi, quæ in ſolitaria refractione ipſius cryſtalli, ſi ea ſit aliquanto major, ut & diſtantia binarum imaginum ſatis notabilis evadat, per refractionis differentiam diffunditur, & gradatim deſinit ſine certo, ac vivido limite potiſſimum ex parte violacea, ex qua coloratum ſpectrum longiſſima ſerie paullatim deſinit in umbram cæcam.

33.

33. Hæc quidem acciderunt, ubi vitra comparata ſunt cum aqua. Comparando priſma rectilineum ex flint cum mixtilineo expreſſo in fig. 23. diſſertationis, de quo in eadem num. 192., ex vitro communi Bohemico, inverſio ſpectri facta itidem eſt tranſeundo per colorem viridem, ſed eo priſmatis genere imago evadit admodum confuſa ob dilatationem ortam ex curvatura ipſius ſuperficiei, quæ imaginem etiam per rotundum foraminulum tranſmiſſam deformat plurimum, niſi foraminulum ipſum perfecte rotundum ſit, & politiſſimum habeat marginem, quod quidem in rectilineis priſmatis non accidit, in quibus per quadratum etiam, & aſperi marginis exiguum foramen tranſmiſſa imago Solis ſatis rotunda apparet, & diſtincta, cujus phœnomeni ratio facile redditur. Ubi eo priſmate mixtilineo ſum uſus, res mihi minus male ſucceſſit adhibito amplo foramine terminato per rectilineum latus ſatis longum, quo pacto rectilineum lucis ad parietem tranſmiſſæ marginem obtinebam, & utcumque diſtinctum, in quo colorum illa ſucceſſio, & potiſſimum in inverſione ipſorum colorum tranſitus ex altera parte per viridem, ex altera per vinaceum purpureum ſatis evidenter obſervabantur.

34. Poſteaquam mihi innotuit Patris Abat celebris Maſſilienſis Optici ex Minorum Obſervantium familia inventum præclariſſimum priſmatis vitrei habentis angulum mutabilem, conſtat enim binis partibus altera plano-concava, altera plano-convexa congruente convexitate cum concavitate ita, ut dum altera ſuperficies per alteram excurrit, planarum ſuperficierum altera jam magis inclinetur ad alteram, jam minus, curavi plura ejuſmodi priſmata compoſita, quæ imaginem exhibent nitidiſſimam, & diſtinctam, & quotieſcumque compararem diverſa vitra inter ſe, vidi ſemper inverſionem ſpectri factam ita, ut alii colores poſt alios remanerent ſoli in altero extremo, & ſemper ubi in eodem apparebat pulcherrimus viridis, in altero extremo habebatur purpureus ille vinaceus vividiſſimus; ſed ipſa inverſio cæteris paribus abſolvebatur citius, & colores erant minus ampli, quam ubi flint, vel ſtraſs conferebantur cum aqua. Etiam ubi applicabam ad foraminulum tria priſmata Dollondiana, quæ in Anglia coemeram, quorum bina ſunt e crown, & unum e flint, adhibentur autem juxta num. 13. diſſertationis ad uniendos colores, qui quidem per ea tranſpicienti evaneſcunt; in radio ita ad parietem tranſmiſſo

miſſo apparuit ſemper in altero margine color viridis; in altero vinaceus ipſe purpureus.

35. Adhibui etiam vitrometrum cum helioſtata meo, de quo paullo ante mentio eſt facta, qua methodo multo expeditior eſt obſervatio: nam eo rite diſpoſito radius Solis ad certum parietis locum dirigitur ita, ut imago Solis occupet ſemper eamdem poſitionem, a cujus marginibus diſtantiæ ſpectri accipiuntur multo accuratiores, impedito interea omni motu & imaginis, & ſpectri. Imago ipſa minor, & ſolam partem aliquam exhibens ſolaris diſci colores minus permixtos habet, quo pacto etiam in cryſtallo montana binæ imagines vel penitus a ſe invicem ſeparantur, vel obtinentur minus permixtæ. Verum imago ipſa directa evadit languidior, & minus diſtincta. Videri autem poteſt ibidem timendum etiam aliquid e majore effectu diffractionis in lumine tranſeunte prope duplicis foraminuli margines, quæ, neſcio, an etiam eſſe poſſit cauſa tenuis umbræ cujuſdam, quam in imagine directa obſervavi plerumque circa ipſius medium. Neſcio itidem, an inde etiam oriri potuerit diſcrimen aliquod angulorum, ſub quibus iidem colores appellebant ad verticem ſpectri eodem priſmate immiſſo in vitrometrum, & eodem modo ejus lateri applicatum, quod patebit in ſpecimine exiguo plurium obſervationum, quod hic inferius exhibebo, quam quidem rem obſervabo diligentius, & mutatis pluribus circumſtantiis, ubi per Solem licuerit, qui a tribus menſibus jam fere perpetuo, ubicumque interea ſum commoratus, delituit.

36. Illud demum hic monendum omnino eſt, licet evidentiſſime deprehendatur in omnibus hiſce obſervationibus ſucceſſio in appulſu colorum ad ſpectri marginem, & colores ipſi alii poſt alios puriſſimi, ac nitidiſſimi appareant; adhuc tamen ipſum limitem inter binarum ſpecierum colores non niſi admodum craſſa æſtimatione deprehendi poſſe: ita enim rubeus ſenſim degenerat in aureum, ac flavum parum admodum diſcrepantes a ſe invicem, ita hic in viridem, viridis in cæruleum, ac indicum, & violaceus ipſe, qui iis ſuccedit, ita initio inſenſibilis eſt, ut diu hæreat, opus ſit ante, quam quis ſe determinet ad exiſtimandum, mutationem ab altero ad alterum jam eſſe factam. Id quidem etiam Newtono accidit in dividendo ſpectro ad eruendam illam ſuam analogiam colorum cum ſono, qui non ita de limitibus certus, & ſuos, & amico-

corum oculos ad eam rem ſæpius adhibuit. Id ipſum ſemper expertus ſum etiam ipſe & per me ſpectrum aſpiciens, & plures ſimul amicos adhibens. Alii novum colorem jam ortum in illo ſummo vertice arbitrabantur, dum alii adhuc veterem agnoſcerent, ac ſi idem vitrometri continua diductione quemdam colorem ſuboriri cenſeret, obſervato, & ſcripto angulo vitrometri, tum eodem contracto ad obſervationem iterandam; ejuſdem oculi judicio plures obſervationes factæ habebant ſæpe diſcrimen 20, 30, & quandoque etiam 40 minutorum in exhibendo angulo vitrometri debito limiti inter proximos ejuſmodi colores. Quamobrem plures accepi ejuſmodi obſervationes, & inter ipſas medium arithmeticum de more. Sed adhuc ante, quam per longam dierum ſerenorum ſeriem earum ingentem numerum cum pluribus combinationibus inſtituere mihi liceat, nonniſi ſpeciminis loco hic exhibebo determinationes nonnullas, ex quibus tamen evidentiſſime patebunt plura, quæ magno uſui eſſe debent in Optica, & quæ iis propoſitis perſequemur.

§. 2.

Specimen obſervationum, earum in primis, quæ pertinent ad ſucceſſivam colorum congruentiam cum mora in inverſione ſpectri.

37. Priſma, quod in Anglia acceperam, ex flint immiſi in vitrometrum, rite ante explorato & ipſius vitrometri paralleliſmo ad habendum certum numerationis initium, & priſmatis angulo. Hujus anguli chordæ methodo in diſſertatione expoſita num. *186* ad radium 500 obvenerunt iteratis obſervationibus 102, 103, 101 $\frac{1}{2}$, 102, 101, quorum medium 101. *9* exhibet angulum 23°. 31'. Paralleliſmus vitrometri accuratiſſime obvenit in eodem ſemper loco; nam is ſine ulla dubitatione definitur intra unum, vel alterum minutum. Latus priſmatis erat applicatum lateri primo vitrometri excipienti radios ad perpendiculum prope foraminulum feneſtræ ſine helioſtata. Obvenerunt autem hujuſmodi obſervationes, e quibus angulus aquei priſmatis facile invenitur additis ſimul angulo vitrometri, & angulo priſmatis juxta num. diſſertationis *196*.

An-

Angulus priſmatis e flint 23°. 31ʹ Angulus vitrometri.

Correcta refractio rubei primi — — —	25°. 1ʹ.
Correcta refractio violacei poſtremi — —	25. 48.
Rubeus deſiit in vertice — — — —	38. 30.
Cœpit ibidem viridis — — — — —	41. 4.
Deſiit viridis — — — — — —	43. 47.

38. Poſt viridem apparuit cæruleus, ſed ad violaceum deveniri non potuit, cum vitrometrum ſatis aperiri non potuerit: patet autem, quanti colores adhuc fuerint, ubi imago colorata appulit ad locum naturalem, cum oportuerit ab acceſſu rubei ad locum naturalem adhuc aperire vitrometrum per 47ʹ, ut ad locum ſuum violaceus adveniret. Spectri inverſio facta eſt tanto ſupra locum naturalem, ut rubeus in ſummo vertice eſſe non deſierit, niſi poſt alios gradus 13 ½ aperturæ vitrometri ab ejus appulſu ad locum naturalem. Toto intermedio tempore rubeus erat omnium maxime a loco naturali remotus, nimirum ab actione conjuncta vitri, & aquæ maximam omnium refractionem eſt paſſus: facta autem eſt inverſio tam lente, ut a poſtremi rubei deſcenſu infra aureum ad deſcenſum poſtremi viridis interceſſerint plures, quam quinque gradus aperturæ. Quanto plures eſſent, ſi poſſet obſervari, quando primus rubeus incipiat deſcendere infra contiguos rubeos, quod immediate obſervari non poteſt, & ſi haberetur non ſolum apertura vitrometri uſque ad primi violacei aſcenſum, ſed uſque ad poſtremi incipientis emergere ſupra ſibi proximos, quod itidem obſervationem effugit.

39. Cum illo priſmate tota inverſio videri non potuerit deveniendo ad violaceum, ſelecta ſunt priſmata minoris anguli, ut nimirum ipſa inverſio citius fieret ob refractionem minorem, & quidem adhibita ſunt ex flint, ex vitro Bohemico communi, & ex cryſtallo montana ita ſecta, ut duplicem haberet refractionem. Eodem autem pacto ſingulorum latera applicata ſunt primo lateri vitrometri, & radius admiſſus directione ad ſenſum perpendiculari ipſi ſine helioſtata. Diligenter determinati eorum anguli per plures obſervationes, ut in ſuperiore priſmate eſt præſtitum, ac inventi ſunt ii, qui ipſis hic adſcribuntur. Omiſſa hic eſt accuratior determinatio adventus ad locum naturalem in prioribus binis: ea in primo accidit circa aperturam vitrometri graduum 12, in ſecundo circa 10. In tertio accurate eſt notatus appulſus limbi ſupe-

rio-

rioris imaginis utriuſque ad locum naturalem, qui extitit pro imagine ſuperiore aperto vitrometro ad 8°. 51', pro inferiore ad 9°. 25'.

	Apertura vitrometri pro Flint 15°. 32'.	Bohem. 15°. 40'.	Cryſt. 13°. 6'.
Rubeus deſiit in vertice –	19 . 50 .	8 . 27	3 . 55 .
Cæpit ibidem viridis	21 . 0 .	8 . 40	4 . 27 .
Deſiit viridis	23 . 42 .	9 . 11	
Cæpit apparere violaceus	25 . 52 .	11 . 15	6 . 2 .

40. Inverſio facta eſt hic etiam in flint poſt tranſitum per locum naturalem, in communi Bohemico cæpit ante, & deſiit poſt eum appulſum, in cryſtallo eſt abſoluta tota ante appulſum. In hac in utraque imagine iidem apparebant ſimul colores in ſummo, licet ii in margine ſuperiore imaginis inferioris eſſent admodum diluti, commixti nimirum cum albo lumine imaginis primæ, per quam is margo traducebatur. In tota fere inverſione margines colorati in cryſtallo extiterunt tenuiſſimi, & diſtinctiſſimi, qui in reliquis binis erant adhuc ſatis ampli, licet multo arctiores, quam ante inverſionem uſpiam, & multo magis arcti, quam ubi priſmata ſeorſum adhibebantur ſingula: in iis maxime arcta videbatur colorata falx utriuſque marginis, ubi viridis medius eminebat in ſummo, quo caſu in omnibus habebatur in fundo vividiſſimus, & pulcherrimus ille vinaceus purpureus. Limitem inter aureum, & flavum, inter cæruleum, & indicum nunquam determinavi ob nimis exiguum eorum colorum diſcrimen, quod limitem in hac perquiſitione ſenſibus ſubtrahit.

41. Dimenſus ſum & diametrum imaginis naturalis, & diſtantiam a ſe invicem binarum imaginum a cryſtallo tranſmiſſarum per vitrometrum ad locum naturalem. Diameter erat particularum 85, qualium diſtantia vitrometri a pariete 8360, quæ quidem diameter erat eadem in utraque e binis imaginibus a cryſtallo tranſmiſſis: diſtantia autem imaginum a ſe invicem erat partium 13 tam inter ſupremos, quam inter infimos margines, utraque autem apparebat pari lumine radiis pariter inter utramque diviſis. Illæ particulæ 85 in illa diſtantia demptis 6, quæ erat amplitudo foraminuli, exhibent diametrum apparentem Solis 32'. 40'', qualis tum eſſe debuit, & diſtantia particularum 13 exhibet diſtantiam imaginum 5'. 0''.

42. Ut eorum priſmatum qualitates refractivas ſeorſum

 erue-

eruerem, ſingula applicavi immediate ad foraminulum ita, ut radius in ipſas ſuperficies applicatas ingrederetur ad ſenſum perpendicularis: tum vero evadebat diſtantia horizontalis priſmatis a linea verticali, per quam ſpectrum aſcendit, particularum 8555, notabatur autem in pariete per tenuem lineolam tam limbus ſuperior quam inferior ſpectri, & ſtatim remoto priſmate notabantur itidem bini limbi imaginis naturalis. In cryſtallo montana aſſumpti ſunt limbi imaginis ſuperioris, & limbus inferior inferioris. Aderat in pariete linea horizontalis reſpondens foraminulo, & linea verticalis, ambæ diviſæ in biſcentenas ex illis particulis. Hinc facile deinde aſſumi potuerunt limborum diſtantiæ a recta horizontali, acceptis circino diſtantiis a proxima diviſione: porro alter imaginis naturalis limbus erat depreſſus infra horizontalem ipſam, qui notatur ſigno negativo præpoſito. Pro ſingulis priſmatis bini ejuſmodi numeri hic inveniuntur pertinentes ad imaginem naturalem, & bini pro ſpectro, qui in cryſtallo pertinent ad imaginem naturalem; ſed in ea habetur tertius pertinens ad inferiorem marginem inferioris imaginis.

	Diſtantiæ a linea horizontali pro		
Imaginis directæ	Flint 15°. 32',	Bohem. 15°. 40',	Cryſt. 13°. 6'
Limbus inferior	— 69	— 36	— 41
Limbus ſuperior	+ 16	+ 47	+ 45
Spectri			
Limbus infimus			1104
Limbus inferior	1342	1284	1124
Limbus ſuperior	1498	1421	1238.

43. Ex hiſce numeris erui facile poſſunt qualitates refractivæ earum ſubſtantiarum, & quidem erui poſſent etiam diſtractivæ rubei a violaceo; ſed & exigui anguli nimis exiguam refractionum differentiam pariunt, in qua errores exigui obſervationis ipſius ingentem in conſectaria errorem inducunt, & violacei limes æſtimari, meo quidem judicio, ſatis accurate vel ægre poteſt, vel potius omnino non poteſt, uſque adeo protenditur ſenſim extenuatus uſque ad umbram. Majore fortaſſe etiam obſcuritate indigeret ejuſmodi obſervatio, ut nigro panno obductis parietibus, licet ego quidem ſatis omne aliud lumen a conclavi removerim præter illud, quod ab ipſo priſmate, & ab internis machinulæ partibus reflectebatur irregulariter.

44.

44. Eodem priſmate e flint obſervationes alio die inſtitui eaſdem illas, quæ pertinent ad inverſionem imaginis cum hoc ſolo diſcrimine, quod ejus latus non applicavi lateri ipſius vitrometri, ſed baſim collocavi ſupra illius baſim, relictis ita binis priſmatis aqueis, altero inter primum vitrometri latus, & faciem priſmatis æqualem dimidio ipſius priſmatis angulo, alterum inter priſma, & latus vitrometri mobile: tum obtinui ſequentes numeros acceptos de more medios inter plures obſervationes, quæ mihi, & amico mecum æſtimanti eo die obvenerunt minus diſcordes, ut ſæpe intra quatuor, vel quinque minuta conſpirarent. Erant autem hujuſmodi

Angulus priſmatis e flint 15°. 32'	Angulus vitrometri
Rubeus deſiit in vertice — — — — — —	19°. 2'.
Cæpit ibidem viridis — — — — — —	20. 4.
Deſiit viridis — — — — — — —	22. 42.
Cæpit violaceus — — — — — — —	26. 11.

45. Alio autem die adhibui helioſtatam meum, quem ita collocavi inter foraminulum, & parietem, ut imaginis pars per ipſius foraminulum ſecundo tranſmiſſa tangeret ſuperiore ſuo limbo rectam horizontalem, ſiniſtro verticalem, diſtaret autem vitrometri punctum, e quo radius egrediebatur, ab illa rectarum interſectione particulis 5000. Ita collocato helioſtata, & imagine, quæ per feneſtræ foraminulum tranſmittebatur, ita directa ſpeculo identidem inclinato per machinulæ axes, ut foraminulum ipſius ſemper comprehenderet intra ſe; imago tranſmiſſa per hoc ſecundum foraminulum, ſive directa, & naturalis, ſive refracta, & in colores inducta nullum unquam habuit motum inter obſervandum, quod ſi ea æque vivida, ac diſtincta eſſet, commodiſſimum ſane accideret. En numeros eo pertinentes.

Diſtantia	partium
Foraminuli feneſtræ ab interſect. linear. in pariete	8557.
Vitrometri ab eadem	5000.
Diameter foraminuli feneſtræ	6.
Diameter foraminuli helioſtatæ	11.
Diameter imaginis directæ eo tranſmiſſæ	35.

46. Paralleliſmus vitrometri, a cujus obſervatione ſemper exordior, ne, ſi quem motum habuerit machinula me inſcio, in errorem inducar, ſemper eodem mihi rediit ſine ullo diſcrimine ne unius quidem minuti: inveni ſemper indicem adve-

nire 55' ante initium diviſionis, quæ minuta 55 ſemper a gradibus inter obſervandum notatis detraxi ad habendos angulos vitrometri, quos hic exhibeo, & ſupra exhibui.

47. Vitrometri latus fixum diſtabat nonnihil a foramine helioſtatæ, ut imago a prima vitri primi ſuperficie reflexa, directe ad ſenſum rediens ad ipſum foramen, indicaret radii ingreſſum ad ſenſum perpendicularem primæ ſuperficiei. Ac primo quidem obſervationes inſtitui cum aqua ſola ad habendam ejus qualitatem refractivam, & notavi altitudines ſupra horizontalem lineam utriuſque limbi ſpectri aſcendentis ad latus lineæ verticalis

Angulus vitrometri	Limbus infer. rub.	Limbus ſuper. viol.
28°. 0'	921.	987.
32. 0	1126.	1206.
34. 0	1217.	1307.

48. Illæ altitudines circino pluribus vicibus aſſumptæ a diviſione lineæ verticalis proxima, ex parte coloris rubei marginis imi, ex qua margo ipſe eſt multo magis terminatus, atque diſtinctus, congruebant intra unam particulam, ex parte violacea intra paucillimas, adhibito ferme eodem ſemper oculi judicio, ſed violaceorum tenuiſſimorum, & qui jam ſatis diſcerni non poterant, videbantur adhuc multo longius protendi.

49. Reducto iterum vitrometro ad paralleliſmum, immiſſa ſunt in aquam bina priſmata ſuperiora ex flint, & communi Bohemico alterum poſt alterum applicando latus priſmatis ad latus immobile vitrometri, ut radius in ipſum priſma ingrederetur ad perpendiculum indicatum a congruentia imaginis a prima ſuperficie reflexæ: ſpectro deſcendente ad latus lineæ verticalis in pariete notatæ ſunt depreſſiones utriuſque marginis ipſius infra lineam horizontalem, tum aperto inſtrumento appulſus ad locum naturalem in flint, & in utroque ſeries angulorum inverſionis ſpectri, quæ in ſecundo cæpit ante appulſum ad locum naturalem, & deſiit poſt ipſum. Differentiæ maximæ inter plures determinationes angulorum aperto, & clauſo vitrometro uſque ad judicatam coloris mutationem in ſummo ſpectro fuerunt pro flint in fine rubei minutorum 4, in initio viridis uſque ad 40, ubi idcirco ad eliciendum medium ſunt adhibitæ plures, in fine rubei 21, in initio violacei 11: pro vitro communi, ubi citius res peragi-

agitur, obvenerunt differentiæ minores: en obſervationes ipſas.

Depreſſiones infra lineam horizontalem exiſtente ut ſupra
Diſtantia vitrometri ab interſectione linearum - - - 5000.

	Pro imag. directa:	pro Flint 15°. 32':	pro Bohem. 15°. 40'.
Limbi ſuper. rubei	0.	339.	251.
Limbi infer. violacei	35.	393.	292.

	Anguli vitrometri Flint	Bohem.	
Rubeus ad locum naturalem	11°. 22'.		
Violaceus ad locum naturalem	11. 49.		
Rubeus deſiit in vertice	17. 41.	7°. 15'.	
Cæpit viridis	19. 36.	8. 23.	
Deſiit viridis	21. 49.	9. 56.	ad loc. natur.
Cæpit violaceus	26. 3.	13. 45.	

50. Videbimus jam ſequentibus paragraphis, quid ex hiſce obſervationibus, & potiſſimum ex illa mora inverſionis ſpectri deducatur. Alias obſervationes aliis methodis inſtitutas, ſaltem aliquot (earum habeo ingentem numerum) exhibebo fortaſſe inferius.

§. 3.

Animadverſiones nonnullæ in propoſitas obſervationes.

51. SUb ipſum finem paragraphi 1. illud monui, me expectare ſerenorum dierum ſeriem ad habendum ingentem obſervationum numerum, quæ admodum neceſſariæ ſunt ad efformandum certum aliquod, & ſtabile judicium in re tam lubrica, atque difficili, ubi æſtimatione quadam incerta, & craſſa eſt opus, cum alii colores in alios ita ſenſim degenerent, ut circa limites diu hærendum ſit. Tres obſervationes occurrunt ſuperiore paragrapho inſtitutæ eodem priſmate immiſſo in idem vitrometrum, quæ inter ſe non ſatis accurate conveniunt, prima numero 39, ſecunda numero 42, tertia numero 49. Hoc tantum inter ipſas habetur diſcrimen, quod in prima, & tertia obſervatione latus priſmatis erat applicatum lateri vitrometri, adeoque habebatur unicum aquæ priſma ad latus vitrei, in ſecunda erant duo priſmata aquea hinc, & inde a vitreo: at prima diſcrepabat a tertia in eo, quod in

in illa habebatur radius tranſmiſſus per unicum foraminulum in tertia per duo, adhibito nimirum meo helioſtata. Præterea cum diverſis diebus inſtitutæ ſint obſervationes, & in conclavi habente caminum in hyeme, aeris conſtitutio potuit eſſe nonnihil diverſa, & in aqua itidem, uti ſuperius indicavi, fortaſſe diſcrimen aliquod extitit.

52. Ut viderem, an in tranſitu per foramen helioſtatæ ex diffractione habita fuerit inflexio aliqua radiorum ad imaginem directam tendentium verſus ejus margines, contuli inter ſe magnitudines foraminum, & imaginis naturalis, ubi ſimul obtinui, quam partem diametri ſolaris tranſmiſerit helioſtata. Elementa calculi habentur num. 45.

53. Sit enim in fig. 3., ut in 22 diſſertationis CD foramen feneſtræ AB, IK foramen helioſtatæ EF, NO imago in pariete LM efformata a radiis DIN, CKO ſe interſecantibus in T. Ducta ex C recta parallela DN, quæ occurrat in V, & X rectis EF, LM, erunt IV, NX æquales DC, & angulus NTO, qui exprimit partem diametri apparentis comprehenſam ab imagine NO, æqualis angulo OCX. Erit autem CK.CO::KV.OX, & ob angulum CXO proxime rectum radius ad ſinum anguli OCX, ut CO ad OX. Nimirum habebuntur bina theoremata, quæ rem perficiunt. Primo. *Ut diſtantia feneſtræ ab helioſtata ad diſtantiam ejuſdem a pariete, ita ſumma diametrorum foraminum helioſtatæ, & feneſtræ ad ſummam diametrorum imaginis, & foraminis feneſtræ, qua ſecunda diametro detracta a ſumma inventa, invenietur diameter imaginis*. Secundo. *Ut diſtantia feneſtræ a pariete ad ſummam diametrorum imaginis, & foraminis feneſtræ, ita radius ad ſinum partis diametri apparentis Solis incluſæ in imagine*.

54. Adhibitis numeris, qui habentur num. 45., habebitur in primo theoremate 8557 — 5000 = 3557 ad 8557 ita 11 + 6 = 17 ad quartum, qui provenit 41. Demendo ab eo diametrum foraminis feneſtræ = 6, relinquuntur 35 pro diametro imaginis, quæ eſt ipſa obſervata diameter. Quamobrem radii ad marginem imaginis pertinentes non ſunt intorti per diffractionem in ſecundo foramine, licet tenuis umbra, quæ plerumque apparet circa medium foramen juxta num. 35., videatur debere ortum ducere ab aliqua ſaltem exigua inflexione radiorum tranſeuntium per medium. Radii nimirum per

dif-

diffractionem aliquanto plus intorti jam in tanta diſtantia ſenſum effugiunt. Ex ſecundo autem theoremate erit, ut 8557 ad 35 + 6 = 41, ita radius 100000 ad 478 ſinum 16′. 27″, quæ erit pars diametri apparentis Solis comprehenſa ab imagine, nimirum paullo plus, quam dimidia ea diameter.

55. Quoniam radii, qui tendunt ad margines imaginis directæ, nullam flexionem patiuntur in tranſitu per ſecundum foramen, videtur inde conſequi illud, eos radios tranſeundo per vitrum, & aquam debere eodem modo diſſolvi, quo ubi adveniunt ſine helioſtata immediate a primo foraminulo, & diſcrimen, quod habetur inter obſervationem primam, ac tertiam, aliunde repetendum eſſe. Diſcrimen aliquod inter primam, & ſecundam haberi potuit ex diverſa applicatione priſmatis: diſcrimen inter omnes tres, ſed admodum exiguum fortaſſe oriri potuit a diſcrimine in conſtitutione aeris, & in aqua, ſi forte non ex eodem puteo eſt hauſta. Verum id vel totum, vel pene totum videtur debere tribui inclinationi nonnihil diverſæ radii ingredientis, & diverſo diverſis diebus oculorum judicio in incertis limitibus. Prima cauſa non habetur in caſu helioſtatæ, quam ob rem videtur præferenda obſervatio, quæ fit ejus ope: verum in imagine per ipſum tranſmiſſa illud omnino accidit, quod vis luminis eſt minor, uti experienti patebit, cujus quidem & ratio facile redditur. Hinc videtur fieri debuiſſe, ut in ejus uſu rubeus, qui eſt vividiſſimus, deſierit in vertice apparere citius, & violaceus, qui eſt languidiſſimus, cœperit apparere ſerius: nam exigua mutatio anguli incidentiæ in ingreſſu videtur exiguum diſcrimen afferre poſſe in angulo, qui faciat eumdem effectum in ordine ad colorem in vertice apparentem. Sed longior obſervationum ſeries variatis circumſtantiis rem ipſam determinabit multo certius.

56. Quidquid autem ſit de hoc non ita magno diſcrimine inter obſervationes, in iis omnibus illud deprehenditur, conjunctionem colorum omnium nunquam haberi in hiſce ſubſtantiis, nunquam album prodire radium, ſed colores uniri alios poſt alios, ſicuti expoſuimus paragrapho primo, & quidem ſatis longo intervallo anguli variabilis durare inverſionem ſpectri. Videbimus autem inferius quomodo inde inferatur rationem qualitatum diſtractivarum, ſive $\frac{dM}{dm}$ in aliis

colo-

colorum binariis eſſe longe aliam reſpectu ſubſtantiarum refringentium earumdem; unde fiat, ut teleſcopia duplicis objectivi non poſſint devenire ad illam perfectionem, quæ in iis ſperabatur, niſi forte inveniantur ſubſtantiæ, in quibus ea ratio ſit eadem pro omnibus binariis. Inde autem deducemus itidem, relationem colorum ad diviſionem monochordi, quam Newtonus ſibi viſus eſt inveniſſe, non habere locum generaliter in natura, quæ fortaſſe nuſpiam eſt accurata, & quo pacto per plures heterogeneas ſubſtantias, ſive per objectivum triplex multo major ſperari poſſit teleſcopiorum perfectio.

57. Interea comparando inter ſe obſervationes numeri 39, & initium num. 40, patet illud, inverſionem ſpectri factam eſſe in flint poſt appulſum ad locum naturalem, in vitro communi circa ipſum appulſum, in cryſtallo ante ipſum. Inde facile colligitur, rationem qualitatis diſtractivæ ad refractivam eſſe majorem in flint, quam in aqua, fere æqualem in vitro communi, minorem in cryſtallo. Quando enim imago devenit ad locum naturalem, fit æqualis refractio aquæ, & priſmatis immiſſi: quando ea eſt ſupra locum naturalem, refractio aquæ eſt major, ea enim efficit refractionem ſurſum: quando ea eſt infra, refractio aquæ eſt minor: eſt autem diſtractio æqualis in utraque ſubſtantia ibi, ubi fit inverſio ſpectri, quæ nimirum ibi conjunctis coloribus fit nulla, altera alteram corrigente. Quare ubi hæc correctio accidit ſupra, ut in flint, eadem quantitas diſtractionis convenit minori refractioni vitri, quam aquæ; ubi circa locum naturalem, ut in vitro communi, eidem; ubi infra, ut in cryſtallo, majori: adeoque pari refractione prima ſubſtantia plus diſtrahit, quam aqua, ſecunda fere æque, tertia minus. Et id quidem accidet in reliquis omnibus refractionibus exiguis, in quibus rationes decurtationis ſinuum ſunt quam proxime ut decurtationes angulorum; nam in angulis ſatis magnis, qui ad ſatis magnas refractiones requiruntur, poſſunt decurtationes ſinuum eſſe æquales abſque eo, quod decurtationes angulorum æquales ſint, in quo caſu æqualitas diſtractionis non erit conjuncta cum æqualitate refractionis, licet in minoribus angulis earumdem ſubſtantiarum eæ æquales ſint, qua de re fortaſſe nonnihil infra.

58. Inde autem eruitur primo illud, immiſſo in aquam vi-

vitrometri priſmate quovis, & invento loco inverſionis ſpectri, ſtatim conſtare, an id ſubſtantiæ genus ſit aptum ad efformanda objectiva vitra colores conjungentia una cum vitro communi. Si inverſio ſpectri fiat circa naturalem ſitum imaginis; non erit idoneum id genus ſubſtantiæ, ſed referendum erit ad vitra communia. Non poterit per ipſum conjunctum cum vitro communi corrigi differentia refractionis, niſi ipſa refractio corrigatur, adeoque non poterit effici ex ipſis objectivum, quod radios ad axem detorqueat, & imaginem objecti efformet in foco, nec vero detorqueat inæqualiter, ſeparando idcirco radios, & exhibendo ſeriem focorum oblongam cum aliqua confuſione imaginis non colligentis in unico puncto omnes radios heterogeneos egreſſos ex unico objecti puncto. Si autem inverſio fiat multo ſupra, vel multo infra, erit quidem idoneum, verum cum hoc diſcrimine, quod in primo caſu ex ea ſubſtantia debebit fieri lens concava, ex vitro communi convexa, & in ſecundo ex ea ſubſtantia lens convexa, & e vitro communi concava: nam ut radii ab objectivo efformato ex illis lentibus conjunctis colligantur ad efformandam imaginem, debebit prævalere refractio introrſum, quæ fit a lente convexa, refractioni extrorſum, quæ fit a concava, & ſi tanto ſit major, & diſtractio illi reſpondens ſit æqualis diſtractioni reſpondenti refractioni minori lentis concavæ cum toto reſiduo exceſſus alterius refractionis ſupra alteram, diſtractiones contrariæ æquales erunt, & ſe corrigent.

59. Eæ ſubſtantiæ, quæ cum vitro communi conjunctæ poſſunt relicta refractione conjungere binos colores, poſſunt utique idem præſtare ob eamdem rationem etiam cum aqua, verum cum ipſa oportebit uti binis lentibus ex illa alia ſubſtantia, inter quas aqua incluſa ſit, vel addere e vitro quovis laminam tenuem æqualis curvaturæ ex utraque parte, quæ contineat aquam adjacentem alteri lenti, quæ lamina curvaturam debebit habere illam ipſam, quæ debetur lenti aqueæ in externa ſua ſuperficie: nam aqua per ſe ipſam non poteſt ullam habere propriam figuram.

60. Multo autem magis apta erit combinatio materiæ invertentis ſpectrum ſupra cum materia invertente infra locum naturalem, quam utriuslibet cum vitro communi; quia quo majus eſt diſcrimen in ratione qualitatis diſtractivæ ad refractivam, eo minor cavitas requiretur in lente concava, & eo

minus ipſa producet diſtantiam foci lentis convexæ, quæ idcirco eo minorem numerum graduum ſuæ ſphæræ debebit habere pari teleſcopii longitudine, quod quidem errores ortos a ſphæricitate minores reddet. Fieri autem debebit lens concava e priore, convexa e poſteriore materia.

61. Si e binis ſubſtantiis altera multo ſerius, altera vero multo citius ſpectrum invertat; id etiam indicio eſſe poteſt, eas binas conjungi poſſe, niſi diſcrimen proveniat a majore vi refractiva alterius, vel etiam majore angulo: nam uti patet etiam ex ipſis obſervationibus num. 37, & 39, priſma prioris ex eodem flint multo ſerius invertit ſpectrum, quam poſterioris. Oportet nimirum, ut in altera ſubſtantia ratio qualitatis diſtractivæ ad refractivam ſit multo major, quam in altera, quod ope vitrometri determinari poteſt, an accidat, comparando cum aqua tam qualitates refractivas, quam diſtractivas, ſed ea omnia per formulas multo accuratius præſtantur, de quibus applicatis ad ipſum vitrometrum agemus in ſequenti paragrapho.

62. Hic illud adnotabo præterea, ex eo genere obſervationum ſtatim etiam agnoſci, an data quæpiam ſubſtantia ſit aptior, an magis inepta, quam vitrum commune ad communia teleſcopia perficienda per unicum objectivum ſimplex, & ad oculares non compoſitas, uti etiam in hoc teleſcopiorum novorum genere ſimplices adhiberi adhuc ſolent. Quæ ſubſtantiæ ſpectrum invertunt ſupra locum naturalem imaginis, eæ ad ſolitaria objectiva ſunt magis ineptæ; quæ infra, ſunt aptiores, atque id eo magis, quo qualitatem refractivam majorem habuerint, quia pari refractione illæ magis, hæ minus colores diſtrahunt, & major refractiva vis minorem curvaturam requirit ad eamdem foci diſtantiam. Inde vero patet cryſtallos montanas aptiſſimas eſſe ad objectiva ſimplicia, & ad oculares, cum multo minorem habeant diſtractionem pari refractione. Habent autem vim refractivam majorem, quam vitrum commune, quod facile deducitur ex obſervatione numeri 42, & poteſt facile erui etiam comparando qualitates refractivas per vitrometrum, uti patebit itidem in ſequenti paragrapho per formulas ſinuum, ac tangentium accuratas. Verum illud diligenter cavendum in adhibenda ejuſmodi cryſtallo, ut ex priſmate terminato binis pyramidibus, in quod ejuſmodi cryſtallus conformatur a Natura, exſecetur lamina per-

perpendicularis axi ipſius priſmatis, in qua poſitione juxta egregium Beccariæ inventum refractio eſt unica. In aliis poſitionibus refractio duplex turbat diſtinctionem imaginis.

63. Si quis interea vellet rationes a veris non ita remotas conſiderando angulos adhibitos in illis obſervationibus, ut proporticnales ſinubus, habet in diſſertatione num. 168, & 170 hæc theoremata. *Si per bina priſmata habentia angulos exiguos poſitos ordine contrario ita tranſeat radius, ut correcta refractione prodeat cum eadem directione, cum qua advenit; erunt qualitates refractivæ expreſſæ per* $m - 1$, $M - 1$ *in ratione reciproca angulorum refringentium, & viceverſa:* tum *ſi per bina ejuſmodi priſmata ita tranſeant bini radii heterogenei delati ſimul directione eadem communi, ut exeant itidem directione communi, correcta refractionum differentia; erunt qualitates diſtractivæ expreſſæ per* dm, dM *in ratione reciproca angulorum, & viceverſa.*

64. Ex num. 39 angulus cryſtalli erat $13°.6' = 786'$, angulus vitrometri in extinctione refractionis pro imagine ſuperiore $8°.51'$, pro inferiore $9°.25'$, nimirum angulus aquæ, qui per num. 37 æquatur ſummæ angulorum vitrometri, & priſmatis immiſſi, erit pro ſuperiore $21°.57' = 1317'$, pro inferiore $23°.31' = 1411'$. Quare pro priore imagine ponendo m pro aqua, M pro cryſtallo, erit $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1317}{786} = 1.68$, & pro poſteriore $= \frac{1411}{786} = 1.79$, quorum medium 1.73. Ibidem autem in unione colorum, ſive correctione diſtractionis aſſumendo medium inter finem rubei, & initium violacei, habetur pro angulo vitrometri $4°.58'$, adeoque pro angulo aquæ $18°.4' = 1084'$. Quare $\frac{dM}{dm} = \frac{1084}{786} = 1.38$ ratio multo minor prioribus.

65. Ex num. 49 angulus vitri communis Bohemici fuit $15°.40' = 940'$, angulus vitrometri in extinctione refractionis $9°.56'$, adeoque angulus aquæ $25°.36' = 1536'$, & proinde $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1536}{940} = 1.63$. Aſſumendo autem pro extinctione diſtractionis medium inter initium, & finem viridis $9°.9'$, angulus aquæ $24°.49' = 1489$, & proinde $\frac{dM}{dm} = \frac{1489}{940} = 1.58$, qui valor eſt priori proximus.

66. Ex eodem numero 49 angulus flint fuit 15°. 32′ = 932′, angulus vitrometri in extinctione refractionis pro rubeo 11°. 22′, pro violaceo 11°. 49′, adeoque pro radiis mediis 11°. 35′. Hinc angulus aquæ 27°. 7′ = 1627′, & $\frac{M-1}{m-1} = \frac{1627}{932} = 1.74$. Pro extinctione colorum aſſumendo medium inter initium, & finem viridis, habebitur angulus vitrometri 20′. 42′, adeoque angulus aquæ 36°. 14′ = 2174′. Hinc $\frac{dM}{dm} = \frac{2174}{932} = 2.33$ tanto major priore.

67. Hinc obtinentur ſequentes valores pro aqua &

	cryſtallo:	vitro communi:	flint
$\frac{M-1}{m-1}$	1.79	1.63	1.74
$\frac{dM}{dm}$	1.38	1.58	2.33

Ex iis vero collatis reliquis binis ſubſtantiis cum flint habebuntur eæ rationes dividendo numeros pertinentes ad flint per numeros pertinentes ad ipſas, & poſito M pro flint, *m* pro ipſis, erit pro flint, &

	cryſtallo:	vitro communi
$\frac{M-1}{m-1}$	0.97	1.07
$\frac{dM}{dm}$	1.64	1.39

68. Ex ejuſmodi formulis patet, quam idoneæ ſint combinationes utriuſque ſubſtantiæ cum flint; nam juxta num. 83 diſſertationis, ſucceſſus pendet ab inæqualitate fractionum $\frac{M-1}{dM}$, $\frac{m-1}{dm}$, ſive etiam $\frac{M-1}{m-1}$, $\frac{dM}{dm}$, quæ ſi eſſent æquales, abiret focus objectivi compoſiti in infinitum. Verum anguli hic adhibiti multo ſunt majores, quam ut aſſumi poſſint ſinubus proportionales. In diſſertatione exhibitæ ſunt formulæ pro binis priſmatis, ubi radius egrediatur cum eadem inclinatione, cum qua eſt ingreſſus, quo caſu habetur refractio minima: hic proponemus formulas pro caſu, in quo radius ingrediatur in primum e binis priſmatis contiguis ad angulos rectos, quod in pleriſque e ſuperioribus obſervationibus accidit, & facile præſtari poteſt ope vitrometri, uti diximus. Poſſet ea theoria deduci e generaliore cujuſcumque inclinationis radii, & cujuſcumque inclinationis priſmatis ad priſma,

ſed

ſed mihi quidem præplacet illud, ſimpliciores caſus, qui ſoli uſui eſſe poſſunt (expertus enim novi, illas alias inclinationes non niſi ſatis craſſa æſtimatione obtineri poſſe, & uſum quadrantum minorum nihil accurati exhibere, majorum habere ad eam rem applicationem difficillimam) per ſe evolvere ſimpliciore methodo; quam ingenti molimine generales formulas inquirere uſui non futuras, ut ex iis longo ambitu deducantur ea, ad quæ tanto majore compendio devenitur directo itinere.

§. 4.

De refractionibus radii ingredientis ad perpendiculum in primum e binis priſmatis conjunctis cum applicatione ad ſucceſſivam colorum unionem.

69. THeoriam priſmatum applicatam ad caſum minimæ refractionis, & ad angulos exiguos evolvi in diſſertatione §. *6.* a num. 142. Hic agam de caſu, qui occurrit in uſu vitrometri expoſito ſuperioribus paragraphis, in quo applicatur latus priſmatis vitrei ad latus immobile vitrometri, & radius ingrediatur directione perpendiculari ad ipſum latus, quam, ut ſæpius expoſui, indicat reflexio rediens ad ipſum foramen.

70. Ingrediatur in fig. 4. radius DE ad angulos rectos in latus AB anguli refringentis ABC, ut aquæ, vel vitri aere circumdati, per quod tranſcurret irrefractus, & incurret in latus BC alicubi in F, ac pro continuatione itineris per FG, recedet a perpendiculo HFI per rectam FK. Erit angulus incidentiæ HFE æqualis angulo refringenti B, cum uterque ſit complementum ejuſdem EFB, ille ob rectum HFB, hic ob rectum BEF. Angulus KFI erit angulus refractus compoſitus e binis, quorum primus IFG = HFD = B, ſecundus ipſa refractio GFK.

71. Fiat angulus refringens B $= b$, angulus GFK $= r$, eritque e numero ſuperiore angulus refractus IFK $= b + r$. Si autem ſit $m : 1$ ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti in ingreſſu ex aere in ſubſtantiam anguli B, erit ea ratio in egreſſu $1 : m$ ex notiſſimis Dioptricæ principiis, adeoque erit $1 : m :: \text{ſin. } b : \text{ſin. } \overline{b + r}$.

Inde habebuntur pro eo caſu

$$m \text{ ſin. } b = \text{ſin.} \overline{b + r} \qquad m = \frac{\text{ſin.} \overline{b + r}}{\text{ſin.} b}.$$

72. Hæ formulæ inſervient pro vitrometro continente ſolam aquam, ubi ſi A M N C ſit vitrometrum, erit B is, quem exhibet ipſum vitrometrum, & quem in obſervationibus ſuperioris paragraphi appellavimus angulum vitrometri. Per eas uſum habebunt obſervationes numeri 44: eædem autem habebunt locum etiam in obſervationibus numeri 42 habitis per priſmata vitrea applicata eodem modo ad foraminulum. Facile enim e diſtantia foraminuli, & priſmatis a pariete, ac loco radii directi, & refracti in ipſo pariete eruuntur refractiones r ope tangentium, quorum valorum r etiam in ſequentibus uſus occurret.

73. Sint jam in fig. 5. bini anguli refringentes B A C, A C L ordine inverſo poſiti cum latere communi A C, uti accidit in vitrometro A M N L, ubi angulus A eſt priſmatis vitrei applicati lateri fixo A M, A C L angulus aqueus æqualis juxta num. 37. ſummæ binorum internorum, & oppoſitorum, quorum alter B A C priſmatis vitrei, & alter B vitrometri. Incurrat radius D E perpendiculariter in latus A B, per quod tranſibit irrefractus, & incurret in F in latus AC, ubi a recto itinere F Q G deflectet ad F O K recedendo a perpendiculo I F H: ſed in appulſu ad L C in O iterum, relicto recto tramite O K, recedet a perpendiculo H O P per rectam O R. Sit H concurſus mutuus binorum perpendiculorum I F, P O, & S, Q concurſus rectarum O H, O R cum D G.

74. Patet, angulum P O R fore æqualem ſimul binis O Q S, O S Q, quorum primus æquatur G Q R, nimirum refractioni totali radii pro directione D Q G habentis directionem O Q S, ſecundus, cum ſit complementum ad duos rectos anguli E S O æquatur angulo B, qui ob angulos in quadrilineo B E S O rectos ad E, & O, eſt itidem complementum ad duos rectos ipſius E S O. Quare ſi retento valore b pro angulo aquæ, qui eſt ſecundus refringens, dicatur a angulus priſmatis immiſſi primi refringentis, angulus vero vitrometri B, qui eſt $a - b$, fiat $= c$, & angulus P O R poſtremo refractus $= y$, erit $y = c + r = a - b + r$.

75. Primus angulus incidentiæ D F I prorſus ut num. 70, erit

erit æqualis angulo refringenti $A = a$. Primus angulus refractus erit HFO, qui dicatur x, ratio ſinus incidentiæ ad ſinum anguli refracti in tranſitu ex aere ad ſubſtantiam primi anguli ſit $M : 1$, ad ſubſtantiam ſecundi $m : 1$, & erit in tranſitu a prima ad ſecundam $m : M$. Quare erit $m : M :: \text{ſin.}\ a : \text{ſin.}\ x$, adeoque $\text{ſin.}\ x = \frac{M}{m}\ \text{ſin.}\ a$.

76. Secundus angulus incidentiæ erit HOF. Is cum $HFO = x$ eſt complementum ad duos rectos tertii anguli H, cujus itidem complementum ad duos rectos eſt $FCO = b$ ob angulos in quadrilineo HFCO rectos ad F, & O. Quare is erit $b - x$; angulus autem ſecundus refractus eſt $POR = y$. Quare erit $1 : m :: \text{ſin.}\ \overline{b - x} : \text{ſin.}\ y$; adeoque $\text{ſin.}\ y = m\ \text{ſin.}\ \overline{b - x}$.

77. En igitur denominationes, & formulas fundamentales omnium, quæ nobis hic occurrent invenienda, vel demonſtranda.

Angulus primus refringens priſmatis immiſſi — — — a
Angulus ſecundus aquæ — — — — — — — b
Angulus vitrometri — — — — — — — $c = b - a$
Refractio — — — — — — — — — — — r
Angulus primus refractus — — — — — — — x
Angulus ſecundus refractus — — — — — — — y

Formulæ fundamentales

$y = c + r = b - a + r \qquad \text{ſin.}\ x = \frac{M}{m}\ \text{ſin.}\ a \qquad \text{ſin.}\ y = m\ \text{ſin.}\ \overline{b - x}$

78. Ex hiſce formulis facile deducitur formula numeri 71. Si nimirum aqua ſit ſola; tum erit $a = o$, adeoque $c = b$, $y = b + r$, & ex ſecunda formula $a = o$, ac ex tertia $\text{ſin.}\ \overline{b + r} = m\ \text{ſin.}\ b$, ut ibidem. Deducitur autem etiam admodum facile ſolutio plurium problematum, quorum præcipua hic perſtringam. Verum in eorum ſolutione utar pluribus theorematis, quæ ſunt prorſus elementaria, & vel pertinent ad trigonometriam, vel ad methodum differentialem. Hujuſmodi ſunt, quæ ſequuntur.

79. In quovis angulo z exiſtente radio $= 1$, erit $\text{coſ.}\ z^2 = 1 - \text{ſin.}\ z^2$ ac $\frac{\text{ſin.}\ z}{\text{coſ.}\ z} = \text{tang.}\ z$. In quibuſvis binis u, & z erit $\text{ſin.}\ \overline{u \pm z} = \text{ſin.}\ u\ \text{coſ.}\ z \pm \text{coſ.}\ u\ \text{ſin.}\ z$. Patent e trigonometria vulgari.

80.

80. In quovis angulo z erit d ſin. $z =$ coſ. $z\,dz$: patet e num. 160 diſſertationis.

81. In binis quantitatibus u, z quibuſvis eſt $d\,(uz) = z\,du + u\,dz$, & $d\,\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{z\,du - u\,dz}{zz}$. Patet ex num. 30 diſſertationis.

82. Quæratur jam primo angulus b, qui corrigat refractionem, dato a, & datis qualitatibus refractivis expreſſis juxta num. 63 per $M - 1$, $m - 1$, adeoque datis M, m.

83. Ex prima formula fundamentali, facto $r = o$, erit $y = c = \overline{b - a}$, & ex tertia ſin. $\overline{b - a} = m$ ſin. $\overline{b - x}$, ſive (num. 79) ſin. b coſ. a — coſ. b ſin. $a = m$ ſin. b coſ. x — m coſ. b ſin. x, adeoque m ſin. b coſ. x — ſin b coſ. $a = m$ coſ. b ſin. x — coſ. b ſin. a, quod ob m ſin. $x =$ M ſin. a per formulam ſecundam, fiet $=$ M coſ. b ſin. a — coſ. b ſin. a $= (M - 1)$ coſ. b ſin. a. Erit igitur $\frac{\text{ſin.}\,b}{\text{coſ.}\,b}$, ſive (num. 79) tang. $b = \frac{(M - 1)\ \text{ſin.}\,a}{m\ \text{coſ.}\,x - \text{coſ.}\,a}$.

84. Si anguli ſint exigui, evadunt tangentes, & ſinus proxime æquales arcubus exprimentibus angulos, & coſinus radio $= 1$, adeoque $b = \frac{M - 1}{m - 1} \times a$, ſive $\frac{M - 1}{m - 1} = \frac{b}{a}$, qualitates refractivæ reciprocæ angulorum, uti etiam num. 63 habuimus.

85. Ex formula numeri 83 etiam ex majoribus angulis datis a, & b, ac altero e valoribus M, m inveniri facile poteſt alter ex ipſis, quod quidem uſui eſſe poteſt pro obſervationibus numeri 49, ubi ſi ſemel inventus fuerit valor m pro aqua, per ſolos angulos in appulſu imaginis ad locum naturalem habetur valor M pro ſubſtantiis priſmatum immiſſorum in aquam. Verum idem valor M ex angulis, & m inveniri poteſt per obſervationem quamcumque unicam, in qua præterea notetur refractio, quod fiet per problema ſequens.

86. Quæratur ſecundo valor M ex datis m, & a, b, r in unica obſervatione quacumque.

87. Erit ex tertia formula fundamentali ſin. $\overline{b - x} = \frac{1}{m}$ ſin. y, ſive ex prima $= \frac{1}{m}$ ſin. $\overline{b - a + r}$. Datis m, a, b, r,

dabi-

dabitur $b - x$, & dato b, habebitur x, ac ejus ope ex formula 2 habebitur $M = \frac{\text{ſin. } a}{m \text{ ſin. } x}$.

88 Quæratur tertio per binas obſervationes factas priſmate immiſſo, ac notatis angulis vitrometri, & refractionibus uterque valor M, m ſimul. Valor a, & x manet in utraque obſervatione idem nihil mutatus a maiore vel minore apertura vitrometri. Valores b, r, y primæ obſervationis ſint b', r', y' in ſecunda.

89. Pro inveniendo M, multiplicatis in ſecunda, & tertia formula fundamentali primis membris inter ſe, & ſecundis inter ſe, fiet $\text{ſin } x \text{ ſin. } y = M \text{ ſin } a \text{ ſin. } \overline{b - x} = M \text{ ſin. } a \text{ ſin } b$ $\text{coſ. } x - M \text{ ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ ſin. } x$. Quare tranſponendo, & dividendo $\frac{\text{coſ. } x}{\text{ſin. } x} \times M \text{ ſin. } a = \frac{M \text{ ſin. } a \text{ coſ. } b + \text{ſin. } y}{\text{ſin. } b}$, qui valor cum debeat eſſe $= \frac{M \text{ ſin. } a \text{ coſ. } b' + \text{ſin. } y'}{\text{ſin. } b'}$, erit multiplicando, & tranſponendo, $\text{ſin. } b \text{ ſin. } y' - \text{ſin. } b' \text{ ſin. } y = M \text{ ſin. } a \,(\text{ſin. } b' \text{ coſ. } b -$ $\text{coſ. } b' \text{ ſin } b) = M \text{ ſin. } a \text{ ſin. } \overline{b' - b}$ (num. 79), adeoque $M =$ $\frac{\text{ſin. } b \text{ ſin. } y' - \text{ſin } b' \text{ ſin. } y}{\text{ſin. } a \text{ ſin. } \overline{b' - b}}$, ubi $y = b - a + r$, $y' = b' - a + r'$.

90. Pro inveniendo m ex invento M ſic licet progredi. Ex tertia formula fundamentali eſt $\text{ſin. } y = m \text{ ſin. } b \text{ coſ. } x -$ $m \text{ coſ. } b \text{ ſin } x$, ſive cum ex ſecunda ſit $m \text{ ſin. } x = M \text{ ſin. } a$, erit $\text{ſin. } y = m \text{ ſin. } b \text{ coſ. } x - M \text{ coſ. } b \text{ ſin. } a$, adeoque $(\text{ſin. } y$ $+ M \text{ coſ. } b \text{ ſin. } a)^2 = m^2 \text{ ſin. } b^2 \text{ coſ. } x^2$, ſive (num 79) $= m^2$ $\text{ſin. } b^2 - m^2 \text{ ſin. } b^2 \text{ ſin. } x^2 = m^2 \text{ ſin. } b^2 - M^2 \text{ ſin. } a^2 \text{ ſin. } b^2$, nimirum $m^2 = \frac{(\text{ſin. } y + M \text{ coſ. } b \text{ ſin. } a)^2 + M^2 \text{ ſin. } a^2 \text{ ſin. } b^2}{\text{ſin. } b^2}$, ubi licet aſſumere vel valores $b, y = b - a + r$, vel $b', y' = b' - a + r'$.

91. Hoc pacto per duas obſervationes vitrometro factas poteſt haberi ſine ulla alia obſervatione valor M, & m pro illo radiorum genere, pro quo notata ſint loca imaginis directæ, & refractæ in pariete ad eruendas refractiones, & notati anguli vitrometri. Verum hi valores multo facilius inveniuntur ſeorſum ſinguli per ſingulas obſervationes pro ſingulis ſubſtantiis factas, adhibendo formulam numeri 71, vel ſemel invento m pro quodam aquæ genere per unicam obſervationem methodo adhuc admodum ſimplici eruitur M per num. 79.

92. Quæratur quarto, quæ ſit futura differentia refractionum binorum radiorum heterogeneorum ſimul ingredientium ad perpendiculum in primum priſma, poſito quod pro primo radio valores ſint M in primo, m in ſecundo angulo refringente, & pro ſecundo radio $M + dM$, $m + dm$, ſint autem dM, dm quantitates admodum exiguæ reſpectu M, m.

93. In tribus formulis fundamentalibus erit conſtans a, b, c, reliqua omnia habenda erunt pro variabilibus, quorum variationes pendebunt ab ipſis dM, dm, & inveniri poterunt juxta regulas differentiales, valor autem quæſitus erit dr, qui erit ex prima formula $= dy$.

94. Porro ex num. 80 in ſecunda formula coſ. $x\,dx =$ ſin. $a \times \frac{m\,dM - M\,dm}{m^2}$, vel poſito $\frac{m}{M}$ ſin. x pro ſin. a, erit $m\,dx = \frac{m}{M} \times \frac{\text{ſin.}\,x}{\text{coſ.}\,x} \times \frac{m\,dM - M\,dm}{m}$, ſive (num. 79) $=$ tang x $\left(\frac{m\,dM}{M} - dm\right)$.

95. In tertia formula ex eodem num. 79 erit coſ. $y\,dy = dm$ ſin. $\overline{b-x} - m$ coſ. $\overline{b-x}\,dx =$ coſ. $\overline{b-x}\left(dm \times \frac{\text{ſin.}\,\overline{b-x}}{\text{coſ.}\,\overline{b-x}} \times dx - m\,dx\right) =$ coſ. $\overline{b-x}$ (tang. $\overline{b-x}\,dm$ — tang. $x\left(\frac{m\,dM}{M} - dm\right)\Big) = dm$ coſ. $\overline{b-x}$ (tang. $\overline{b-x}$ — tang. $x\left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right)\Big)$.

96. Quare demum valor quæſitus $dr = dy = \frac{dm\,\text{coſ.}\,\overline{b-x}}{\text{coſ.}\,y}$ (tang. $\overline{b-x}$ — tang. $x\left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right)\Big)$.

97. Ibi datis angulis a, b, & valoribus M, m, dM, dm, dabuntur per formulas fundamentales etiam valores x, y, adeoque & hic valor quæſitus dr, quo valore utemur hic ad plures alias perquiſitiones.

98. Quæratur quinto ratio qualitatum diſtractivarum $\frac{dM}{dm}$, data ratione pertinente ad refractivas $\frac{M}{m}$, & angulo, in quo bini colores uniantur. In eo caſu differentia refractionum dr evaneſcit, adeoque fit ejus valor $= o$, quo diviſo per

dm

$\frac{dm\, \text{cof.}\, \overline{b-x}}{\text{cof.}\, y}$, erit tang. $\overline{b-x}$ — tang. $x \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right) = o$, ſive $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang.}\, \overline{b-x}}{\text{tang.}\, x} + 1\right)$. Porro dato a datur x ex formula ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a.

99. Si anguli ſint exigui, evadit $\frac{\text{tang.}\, \overline{b-x}}{\text{tang.}\, x} + 1 = \frac{b-x}{x} + 1 = \frac{b}{x}$, & fit $x = \frac{M}{m} \times a$, adeoque $\frac{dM}{dm} = \frac{b}{a}$, ſive cum M pertineat ad a, & m ad b, qualitates diſtractivæ in ratione reciproca angulorum refringentium, uti alia methodo invenimus in diſſertatione juxta num. 63 pro angulis exiguis. In iis non eſt neceſſarium aliunde noſſe rationem valorum M, m, quæ requiritur in ſuperiore formula pro angulis majoribus. Ea tamen eſt adhuc admodum ſimplex, cum valor x admodum facile inveniatur per logarithmos ex a, & $\frac{M}{m}$, tum etiam $\frac{M}{m} \times \frac{\text{tang.}\, \overline{b-x}}{\text{tang.}\, x}$ itidem admodum expedite. Porro calculus paullo accuratior evadet, ſi pro M, & m pertinentibus ad alterum colorem adhibeatur valor medius $M + \frac{1}{2} dM$, & $m + \frac{1}{2} dm$, ſed ſi differentiæ iſtæ ſint ſatis exiguæ, parum admodum mutabunt valores quæſitos.

100. Quæratur ſexto angulus ſecundus b, in quo colores unientur, datis angulo primo a, & valoribus $\frac{M}{m}$, $\frac{dM}{dm}$. Ex eadem ſuperiore formula $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang}\, \overline{b-x}}{\text{tang.}\, x} + 1\right)$ erit tang. $\overline{b-x} = \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right)$ tang. x, ubi invento x, admodum facile invenietur b. Multo autem facilius in angulis exiguis, in quibus fiet $b = \frac{a\, dM}{dm}$.

101. Cum vero & formularum, quas invenimus, & problematum, quæ ſolvimus, plures admodum notabiles uſus occurrant, evolvemus eorum præcipuos ſeorſum ſingulos ſequentibus paragrahis.

§. 5.

De unione colorum extra caſum refractionis correctæ etiam, ubi ratio qualitatis diſtractivæ ad refractivam ſit eadem in utraque ſubſtantia refringente.

102. Newtonus videtur omnino hunc caſum manifeſto excluſiſſe, & ſane perperam, ut ex hoc paragrapho patebit.

103. Si anguli ſint exigui, & fuerit $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$, ſive, quod eodem redit, $\frac{dM}{M-1} = \frac{dm}{m-1}$, debebunt quidem colores uniri in ipſo appulſu ad locum naturalem, nimirum diſtractio debebit corrigi ibi, ubi corrigitur refractio, videlicet refractio utriuſque e coloribus, ad quos pertinent differentiæ dM, dm, debebit ſimul deſtrui: nam e numero 99 in unione colorum eſt $\frac{dM}{dm} = \frac{b}{a}$, & ex num. 84 in correctione refractionis $\frac{dM}{dm} = \frac{b}{a}$, adeoque idem angulus b conjunctus cum a utrumque ſimul præſtat.

104. At ſi anguli non ſint exigui id nequaquam accidet niſi in unico caſu, quem evolvemus, ſed alius erit angulus b, qui primum effectum præſtet, alius, qui ſecundum, etiam in caſu, in quo $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$. Nam per num. 100 poſito $\frac{M-1}{m-1}$ pro $\frac{dM}{dm}$, erit tang. $\overline{b-x} = (\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1)$ tang. x, & per num. 83 eſt tang. $b = \frac{(M-1)\text{ ſin. } a}{m \text{ coſ. } x - \text{coſ. } a}$.

105. Exhibebunt quidem hæ formulæ eumdem valorem b pro caſu, in quo ſit $M = m$, ſive qualitas refractiva utriuſque ſubſtantiæ eadem, in quo quidem caſu ex utraque æquatione eruetur $b = a$. Nam in prima æquatione fit $\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1 = 1 - 1 = o$, adeoque etiam $b - x = o$, $b = x$, & ob ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. $a =$ ſin. a, fit $x = a$, adeoque $b = a$. In ſecunda vero ob $x = a$, fiet tang. $b = \frac{(M-1)\text{ ſin. } a}{(m-1)\text{ coſ. } a} = \frac{\text{ſin. } a}{\text{coſ. } a}$, (ſive num. 79) = tang. a, adeoque $b = a$. Nimirum anguli refrin-

fringentes ex eadem materia ordine contrario poſiti ſimul corrigunt & refractionem, & diſtractionem: nam inducunt binas oppoſitas ſuperficies parallelas.

106. At poſitis aliis valoribus quibuſcumque inæqualibus pro M, & *m*, valores *b* in iis æquationibus diverſi ſane obvenient, & eo magis diverſi, quo illa ratio magis diſtabit ab æqualitate, & quo major primus angulus accipietur, quod quidem ex ipſis formulis deduci poſſet, ſed multo facilius patebit ponenti numeros quoſvis inæquales pro M, & *m*.

107. Si ponantur numeri paſſim ab Opticis propoſiti pro vitro, & aqua, erit $M = 1 . \frac{1}{2}$, $m = 1 . \frac{1}{3}$, $\frac{M}{m} = \frac{9}{8}$, $\frac{M-1}{m-1} = \frac{3}{2}$. Hinc facto angulo vitri $a = 30°$, ex formula ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a, invenitur $x = 34°. 14'$; adeoque ex formula prima tang. $\overline{b - x} = (\frac{m}{M} \times \frac{M-1}{m-1} - 1)$ tang. x erit $b - x = 12°. 47'$, & $b = 47°. 1'$: at ex formula ſecunda tang. $b = \frac{(M-1) \text{ ſin. } a}{m \text{ coſ. } x - \text{coſ. } a}$ fit $b = 45°. 39'$, qui quidem angulus a priore differt per 22', & corrigit in ea hypotheſi ille diſtractionem, hic refractionem. In eo exemplo inventum quidem eſt diſcrimen, ſed exiguum; at aucto angulo *a* creſcet plurimum. Nam eo facto $= 60$ invenitur *b* ex prima formula $= 85°. 15'$, ex ſecunda $= 114°. 43'$ diſcrimine 29°. 28' immani ſane.

108. Newtono impoſuit fortaſſe illud, quod in ea perquiſitione angulum vitri adhibuit non ita magnum, ne angulus aquæ plus æquo excreſceret, & in angulo non ita magno parum admodum differt angulus corrigens diſtractionem ab angulo emittente radium cum ea directione, cum qua advenit. Et hoc quidem pertinet ad illum errorem Newtoni, quem Clingeſtierna deprehendit juxta num. 10 diſſertationis, & cujus erroris generalem is admodum elegantem exhibuit geometricam demonſtrationem, quæ hic numerica pro ſingularibus caſibus deducta eſt, ſed æque ipſius Newtoni generalem affirmationem evertens, quæ illud requirit, ut ſi ſit $\frac{dM}{dm} = \frac{M-1}{m-1}$, ſive $\frac{dm}{m-1} = \frac{dM}{M-1}$, quantitas eadem in binis ſubſtantiis, debeant colores uniri ibi, ubi refractio corrigitur.

§. 6.

§. 6.

De diverſa in diverſis ſubſtantiis proportione, quam ſervant differentiæ valorum exprimentium rationem ſinuum demonſtrata a ſucceſſiva inverſione ipſius ſpectri, quæ evertit Newtonianam analogiam luminis cum ſono.

109. Si in omnibus ſubſtantiis proportio, quam ſervant differentiæ valorum exprimentium rationem ſinuum pro diverſis coloribus, eſſet eadem, quod quidem requirit Newtoniana analogia luminis cum ſono, deberet dM pertinens ad duos colores ad dM pertinentem ad alios duos habere eamdem rationem in omnibus ſubſtantiis, adeoque eamdem, quam dm pertinens ad illos, ad dm pertinentem ad hos. Quare valor $\frac{dM}{dm}$ eſſet in omnibus colorum binariis idem. An id ita ſe habeat videbimus hic ope formularum paragraphi 4.

110. Ex formula numeri 100, in qua tang. $\overline{b-x} = \left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right)$ tang. x, illud facile eruitur, ſi valor $\frac{dM}{dm}$ ſit idem in omnibus colorum binariis, unionem omnium colorum debere fieri ſimul in angulo ad ſenſum eodem. Si enim valores M, m conveniant radiis rubeis, & dM, dm ſint differentiæ pertinentes ad alium colorem quemvis, dummodo $\frac{dM}{dm}$ ſit ratio eadem pro omnibus, erit itidem pro omnibus dato primo angulo a idem etiam totus valor $\left(\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1\right)$ tang. x, cum nimirum debeat eſſe idem valor x hic adhibitus pertinens ad ipſos rubeos ob ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a. Quare & valor $b - x$ erit idem, & b idem in omnibus. Solum haberi poterit diſcrimen per quam exiguum ortum ex quantitatibus ordinis inferioris ad dM, dm in applicatione methodi differentialis ad eas quantitates non infiniteſimas reipſa, ſed ſatis exiguas, quod tamen perquam exiguum eſſe debet.

111. Cum igitur in vitrometro conjunctio diverſorum colorum non ſit habita in eadem apertura inſtrumenti, vel parum admodum diverſa, ſed in angulis per multos gradus a ſe invicem differentibus; evidens eſt, rationem $\frac{dM}{dm}$ pro diver-

verſis binariis eſſe ſatis diverſam. Quamobrem tota illa analogia diviſionis ſpectri cum monochordo, qua Newtonus ſonorum armoniam traduxit ad colores, omnino debet corruere. Si enim ea proportio haberet locum accurate in una aliqua ſubſtantia, ut in vitro communi, in quo ipſe dimenſiones ſuas cepit, eo ipſo non poſſet eum habere in aliis, quæ per moram lentam exhibent inverſionem ſpectri; adeoque ea non poteſt eſſe generalis quædam naturæ lex, ſed in aliqua particulari ſubſtantia poſſunt ad eam phœnomena accedere caſu quodam. Cum vero is quidem ſit unus e præcipuis fructibus, quos mihi exhibuerunt obſervationes meo vitrometro peractæ, lubet in eo adhuc magis declarando immorari nonnihil.

112. Et quidem exordiendo ab angulis exiguis, in quibus res etiam ſine Geometria, & calculo in oculos incurrit; concipiamus bina priſmata e binis vitrorum generibus, ut in num. 14 diſſertationis, quorum primum commune pro ſingulis gradibus refractionis exiguæ inductæ in colorem rubeum addat minuta 2 pro violaceo, alterum, ut flint, addat. 3. Si exiguus angulus e primo inducat refractionem pro rubeo graduum 6; idem pro violaceo inducet 6°. 12': ſi autem angulus e ſecundo inducat pro rubeo refractionem contrariam = 4°, inducet pro violaceo 4° 12', adeoque remanebunt pro utroque accurate 2°. Sit jam quidam color in medio ſitus, qui Newtono pro vitris communibus, quibus eſt uſus in ejuſmodi perquiſitionibus, eſt viridis ad cæruleum vergens, cui primus ille refringens angulus idcirco addet minutum 1, & inducet in ipſum refractionem 6°. 6'. Si idem eodem pacto eſſet in medio reſpectu ſecundæ ſubſtantiæ, haberet a ſecundo angulo contrariam refractionem 4°. 6'. Quare etiam pro ipſo remaneret refractio accurate 2°. Egrederetur igitur is etiam color ſimul cum rubeo, & violaceo, atque ab iiſdem iis angulis ſimul unirentur, quod quidem valet pro omnibus utcumque diſtantibus a rubeo, quorum differentia ſi in utraque ſubſtantia ad differentiam violacei, & rubei haberet rationem eamdem, utique unitis hiſce duobus unirentur & illi; nam e differentiis proportionalibus, ubi una evaneſcit, reliquæ ſimul omnes evaneſcant neceſſe eſt. Cum igitur ex obſervatione conſtet colores non uniri ſimul omnes, ſed compoſito purpureo vinaceo e rubeo, & violaceo conjunctis eminere viridem, atque alios poſt alios conjungi longa ſerie in ſpectri inverſio-

ne,

ne, oportet ii non eumdem teneant locum reſpectivum in iis ſubſtantiis, & diviſio, quæ differentias valoris m, ſive ſerem valorum dm exhibeat, in aliis ſit alia, nec ita parum diverſa.

113. Nec vero hoc in exiguis tantummodo refringentibus angulis evenire debet, ſed etiam quamproxime in ſatis magnis, cum nimirum res pendeat a differentia refractionis rubei, & violacei, quæ exigua eſt etiam, ubi tota refractio eſt ſatis magna. Ingrediatur in fig. *6.* radius DC in ſuperficiem refringentem ACB, in qua, uti accidit in obſervationibus numeri 42, & 47 radius recedat a perpendiculo, & pro continuatione itineris per CE abeant radii extremi per rectas CF, CH, quivis ex intermediis per CG, & quadrans circuli habentis centrum in C, ac radium quemcumque, occurrat iis directionibus in E, F, G, H, ſuperficiei refringenti in B, rectæ ipſi perpendiculari in N, ducanturque perpendiculares ad CN ſinus EI, FK, GL, HM, tum ad EI perpendiculares FO, GP, HQ, quarum poſtrema occurrat rectæ FK in q, media autem in p.

114. Angulus incidentiæ communis habebit pro menſura arcum NE, anguli refracti habebunt arcus NF, NG, NH, refractiones habebunt arcus EF, EG, EH, ſinus incidentiæ erit EI, ſinus angulorum refractorum erunt FK, GL, HM, productiones ſinuum EO, EP, EQ, quæ ſi arcus EFGH fuerit ita exiguus, ut curvatura ipſius negligi poſſit, erunt proxime proportionales refractionibus EF, EG, EH: ſed ſi is fuerit aliquanto major ita, ut curvatura ſit ſenſibilis, ea proportio locum non habebit. Adhuc tamen etiam ubi tota refractio EH fuerit ingens, differentia refractionis FH erit exigua, adeoque differentiæ refractionum FG, FH erunt quamproxime in eadem ratione rectarum Fp, Fq, ſive ut differentiæ productionum OP, OQ, nimirum ut differentia dm valoris m reſpondens binario CF, CG ad dm reſpondentem binario CF, CH. Cum enim ſit IE.KF::1.m, erit $m = \frac{KF}{IE}$, adeoque illi duo valores dm, ut $\frac{OP}{IE}$ ad $\frac{OQ}{IE}$, ſive ut OP ad OQ. Hinc ſi bini valores dm, ſive OP, OQ in binis ſubſtantiis fuerint ad ſe invicem in eadem ratione; etiam arcus FG, FH erunt in ratione eadem quam proxime: nimirum ſi P fuerit in media recta OQ in utraque ſubſtantia,

erit

erit ad ſenſum etiam G in medio arcu FH, & in magnis etiam refractionibus redibit idem argumentum, quo uſi ſumus num. 112.

115. Porro idem eruitur etiam e formula numeri 71, ubi habetur $m = \frac{\text{ſin.}\,\overline{b+r}}{\text{ſin.}\,b}$, adeoque per num. 80 eſt $dm = \frac{\text{coſ.}\,\overline{b+r}}{\text{ſin.}\,b} \times dr$, exiſtente differentia refractionis dr in ratione dm ob b conſtantem, & conſtantem itidem refractionem r primi coloris, quicumque alius cum ipſo componatur. Sunt enim eæ differentiæ refractionum dr ipſi arcus FG, FH.

116. Si radii CF, CG, CH excipiantur plano ad ſenſum perpendiculari mediæ directioni eorumdem in R, S, T, æquivalebit ea recta ad ſenſum arcui diviſo in eadem ratione, in qua eſt FGH, & erunt etiam RS, RT ad ſenſum ut FG, FH, ſive ut bini illi valores dm. Hinc ſi in ſpectro ita excepto notentur limites colorum; partes ſpectri ita diviſi reſpondentes radiis datorum generum exhibebunt valores dm pertinentes ad omnia binaria diverſorum generum quorumcumque. Si dM in una ſubſtantia ad dm in alia ſubſtantia pro quovis eodem binario habuerit rationem eamdem; etiam dM unius binarii ad dM alterius in priore erit, ut dm illius ad dm hujus in poſteriore: adeoque ſpectrum utriuſque ſubſtantiæ erit diviſum per colorum eorumdem limites proportionaliter. Si autem illa ratio $\frac{dM}{dm}$ non fuerit eadem in quovis binario colorum in utraque ſubſtantia, manifeſto conſequitur, non debere diviſionem ſpectri in utraque ſervare proportionem eamdem. Quare ſi in altera ea diviſio ſit eadem, quæ in monochordo, uti Newtonus affirmat ſe inveniſſe in eo vitro, quo eſt uſus; in altera non erit eadem, ubi illa ratio eadem non ſit.

117. Cum igitur ex obſervationibus vitrometro habitis, quibus habetur conjunctio diverſorum binariorum colorum facta per angulos admodum diverſos, deducatur, rationem $\frac{dM}{dm}$ pro iiſdem binariis non eſſe eamdem in binis ſubſtantiis; manifeſto deducitur illud, quod num. 111 diximus, non poſſe eſſe generalem relationem illam colorum in ſpectro cum tonis muſicis in monochordo, ſed caſu fortuito in aliqua ſub-

ſtantia habebit locum, quin illum habeat in ulla alia colores omnes ſimul non colligente, ubi cum eadem rite conjungatur.

118. Facile deducitur ex iis, quæ diximus, poſſe in ipſam rationem valorum $\frac{dM}{dm}$ pro diverſis colorum binariis inquiri per diviſionem ſpectri; ſi enim in una ſubſtantia dicatur dM pro uno binario, dM' pro alio, & in altera pro iiſdem dm, dm', habebitur ex diviſione ſpectri $\frac{dM}{dM'}$, & $\frac{dm}{dm'}$: dicatur primus valor a, ſecundus b: erit $dM = a dM'$, $dm = b dm'$, adeoque $\frac{dM}{dm} = \frac{a}{b} \times \frac{dM'}{dm'}$. Quare $\frac{dM}{dm} . \frac{dM'}{dm'} :: a . b$.

119. Et quidem id ipſum habet locum non ſolum ubi, ut in ſuperiore figura, radius recedit a perpendiculo, ſed etiam ubi accedit ad ipſum, in quo res accidit paullo aliter. Eum caſum exprimit figura 7. Radius delatus per DCE accedit ad perpendiculum diſtractus per CF, CG, CH. Decurtatio ſinus EO ad differentiam OP, vel OQ non eſt ut $m - 1$ ad m. Eſt enim $m . 1 :: IE . KF$, adeoque $m = \frac{IE}{KF}$, & inde $m - 1 = \frac{IE - KF}{KF} = \frac{EO}{KF}$: pro binario autem CF, CG erit $dm = \frac{IE}{KF} - \frac{IE}{LG} = \frac{IE(LG - KF)}{KF \times LG} = \frac{IE \times Fp}{KF \times LG} = \frac{OP}{mLG}$, & $OP = m dm \times LG$. Quare decurtatio ſinus EO ad differentiam OP, ut $(m - 1)$ KF ad $m dm \times LG$, vel habitis KF, LG pro æqualibus, ut $m - 1$ ad $m dm$, & non ut $m - 1$ ad dm. Adhuc tamen etiam ubi eſſet quamproxime OP ad OQ ut dm primi binarii CF, CG ad dm' ſecundi CF, CH, quia eſſet $OP = m dm \times LG$, & $OQ = m dm' \times MH$, ubi valor m eſt idem, valores LG, MH proxime æquales, & remanet OP ad OQ, ut primum dm ad ſecundum, in qua ipſa ratione remanet proxime FG ad FH, & RS ad RT. Verum hic caſus immediate obſervari non poteſt, nam radius ſi ingrediatur in priſma aqueum, vel vitreum, debet inde etiam egredi, ut abeat ad diſtantiam, in qua colores ſint ſatis remoti, ut menſuræ poſſint rite capi.

120. Notandum autem hic occurrit illud, etiam ubi radii accedant ad perpendiculum, differentiam decurtationis ſinus fore ad decurtationem totalem ut dm ad $m - 1$, ſi radii diver-

verſorum colorum habeant diverſos angulos incidentiæ, & angulum communem refractum. Si nimirum in fig. 6. rubeus, & violaceus adveniant directionibus C F, C H, & ambo refringantur per C E; erit differentia decurtationis ſinus O Q ad decurtationem pro rubeo E O, ut dm ad $m - 1$, quam rationem Newtonus cenſuit generaliter in omnibus ſubſtantiis eſſe, ut 1 ad 27. In hoc ſolo ſenſu accipienda eſt decurtatio ſinus, quam nominavi in diſſertatione num. 6, & ſequentibus, nimirum pro caſu, quo ſinus anguli refracti ſit idem pro utroque radio ita, ut is poſſit aſſumi pro unitate, quo caſu ſinus anguli incidentiæ exprimet valorem m pro rubeo, $m + dm$ pro violaceo. In caſu receſſus a perpendiculo erit productio ponenda pro decurtatione, ratio vero dm ad $m - 1$ exprimit productionem in receſſu, decurtationem in acceſſu, exiſtente communi in primo caſu angulo incidentiæ, in ſecundo angulo refracto.

121. Redeundo ad diviſionem ſpectri, ubi priſma adhibetur in poſitione minimæ refractionis, ibi etiam ex formulis in diſſertatione propoſitis diſtantiæ, quas habent in ſpectro a ſe invicem diverſa colorum binaria, ſunt ut valores dm ad ipſa pertinentes. Formula numeri 160 eſt $dm = \frac{\text{coſ.} \frac{c + r}{2} \times dr}{2 \text{ ſin.} \frac{1}{2} c}$, ubi c eſt angulus priſmatis, r refractio primi coloris, $r + dr$ refractio ſecundi. Si cum eodem illo primo ut cum rubeo componantur colores diverſi ad habenda varia binaria, erit commune $\frac{\text{coſ.} \frac{c + r}{2}}{2 \text{ ſin.} \frac{1}{2} c}$, & remanebunt differentiæ refractionum dr, ut valores dm: ipſis autem differentiis refractionum ſunt proportionales quamproxime diſtantiæ colorum in ſpectro, ubi radius refractus in ſatis magna diſtantia excipiatur plano perpendiculari medio ductui ipſius radii. Tum enim habita pro unico puncto illa exigua parte ſuperficiei priſmatis, ex qua omnes radii egrediuntur, ipſam referet in fig. 7 punctum C, recta C E referet directionem radii incurrentis, E F, E G, E H refractiones, F G, F H differentias refractionum pertinentes ad duo binaria, quibus cum ſint proxime proportionales R S, R T diſtantiæ eorum colorum in ſpectro; erunt itidem eædem diſtantiæ proportionales ipſis dm.

122. Hinc Newtonus rationem ipſam diverſorum dm pertinentium ad initium rubei collatum cum limitibus colorum primigeniorum exquiſivit per diſtantias eorumdem limitum in ſpectro, quam invenit expreſſam ſequentibus numeris ab initio rubei ad initium aurei, flavi, viridis, cærulei, indici, violacei, ac ad finem ipſius violacei $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, 1, exprimente nimirum unitate differentiam dm pertinentem ad initium rubei, & finem violacei, quam ipſam differentiam ſtatuit pro omnibus ſubſtantiis eſſe $\frac{1}{27}$ valoris $m - 1$ pertinentis ad rubeum, reliquis vero intermediis habentibus elegantem analogiam cum diviſione monochordi. Illa quidem numerorum progreſſio non eſt arithmetica, quod nihil aliud indicat, niſi diſtantias limitum eorumdem, ſive amplitudines colorum in ſpectro non eſſe inventas inter ſe æquales: nec ſane video quid faciat ad rem conſideratio diſcriminis ejus ſeriei a progreſſione arithmetica, quod vidi propoſitum in hac perquiſitione inter cauſas errorum, qui remaneant incorrecti in theoria duplicis objectivi.

123. Porro in aſſumendis ex diviſione ſpectri valoribus progreſſionis exprimentis differentias dm, non habentur valores penitus accurati, ne in caſu quidem unicæ refractionis figuræ 6., in qua quidem facile eſt etiam determinare quantitatem erroris. Si enim ducatur chorda FH, quæ occurrat radio CG in X, & rectæ PG productæ in V, radius autem CG producatur tantundem in Y, erit RS ad RT ut FX ad FH, & OP ad OQ ut FV ad FH. Prima ratio eſt diſtantiarum in ſpectro, ſecunda valorum dm, adeoque error conſiſtit in lineola XV, quæ eſt ſecundi ordinis; nam eſt ad XG quamproxime ut GL ad LC ob ſimilia triangula XGV, GCL, in quibus anguli ad G ſunt alter complementum alterius, angulus ad L rectus accurate, ad X quamproxime; & eſt XG ad XH, ut XF ad XY. Tantillus error jure negligendus eſt, ubi a minus accurata diſtinctione limitum multo majores errores inducuntur.

124. Rationem dm ad $m - 1$ in aliis ſubſtantiis eſſe multo majorem, in aliis minorem, id quidem invenit Dollondus; relativam poſitionem in ſpectro non eſſe eandem, adeoque analogiam illam cum monochordo non eſſe proprietatem in-

innatam coloribus, id ex hiſce meis obſervationibus evidenter deducitur, uti oſtendimus, & id ipſum inveniſſet utique is ipſe, ſi diviſiones ſpectri in multis ſubſtantiis ſatis accurate determinaſſet, ſed re ipſa admodum difficile eſt obſervationes ejuſmodi ſatis accurate inſtituere ob admodum incertos limites colorum, quorum alii in alios deſinunt ſenſim *par nuance*, non ſaltu quodam abrupto.

125. Inde fit, ut diſcrimen rationum, quas habent valores *dm* pertinentes ad diverſa colorum binaria in diverſis ſubſtantiis, admodum difficile ſit definire ex ejuſmodi determinatione limitum in ſpectro. Oſtendam quo pacto in id liceat inquirere ope formularum, quas propoſui paragrapho 4, & problematum, quæ ibi ſoluta ſunt, poſtea quam oſtendero, quomodo datis rationibus diverſorum *dm*, ſive poſitionibus colorum in ſpectro inveniri poſſit, qui color debeat remanere ſolus in eo extremo imaginis ſolaris, in quo etiam in inverſione ſpectri unius perſeverat.

126. Interea tamen notabo illud, triplicem hoc in genere haberi Newtoni errorem. Primum theoriæ, quo cenſuit, ſi ratio *dm* ad *m* — 1 ſit conſtans in omnibus ſubſtantiis, debere conjunctionem binorum colorum per eas ſubſtantias ſemper fieri ibi, ubi imago Solis ad locum naturalem redit, egreſſis radiis cum directione, cum qua ingreſſi ſunt, ſive debere corrigi ſimul & diſtractionem, & refractionem: eum errorem primus, quod ſciam, notavit Klingeſtierna, & de eo egimus numero 102. Secundus error facti conſiſtit in eo, quod cenſuerit in omnibus ſubſtantiis rationem valoris *dm* reſpondentis primo rubeo, & poſtremo violaceo ad *m* — 1 rubei primi eſſe eamdem, nimirum 1 ad 27, ex quo errore conjuncto cum primo deſperandum cenſuit de ulteriore perfectione teleſcopii dioptrici, & eum errorem deprehendit Dollondus per experimenta inſtituta in flint, & crown, quibus conjunctis multo perfectiora teleſcopia conſtruxit, & de eo egimus in diſſertatione num. 11, ubi nomen decurtationis intelligi debet juxta num. 120 hujus. Tertius error itidem facti in eo eſt ſitus, quod cenſuerit valores *dm* pertinentes ad diverſa colorum binaria in diverſis ſubſtantiis eſſe conſtanter in eadem ratione illa inducente illam determinatam diviſionem ſpectri per colorum limites, de quo errore hic egimus, quem obſervationes meo vitrometro inſtitutæ, & ſuperius hic traditæ

ditæ in clariſſima, ni fallor, luce collocarunt, qui illud efficit, ut teleſcopia duplicis objectivi eam habere perfectionem non poſſint, quam ii ſperarunt huc uſque, qui de eo argumento egerunt, quos ego viderim, & cujus remedium a triplici objectivo repetendum cenſeo, ut infra videbimus.

127. Cæterum in hiſce tanti viri in argumento, in quo tamdiu, tam diligenter verſatus eſt, in quo tam multa tot ſæculis ante ipſum incognita tanta ſagacitate reperit, tanta diligentia explicavit, tot replicatis lapſibus miſeram humanæ mentis conditionem licet agnoſcere, erroribus in tanto etiam tam claro lumine ſemper obnoxiam.

§. 7.

De determinatione colorum, qui ſimul uniri debeant, & coloris, qui debeat extare ſolus in altero extremo ſpectri, datis angulis, & datis qualitatibus refractivis binarum ſubſtantiarum pertinentibus ad omnes colores.

128. Vidimus paragrapho 1, & 2 colores uniri alios poſt alios, & alios poſt alios eminere ſingulos in ſummo ſpectro in ipſa etiam inverſione ipſius, & in paragrapho ſuperiore vidimus id indicare diverſam in binis ſubſtantiis, quæ ibi adhibentur, ſeriem valorum dm, ſive diverſam ſeriem numerorum exprimentium diſtantias, quas habent ad ſe invicem limites colorum, ſine quo diſcrimine ante inverſionem ſpectri ſemper emineret rubeus, tum ſuccederet unio colorum omnium ſimul cum albedine, ac demum poſt inverſionem ab illo unico angulo peractam emineret violaceus. Videndum nunc, quo pacto data pro utraque ſubſtantia qualitate refractiva omnium colorum, ſive datis pro utraque valoribus m, M, & valoribus omnibus $m + dm$, $M + dM$, determinari poſſit, qui colores a datis quibuſvis angulis refringentibus earumdem uniri debeant, quibus determinatis, determinatur, ubi debeat incipere inverſio ſpectri, quo ordine peragi, ubi deſinere.

129. Aſſumpta pro unitate quavis recta habebuntur rectæ exprimentes m, & M, ac datas quaſvis dm, dM. Exprimat in fig. 8. recta AB differentiam dm reſpondentem colori rubeo, & violaceo in altera ſubſtantia, & BC ipſi perpendicula-

cularis dM reſpondentem alteri, ac detur in utraque diviſio reſpondens ſingulis coloribus intermediis ita, ut A D ſit valor dm reſpondens rubeo, & cuipiam alteri colori, ut initio viridis, ac B d valor dM reſpondens iiſdem in ſecunda, quæ diviſiones juxta num. 116 exprimentdiviſionem ſpectri factam per poſitionem colorum eorumdem in ipſo ſpectro pertinentem ad eas binas ſubſtantias. Ductis perpetuo rectis D E, dE parallelis ipſis B C, B A, earum concurſus E erit ad lineam quamdam continuam, quæ dabitur, data relatione poſitionis omnium punctorum D in recta A B, & omnium d reſpondentium eidem colori in recta D C. Ea autem linea continua exprimet relationem omnium valorum dm pertinentium ad quodvis binarium colorum in prima ſubſtantia ad valores reſpondentes in ſecunda per ſuas abſciſſas A D, & ordinatas D E æquales rectis Bd, quæ reſpondent in ſecunda ſubſtantia rectis A D ſubſtantiæ primæ.

130. Si dm, dM pertinentes ad colorem rubeum, & quemcumque alium eſſent in iis binis ſubſtantiis in eadem conſtanti ratione, in qua ſunt dm, dM pertinentes ad rubeum, & violaceum; linea A E C congrueret cum recta A C; eſſet enim ſemper A D . D E : : A B . B C, adeoque quivis angulus D A E = B A C, & quodvis punctum E ſemper eſſet in recta A C. Sed ſi ea ratio fuerit pro diverſis colorum binariis diverſa, ſive diverſa ratio diviſionis rectarum A B, B C per colores eoſdem; erit E ad curvam quamdam, quæ dabitur, data relatione abſciſſarum ad ordinatas.

131. Quoniam num. 97 differentia refractionis dr binorum colorum, ad quos pertinent dm, dM, eſt $= \frac{dm \text{ cof. } \overline{b-x}}{\text{cof. } y}$ $(\text{tang. } \overline{b-x} - \text{tang. } x \, (\frac{m}{M} \times \frac{dM}{dm} - 1))$, aſſumendo primum rubeum pro primo ex iis duobus coloribus, & dividendo per $\frac{m}{M} \times \frac{\text{cof. } \overline{b-x} \text{ tang. } x}{\text{cof. } y}$ quantitatem, quæ pertinebit ad primum colorem rubeum ſolum, adeoque erit conſtans utcumque mutatis dm, dM, erit ea differentia ut $dm \, (\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang. } x} \times \frac{M}{m} - \frac{dM}{dm} + \frac{M}{m}) = \frac{M\,dm}{m} (\frac{\text{tang. } \overline{b-x}}{\text{tang. } x} + 1) - dM$. Fiat $\frac{M}{m}$

(tang.

$\left(\frac{\text{tang.}\,\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x}+1\right)=P$, eritque ipſa refractionis differentia ut $P\,dm - dM$, ubi quantitas P facile invenitur, datis m, M, angulo b, & angulo a, ex quo per ſecundam formulam numeri 77 fundamentalem $\text{ſin.}\,x=\frac{M}{m}\,\text{ſin.}\,a$ invenitur x, adeoque & $b-x$, & admodum facile totus valor P.

132. Capiatur jam in BC, ſi opus eſt, producta recta BF, quæ ſit ad AB, ut hic valor P ad unitatem, ſive quæ ſit $= AB \times P$, ducaturque AF, quæ occurrat ordinatæ DE productæ, ſi opus eſt, in Q, & recta EQ intercepta inter curvam AEC, & rectam AF exprimet differentiam illam refractionum pertinentium ad primum colorem rubeum, ad quem pertinent m, M, & colorem D, ad quem pertinent differentiæ dm, dM. Erit enim $1 . P :: AB . BF :: AD = dm . DQ = P\,dm$; cumque ſit $DE = dM$, erit $EQ = P\,dm - dM$, ut oportebat.

133. Hinc ſi ulla chorda HI ſit parallela ipſi AF, ducanturque ordinatæ HL, IL; patet in iis angulis a, b, qui exhibuerunt inventum valorem P, debere uniri colores KL. Si enim eæ ipſæ ordinatæ incurrant in rectam AF in R, S, erunt HR, IS æquales, adeoque æquales differentiæ refractionis eorum colorum a refractione primi rubei, & proinde ipſi æqualem habebunt refractionem, & conjungentur in ſpectro.

134. In eo caſu oportebit etiam, habeatur aliqua tangens NM parallela ipſi AF, ad quam deveniret poſitio chordæ HI motu parallelo translatæ verſus ſuum arcum, donec ipſa evaneſcat, abeuntibus punctis H, I ſimul in aliquod extremum punctum M antequam ea directio arcum ipſum relinquat. Ducta inde ordinata MO, facile patet, colorem O fore ſolum in extremo ſpectro, qui omnium maximam verſus eamdem partem habebit differentiam refractionis a rubeo. Patet enim MP fore maximam omnium parallelarum EQ interceptarum inter arcum, & rectam AP, cum quævis QE producta uſque ad tangentem MN debeat evadere æqualis ipſi PM.

135. Si chorda HI digreſſa a contactu M retro regrediatur motu parallelo, determinabit ſuis extremis punctis H, I omnia binaria omnium colorum D, L unitorum ab iis angulis, qui colores ſemper uniti habebuntur, donec alterum extre-

tremum adveniat ad A, vel C. Si adveniat ad utrumque ſimul, quod accidet, ſi punctum F cadat in C; tum in altero ſpectri extremo unientur primus rubeus, & poſtremus violaceus: ſi adveniat prius I ad C, quam H ad A, quod accidet, ubi BF fuerit major, quam BC; tum violaceo B conjuncto cum colore K, rubeus primus A extabit ſolus in altero ſpectri extremo. Si adveniat prius ad A, quam ad C, quod accidet, ubi BF fuerit minor, quam BC, vel valoris negativi; tum extremus violaceus erit in altero ſpectri extremo ſolus, & primus rubeus A erit conjunctus cum aliquo alio, ſi ipſa recta AF occurrat iterum eidem curvæ alicubi, quo caſu congruente H cum A abibit & I in ipſam, ac determinabit colorem L unitum cum primo rubeo, vel ſi ipſa AF nuſquam iterum eidem curvæ occurrerit; in altero extremo ſpectri erit ſolus rubeus exiſtente eo ſolo violaceo in altero.

136. Ut autem ductu quodam continuo incurrat in oculos ſeries omnis phænomenorum, quæ debent accidere, dum paullatim motu itidem continuo creſcit angulus *b* ſecundæ ſubſtantiæ, ut aquæ in vitrometro, manente angulo *a* primæ; notetur, exprimi per AB valorem dm pertinentem ad ſecundam anguli variabilis, per BC valorem dM pertinentem ad primam, ac conſiderentur duo caſus: in primo curva AMC jaceat a chorda AC verſus AB, ut in fig. 8., & 9., in ſecundo ad partes oppoſitas, ut in fig. 10., ut nimirum $\frac{OM}{AO}$ valor $\frac{dM}{dm}$ pertinens ad primum rubeum, & quempiam alium ex intermediis ſit minor in primo caſu, major in ſecundo, quam $\frac{BC}{BA}$ valor pertinens ad primum rubeum, & poſtremum violaceum.

137. Si ducantur in fig. 9., & 10. AD, CE, quæ curvam tangant in A, & C, ac ipſi EC fiat parallela AG; erit, ut facile patet, BD in priore quidem minor, quam BC, & BG major, in poſteriore vero illa major, hæc minor. Quoniam autem eſt $AB . BF :: 1 . P = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang.}\, \overline{b-x}}{\text{tang.}\, x} + 1 \right)$; facile patet mutationes omnes valoris P pendere a mutatione valoris *b*: manent enim M, *m* pertinentes ad primum rubeum in vitro, & in aqua, manet angulus vitri *a*, adeoque

& x ob formulam ſin. $x = \frac{M}{m}$ ſin. a. Si concipiatur $b = o$, quod accideret applicato latere mobili vitrometri lateri priſmatis vitrei ita, ut nulla aqua interjaceret; fiet $\frac{\text{tang.}\,\overline{b - x}}{\text{tang.}\,x} = \frac{\text{tang.} - x}{\text{tang.}\,x} = -1$, adeoque $P = \frac{M}{m}(-1 + 1) = o$, & $BF = o$. Orto b, & perpetuo creſcente, creſcet perpetuo valor P, & cum ipſo recta BF.

138. Quare dum vitrometro aperto, angulus variabilis perpetuo creſcit; initio quidem nulli colores erunt conjuncti, donec punctum F appellat ad punctum D in fig. 9., G in fig. 10., & ejuſmodi conjunctiones habebuntur, dum F excurrit per rectam DG in primo caſu, GD in ſecundo, incipiente inverſione ſpectri in altero e punctis D, G, & deſinente in altero.

139. Nam in primo caſu figuræ 9. in appulſu F ad D evadit AF tangens curvæ in A, tum eam ſecat alicubi in I determinans per ordinatam IL colores L interea conjungendos cum primo rubeo A, & habetur inter A, & I aliqua tangens NM ipſi parallela determinans per ordinatam MO colorem O interea extantem ſolum in ſummo ſpectro, id autem ita, ut puncta I, M exeant ex A, & punctum I quidem peragrata tota curva appellat ad C, appellente F ad ipſum C. Progreſſo F in F' ultra C, jam AF nuſquam iterum occurrit curvæ, adeoque nuſquam habetur I, ſed M progreditur per M', donec abeat in C in ipſo appulſu F' ad G, occurrente interea recta ex C parallela F'A curvæ alicubi in H, & per ordinatam HK determinante colores K conjunctos alios poſt alios cum poſtremo violaceo B.

140. Hinc in eo caſu facta inverſione per incrementum anguli variabilis incipit conjunctio primi rubei, primo quidem cum tota ſerie rubeorum, tum cum reliquis omnibus coloribus, uſque ad poſtremum violaceum, ac interea incipiunt eminere ſoli in ſummo ſpectro omnes rubei, tum aurei, ac flavi, & reliqui omnes alii poſt alios. Remanet autem in imo ſpectro violaceus, donec ad ipſum adveniat primus rubeus, appellentibus F, & I ad C, & conjunctus cum ipſo efficiat vinaceum purpureum: deinde rubeus incipit jam ab omnibus liber eſſe ſolus in ipſo fundo, violaceo etiam po-

ſtre-

ſtremo aſcendente ſupra ipſum. Incipit inverſio ſpectri in appulſu puncti F ad D, & deſinit in appulſu F' ad G ita, ut dum ipſum F percurrit G C, ſit in imo violaceus poſtremus, dum F' percurrit C D, ſit ibi primus rubeus.

141. Patet autem e contrario in hoc caſu, ſi initio angulus variabilis aquæ ſit ita magnus, ut B F evadat major, quam B G, tum perpetuo decreſcat, ſpectrum a poſitione contraria, in qua violaceus erit in ſummo, rubeus in imo, debere inverti per eoſdem gradus ordine contrario, ita nimirum, ut violaceus poſtremus incipiat deſcendere infra præcedentes, & uniatur cum omnibus intermediis, donec deveniat ad rubeum primum, puncto F' appellente ad C, tum infra ipſum deſcendat, ipſo primo rubeo poſt unionem cum eodem poſtremo violaceo ibi factam unito deinde cum omnibus intermediis, donec emergat omnium altiſſimus, ut idcirco in imo ſpectro ſit ſemper rubeus primus, dum F' percurrit G C, tum ſemper violaceus poſtremus, dum F percurrit C D; in ſummo vero ſpectro violaceus primo diſpareat, & ipſi ſuccedant indicus, cæruleus, viridis, ac reliqui ordine eodem retrogrado.

142. At in ſecundo caſu figuræ 10. omnia ſuccedent ordine prorſus contrario: ſi inverſio fiat augendo angulum variabilem, ea incipiet a violaceo poſtremo ſe plicante ſupra ſibi proximos, remanentibus in imo ſpectro, non in ſummo ſolis indico cæruleo viridi &c., donec deveniatur ad rubeum primum: ſi autem ea fiat minuendo angulum; inverſio ipſa incipiet a primo rubeo, remanentibus itidem in imo ſpectro ſolis aureo, flavo, viridi &c, donec deveniatur ad violaceum. Colores extremi puri cum intermedia mixtione purpurei erunt in primo caſu in imo ſpectro, & colores intermedii puri in ſummo, at in ſecundo caſu illi in ſummo, hi in imo.

143. Nam ibi recta A G parallela tangenti E C cadente intra angulum B A C, dum creſcit angulus variabilis incipiet inverſio in appulſu F ad G ab egreſſu punctorum M, H ex C, donec in appulſu F ad C abeat H in A, ac exoriatur I ex eodem C, & percurrat itidem totum arcum C A pergente M motu continuo per M', donec adveniat ad A, & inverſionem abſolvat.

144. In utraque figura ſingula puncta M, I, H percurrunt

runt totam curvam, dum inverſio fit, ſed M quidem durat toto tempore inverſionis, puncta vero I, H orta eodem loco, quo M, duplo citius ſingula abſolvunt motum ſuum orto altero, dum alterum occidit.

145. Facile autem demonſtratur hoc aliud theorema, eum colorem extare ſolum in altero extremo, qui ſi conferatur cum ſibi infinite proximo, & appellentur dm, dM differentiæ valorum m, M pertinentium ad ipſos, ſit $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\,\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x} + 1\right)$. Si enim in fig. 8. ducatur ex H recta HT parallela axi AB, uſque ad IL, & puncta H, I accedant ad M, donec in ipſum recidant, evaneſcente chorda HI; erunt ſemper HT, TI, ut AB ad BF, ut 1 ad $\frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\,\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x} + 1\right)$, quæ poſtremo evadent differentiæ valorum M, m pertinentium ad colores K, L deſinentes in O, adeoque erit ibi $dm \,.\, dM :: 1 \,.\, \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\,\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x} + 1\right)$. Id autem congruit cum formula inventa num. 100 pro ſolutione ejuſdem problematis.

146. Hinc autem patet, inverſionis limites haberi, ubi valores fractionis $\frac{dM}{dm}$, quarum altera pertineat ad primos rubeos inter ſe collatos, altera ad poſtremos violaceos, exhibuerint binos angulos b in formula $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\,\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x} + 1\right)$, intra quos limites continebuntur omnes anguli intermedii b, reſpondentes omnibus intermediis valoribus ejus fractionis.

147. Si linea AMC non habeat curvaturam continuam verſus eamdem partem, ſed ſe retro reflectat, & iterum alicubi tangat, vel ſecet rectam AC; ſinguli appulſus exhibebunt ſingulos alios colores ſimul conjungendos cum primo rubeo, & poſtremo violaceo, & ſi curvatura ſit ejuſmodi, ut recta quæpiam quæcumque ipſi curvæ poſſit occurrere in pluribus punctis; puncta ejuſmodi determinabunt colores totidem uniendos ſimul, ubi recta AF evaſerit parallela illi rectæ.

148. Quod ſi ea curva abiret in rectam AC; patet, utramque tangentem AD, CE, & rectam AG poſteriori parallelam, abituras ſimul in rectam AC, in quam abibunt ſimul omnia puncta curvæ ipſius, adeoque inverſionem ſpectri debere fieri ad ſenſum per conjunctionem omnium colorum ſimul ibi,

ibi, ubi habebitur ſuperior æquatio, pertinentibus ſingulis dm, dM ad primum rubeum, & poſtremum violaceum, adeoque in eo caſu ſimul ad reliqua binaria omnia, juxta num. 110.

149. Superiore numero diximus, unionem omnium colorum in eo caſu debere haberi ſimul ad ſenſum; nam id quidem nequaquam ita ſe haberet ſemper accurate; cum numero 129 pro dm, dM aſſumptæ ſint quantitates non infiniteſimæ, ſed finitæ, nimirum differentiæ pertinentes ad primum rubeum, & poſtremum violaceum, exiguæ quidem, ſed non infinite parvæ, & iis aptatæ ſint methodi infiniteſimales, quæ in ejuſmodi applicatione admittunt errores, ſed eo minores reſpectu ipſarum dm, dM, quo eæ fuerint minores reſpectu M, m. Idcirco ad habendam unionem ſucceſſivam colorum, & colorem extantem ſolum in altero extremo ſpectri, differentia ipſa refractionis dr numero 92, ex qua omnes inſequentes determinationes ſunt ortæ, non eſt accepta $= o$, quod dediſſet ſolam unionem coloris rubei cum illo alio colore, ad quem pertineret $m + dm$, & $M + dM$, ſed conſiderata eſt, ut quædam finita quantitas. Potuiſſent dm, & dM abſciſſa, & ordinata curvæ adhibitæ appellari x, & y, & per calculum conſuetum ope differentiarum dx, & dy ex natura ejus curvæ, quæri colores infinite proximi, & contactus, ut & retenta denominatione dm, dM pro x, & y, potuiſſent per ſolam formularum conſiderationem haberi ea omnia, quæ tradidimus huc uſque; ſed mihi quidem videtur multo aptior conſideratio curvæ cum omnibus mutationibus tangentium, & ſecantium ad ea ipſis non mentis tantummodo, ſed frontis oculis ſiſtenda evidentiſſime, & cum intuitione quadam contemplanda.

150. Hiſce fuſius expoſitis, demum hic adnotabo primo illud: cum in omnibus ſubſtantiis in ipſo §. 2. adhibitis cryſtallo montana, vitro communi Bohemico, flint, aucto aquæ angulo inverſio ſpectri cæperit a rubeo ſe deorſum plicante verſus violaceum ita, ut colores ſinguli puri extiterint alii poſt alios in ſummo ſpectro ii, qui rubeum conſequuntur, aureus, flavus, viridis, ac reliqui uſque ad violaceum ipſum, debere juxta num. 140 haberi caſum primum, curva AMC ingreſſa triangulum BAC, in quo caſu ratio $\frac{dM}{dm}$ eſt major

in

in coloribus extremis, quam in rubeo conjuncto cum quovis medio; unde & illud conſequitur ex num. 121 quemvis determinatum ex coloribus intermediis, ut initium, vel finem viridis, accedere propius ad rubeum in ſpectro earum ſubſtantiarum, quam in ſpectro æquali aquæ.

151. Deinde illud: ſi anguli ſint exigui valorem P fore multo ſimpliciorem, nimirum $= \frac{b}{a}$; nam per num. 99 eſt $\frac{b}{a} = \frac{M}{m} \left(\frac{\text{tang.}\, \overline{b-x}}{\text{tang.}\, x} + x \right)$, qui eſt valor P num. 131. Calculus ita evaderet multo ſimplicior, ſed quo minor eſt angulus, eo citius invertitur ſpectrum, & eo majorem in conſectaria errorem inducit obſervationis error.

152. Demum addam & illud, omnem hanc theoriam æque transferri ad obſervationes peractas ope binorum priſmatum ſeparatorum, quorum alterum habeat angulum fixum, alterum mobilem, quod etiam in priſmate vitreo præſtari poteſt juxta num. 34, ut bina vitra immediate comparentur ad ſe invicem, per quorum priſmatum utrumvis radius tranſeat cum refractione minima omnium, quas in eo habere poteſt. In ſingulis per num. 121 eſt $dm = \frac{\text{coſ.}\, \frac{c+r}{2}}{2\, \text{ſin.}\, \frac{1}{2} c} \times dr$, adeoque ſi eæ litteræ retineantur pro ſubſtantia anguli variabilis, & majuſculæ pro altera, erit tota differentia refractionis ex utroque priſmate ſimul $dr - dR = \frac{2\, \text{ſin.}\, \frac{1}{2} c}{\text{coſ.}\, \frac{c+r}{2}} \times dm - \frac{2\, \text{ſin.}\, \frac{1}{2} C}{\text{coſ.}\, \frac{C+R}{2}} \times dM = \frac{2\, \text{ſin.}\, \frac{1}{2} C}{\text{coſ.}\, \frac{C+R}{2}} \left(\frac{\text{coſ.}\, \frac{C+R}{2}}{\text{coſ.}\, \frac{c+r}{2}} \times \frac{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} c}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} C} \times dm - dM \right)$, adeoque eadem methodo numeri 131 ea differentia, ut valor hac parentheſi incluſus, ac $P = \frac{\text{coſ.}\, \frac{C+R}{2}}{\text{coſ.}\, \frac{c+r}{2}} \times \frac{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} c}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} C}$, ubi C, c ſunt anguli priſmatum, R, r refractiones eruendæ ex immediata obſervatione, vel ex formula $m = \frac{\text{ſin.}\, \frac{c+r}{2}}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2} c}$, ex datis m, M, C, c.

§. 8.

§. 8.

De Methodo determinandi proxime curvam exhibentem omnes rationes $\frac{dM}{dm}$ qualitatum diſtractivarum ex aliquot obſervationibus angulorum, in quibus dati colores extant ſoli in inverſione ſpectri.

153. HÆc perquiſitio eſt inverſa ejus, quam ſuperiore §. habuimus. Ibi ex data relatione in fig. 8. rectarum AD, DE exprimentium valores dm, dM, quæ determinat curvam AMC inquiſivimus in inverſionem ſpectri, determinando, qui color debeat extare ſolus in altero extremo ipſius ſpectri in dato angulo priſmatis variabilis, combinando cum angulo conſtanti priſmatis alterius. Hic e contrario datis aliquot obſervationibus ejus anguli cum colore, quem is relinquit ſolum in eo extremo, inquiritur in ipſam curvam, quæ exhibeat rationem valorum eorumdem.

154. Ea perquiſitio eſt præcipuus omnis hujuſce tractationis fructus, & in eo ſitam eſſe arbitror maximam utilitatem methodi adhibentis angulum variabilem unius ſubſtantiæ cum conſtanti alterius, cujus nimirum ope licebit procedere ad unionem colorum plurium per totidem lentes ex totidem ſubſtantiis elaboratas. Valores dm, dM poſſunt inveſtigari immediate ſaltem pro colorum limitibus juxta num. 118 per ipſam determinationem diviſionis ſpectri factæ per eoſdem limites in utraque ſubſtantia, ſed cum ii limites ipſi ſint admodum incerti juxta num. 124, admodum difficile eſt eos valores ita accurate definire, ut inevitabilis obſervationis error in diſcrimine diviſionis haud ita magno perquiſitionem omnem penitus non evertat.

155. Multo magis idoneam cenſeo methodum, quam hic exponam, & multo minus pernicioſos eſſe errorculos, qui hic etiam committuntur ob incertos limites colorum eminentium in ſummo ſpectro, dum id invertitur; licet in hac methodo debeat aſſumi ut cognita poſitio colorum in ſpectro ipſo alterius e binis ſubſtantiis, qua aſſumpta docebimus, quo pacto invenire liceat, ſi minus accurate, ſaltem quamproxime poſitionem in ſpectro alterius, ubi ſi quid erratum fuerit in aſſumenda priore illa poſitione ex immediatis dimen-

menſionibus ſpectri, id nihil ad ſenſum influat in rationem $\frac{dM}{dm}$, inducto ſimili errore in alterum etiam ex iis, quod quæritur ex altero non ita bene aſſumpto.

156. Methodus autem ejuſmodi perquiſitionis hæc eſſe poteſt. Sint in fig. 11. ABC puncta eadem, quæ in præcedentibus, ac pertineant in ſubſtantia anguli variabilis, ut in aqua O, O', O'' &c. ad limites colorum eos, quibus extantibus ſolis in altero ſpectri extremo notati ſint anguli ipſi. Si concipiatur tangens MN occurrens axi AB in N, eique parallela AF; dabitur ex obſervatione ratio AB ad BF, quæ per num. 131 eſt, ut 1 ad $\frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\,\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x}+1\right)$, qui valor facile invenitur juxta num. eumdem 131, adeoque dabitur ratio ſubtangentis NO ad ordinatam OM, ſive directio tangentis.

157. Quare problema huc reducetur. Datis pluribus abſciſſis AO, AO' &c. invenire curvam, quæ egreſſa ex A, ordinatis OM, OM' &c. occurrat in angulis datis alicubi in M, M' &c. Quod ſi etiam detur ratio AB ad BC ex conjunctione coloris rubei primi cum poſtremo violaceo, quam exhibere videtur angulus inducens vividiſſimum purpureum ortum in altero extremo ex unione plurimorum rubeorum cum pluribus violaceis; nam primum rubeum, & extremum violaceum diſcernere ſeorſum ſingulos, dum alter ibi ſuccedit alteri, tenuitas non ſinit; accedet inde nova determinatio curvæ, ut nimirum debeat deſinere in datum punctum C.

158. Ejuſmodi determinatio fieri poterit eadem methodo, quæ adhiberi ſolet pro interpollationibus. Fiat quævis abſciſſa $AO = x$, & ordinata $AM = y$, & ex iis, quæ demonſtrata ſunt num. 145, quæ congruunt cum notiſſima methodo adhibendi calculum differentialem pro inveniendis tangentibus curvarum, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{OM}{ON} = \frac{BF}{BA} = P = \frac{M}{m}\left(\frac{\text{tang.}\,\overline{b-x}}{\text{tang.}\,x}+1\right)$, qui valor dabitur pro ſingulis ordinatis.

159. Fiat jam æquatio ad curvam $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c. aſſumendo tot terminos, quot habentur ordinatæ ſecantes curvam in iis datis angulis. In ea æquatione poſito $x = o$, erit $y = o$, adeoque curva ipſa tranſibit per A. Differentiando autem habebitur $dy = A\,dx + 2Bx\,dx + 3Cx^2\,dx$ &c., adeoque $A + 2Bx + 3Cx^2$ &c. $= \frac{dy}{dx}$. Sint $AO = q$,

AO'

AO' $= q'$ &c., & valores P, reſpondentes ordinatis OM, O'M' &c. ſint p, p' &c., quibus erunt æquales valores $\frac{dy}{dx}$ pertinentes ad ipſas, adeoque habebuntur ſequentes æquationes.

$$A + 2q\,B + 3q^2\,C \text{ \&c.} = p$$
$$A + 2q'\,B + 3q'^2\,C \text{ \&c.} = p'$$
$$A + 2q''\,B + 3q''^2\,C \text{ \&c.} = p''$$

160. Ex iis invenientur A, B, C &c prorſus eodem pacto, quo ubi quæritur curva, quæ tranſeat per data puncta, inveniuntur valores iidem ex datis totidem x, & y, nimirum per totidem æquationes primi gradus, quot ſunt ipſæ A, B, C: iis autem inventis habebitur æquatio ad curvam quæſitam.

161. Si detur poſtrema ordinata BC, & ea fiat $= u$, ac AB $= t$, accedet ſuperioribus æquationibus æquatio formæ parum diverſæ $tA + t^2 B + t^3 C$ &c. $= u$, & numerus terminorum erit augendus unitate, ut æquetur numero æquationum, per quas determinandi ſunt ipſorum coefficientes. Si ea poſtrema ordinata non detur, inventa æquatione ad curvam per ſolas ordinatas occurrentes ipſi in datis angulis, invenietur ex ipſa æquatione $u = At + Bt^2 + Ct^3$ &c.

162. Ex eadem invenietur quævis alia ordinata y reſpondens cuivis abſciſſæ x, & cum illa exprimat dM ſubſtantiæ anguli conſtantis, hæc dm ſubſtantiæ anguli variabilis pro primo rubeo combinato cum colore, ad quem pertinet extremum punctum ejus abſciſſæ, habebitur valor $\frac{dM}{dm}$ reſpondens binario cuivis continenti primum rubeum cum illo colore alio quovis.

163. Si pro diviſione ſpectri AB reſpondentis angulo variabili aſſumeretur ut data diviſio ſpectri BC reſpondentis angulo conſtanti; ſatis eſſet aſſumere pro x rectas CD, pro y DM, & omnia eodem modo procederent facta tantummodo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P}$. Tum enim eſſet $\frac{dy}{dx} = \frac{ON}{OM} = \frac{AB}{BF} = \frac{1}{P}$. Facto $\frac{1}{P} = p$, & CD $= q$, redirent omnia, quæ ſupra.

164. Ubi adhibetur vitrometrum, poſſet paullo diligentius inquiri ſemel in diviſionem ſpectri exhibiti a ſatis magno angulo priſmatis aquei, & adhiberi pro diviſione rectæ AB juxta primam methodum, vel poſſet accipi pro ſatis proxime de-

determinata diviſio, quam pro vitro communi Newtonus propoſuit juxta num. 122, & ejus ope adhibita ſecunda methodo erui diviſio ſpectri aquei, cum quo reliqua ſpectra deinde componerentur.

165. Hoc pacto ſatis proxime obtineretur diſcrimen rationis $\frac{dM}{dm}$ pertinentis ad primum rubeum, & poſtremum violaceum a ratione pertinente ad ipſum primum rubeum, & colorem medium quempiam, ut initium, vel finem viridis. Si ea diſcrimina pro omnibus colorum binariis eſſent non ita exigua in omnibus plurium ſubſtantiarum binariis, nullum ex iis binariis ſubſtantiarum poſſet unire colores plures quam duos ope duplicis objectivi; poſſent tamen adhiberi plures lentes conjunctæ e ſingulis ſubſtantiis ſingulæ ad eam rem præſtandam, de qua re agemus ſequenti paragrapho. Subſtantiæ ad eam rem idoneæ omnino eſſe debent vitrum commune, flint, & aqua; cum adhibitis binis ex iis quibuſque juxta § 2. inverſio ſpectri facta ſit per moram notabilem, non ſimul tranſeundo per colorem album.

§. 9.

De unione plurium colorum per objectivum compoſitum e pluribus lentibus.

166. IN diſſertatione §. 4. propoſuimus formulam pro correctione erroris orti a diverſa refrangibilitate radiorum methodo Dollondiana per duplex objectivum, quæ quidem uniret omnes colores ſimul; ſi valor $\frac{dM}{dm}$ in iis ſubſtantiis eſſet idem pro omnibus colorum binariis, qui cum pro aliis ſit alius; ſatis patet eam non conjungere, niſi illud binarium ſolum, cujus valor $\frac{dM}{dm}$ adhibetur. Verum ſi plures adhibeantur lentes ex pluribus ſubſtantiis, poterunt uniri colores totidem, quot lentes adhibebuntur.

167. Si radii ſphæricitatum pro prima lente ſint a, b, pro ſecunda a', b', pro tertia a'', b'' &c., & ubique juxta num. 55. diſſertationis $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, diſtantia foci omnium lentium

tium ſimul R, rationes autem ſinuum pro primo e radiis generum uniendorum ſint M, M', M'' &c., ac pro colore primo, & ſecundo ſit $\frac{dm'}{dm} = h'$ $\frac{dm''}{dm} = h''$ &c., pro primo, & tertio ſint k', k'' &c., pro primo, & quarto l', l'' &c., erit per num. 58 ipſius diſſertationis $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''} + \frac{m'''-1}{f'''}$ &c. $+ \frac{1}{p}$; adeoque ad conſervandam eamdem foci communis diſtantiam in iis tribus coloribus debebunt haberi æquationes $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} + \frac{dm'''}{f'''}$ &c. $= o$ tam ubi per ipſas dm, dm', dm'', dm''' exprimantur differentiæ debitæ colori primo, & ſecundo, quam primo & tertio, primo, & quarto &c., nimirum $\frac{dm}{f} + \frac{h'dm}{f'} + \frac{h''dm}{f''} + \frac{h'''dm}{f'''}$ &c. $= o$; $\frac{dm}{f} + \frac{k'dm}{f'} + \frac{k''dm}{f''} + \frac{k'''dm}{f'''} = o$; $\frac{dm}{f} + \frac{l'dm}{f'} + \frac{l''dm}{f''} + \frac{l'''dm}{f'''}$ &c. $= o$, ſive $\frac{1}{f} + \frac{h'}{f'} + \frac{h''}{f''} + \frac{h'''}{f'''}$ &c. $= o$; $\frac{1}{f} + \frac{k'}{f'} + \frac{k''}{f''} + \frac{k'''}{f'''}$ &c. $= o$; $\frac{1}{f} + \frac{l'}{f'} + \frac{l''}{f''} + \frac{l'''}{f'''}$ &c. $= o$.

168. Satis patet, ope earum æquationum valores omnes f', f'', f''' &c. reduci poſſe ad f, ſive facto $f = 1$, inveniri omnes ipſorum valores, relicta indeterminata ratione a ad b in quovis valore $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ pro corrigendo errore figuræ ſphæricæ, & pro aliis uſibus, quæ relationes ita determinandæ, vel ad arbitrium aſſumendæ erunt totidem, quot ſunt f. In diſſertatione, in qua binas lentes conjunctas conſideravimus, uſi ſumus altera ex iis ad corrigendum errorem figuræ ſphæricæ pro radiis mediis, altera ad dandam lentibus ipſis formam commodiorem. Quo vero plures ſunt lentes, eo ad plura officia eædem indeterminationes poterunt adhiberi.

169. Illud autem hic etiam oportebit cavere, quod ibidem cavimus, ne nimirum ſphæricitatum radii proveniant aut imaginarii, aut nimis exigui, & ne ejuſmodi ſint relationes valorum $m - 1$ ad dm, ut focus communis radiorum parallelorum in immenſum recedat, quo caſu formulæ nulli uſui eſſe poſſunt.

170. Omiſſa generali hac conſideratione perſequemur ſy-

ſtema ſimpliciſſimum lentium trium, quæ conjungant colores extremos ambos cum medio quopiam, ut cum altero extremo viridis, vel illo ipſo, qui in una e ſubſtantiis erit quamproxime in medio ſpectro: tum enim unio debebit fieri ejuſmodi, ut reliquorum diſtantia ab ipſis ſenſum omnem effugiat; cum enim unitis binis extremis per majoris etiam anguli priſmata jam craſſitudine ſpectri plurimum imminuta, medii parum admodum exſtent; unitis tribus, diſtantia reliquorum tanto minor effecta, videtur non debere ſub ſenſus cadere. Habebitur illud diſcrimen inter unionem trium, ac duorum, quod inter oſculum, ac contactum in Geometria. Si binæ interſectiones circuli cum curva coeant, contactum efficiunt: concurſus trium exhibet oſculum, in quo arcus curvæ infiniteſimus in infinitum magis accedit ad circuli arcum, quam in puro contactu, uti jam olim demonſtravi in mea diſſertatione de circulis oſculatoribus.

171. Accedit, quod in ſyſtemate ejuſmodi trium lentium poterit adhiberi aqua incluſa binis lentibus vitreis, cum e tribus indeterminationibus, quæ remanent in relationibus trium a ad b, poſſint aſſumi binæ pro efficiendo $b = a'$, & $b' = a''$, relicta tertia pro correctione erroris figuræ ſphæricæ, quo pacto quatuor tantum ſuperficies, ſive binæ lentes erunt elaborandæ infuſa aqua inter ipſas annulo incluſas ingenti ſane compendio; dummodo numeri ad vitra adhibenda pertinentes exhibeant ea, quæ num. *169* neceſſaria eſſe monuimus.

172. In eodem ſyſtemate habebuntur ex num. 159 æquationes binæ $\frac{1}{f} + \frac{h'}{f'} + \frac{h''}{f''} = o$, $\frac{1}{f} + \frac{k'}{f'} + \frac{k''}{f''} = o$, adeoque $\frac{h'}{f'} + \frac{h''}{f''} = \frac{k'}{f'} + \frac{k''}{f''}$, & hinc $\frac{1}{f''} = -\frac{h'-k'}{h''-k''} \times \frac{1}{f'}$, vel $\frac{1}{f'} = -\frac{h''-k''}{h'-k'} \times \frac{1}{f''}$. Subſtitutis hiſce valoribus in prima æquatione fiet $\frac{1}{f} + (h' + h'' \times \frac{k'-h'}{h''-k''})\, \frac{1}{f'} = o$, ſive $\frac{1}{f} = -\frac{h'h''-h'k''+h''k'-h'h''}{h''-k'} \times \frac{1}{f'} = \frac{h'k''-h''k'}{h''-k''} \times \frac{1}{f'} = -\frac{h'k''-h''k'}{h'-k'} \times \frac{1}{f''}$. Quare habebuntur $\frac{1}{f'} = \frac{h''-k''}{h'k''-h''k'} \times \frac{1}{f}$; $\frac{1}{f''} = -\frac{h'-k'}{h'k''-h''k'} \times \frac{1}{f}$.

173. Eæ formulæ ſunt admodum elegantes, & ſane ſimpli-

plices, ut etiam eſt admodum elegans ratio $f' . f'' :: h' - k' . h'' - k''$, ubi f', & f'' ſunt juxta num. 82 diſſertationis dimidia radiorum ſphæricitatis lentium iſoſceliarum æquivalentium lenti ſecundæ, & tertiæ; cum facto $a = b$ ſit ibi $\frac{1}{f} = \frac{2}{a}$, adeoque $f = \frac{1}{2} a$.

174. Poſſet inquiri in haſce relationes valorum f, f', f'' etiam quærendo relationes trium angulorum e tribus ſubſtantiis, quæ uniri debent ad efformandum objectivum uniens colores extremos cum medio, ope duorum priſmatum anguli variabilis, qui tres anguli ſi eſſent exigui, eſſent ut valores $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, lentes enim ubi a radio permeantur, æquivalent priſmatis habentibus angulos æquales iis, quos ibi continent tangentes arcuum tranſeuntium per axem, & ii anguli in quibuſvis exiguis datis diſtantiis ab axe ſunt in ratione reciproca radiorum curvaturæ: in majoribus autem angulis adhibita theoria aliquanto ſublimiore, eodem deveniri poſſet. Quin idem obtineri poſſet per theoriam adhuc complicatiorem comparando ſingula priſmata e tribus ſubſtantiis adhibendis habentia angulos conſtantes cum aliis binis e binis aliis ſubſtantiis habentibus angulos variabiles, quod multo commodius eſſet; nam priſmatula cum angulo conſtante facile fiunt, cum variabili multo ſane difficilius. Verum ſi anguli ſint exigui, colores difficilius ſub ſenſum cadunt; ſi majores, theoria eſt multo complicatior, quamobrem eam perquiſitionem hic omittam, alibi aliquando fortaſſe, ubi licuerit per otium, & valetudinem evoluturus.

175. Determinata relatione trium valorum f ad ſe invicem, facile patet, quid præſtandum ſit, ut corrigatur ſolus error diverſæ refrangibilitatis pro iis tribus coloribus, aſſumendo nimirum ad arbitrium tres relationes a ad b, quo pacto lentes etiam iſoſceliæ adhiberi poſſent, quarum radii ſint in eadem ratione valorum f. Communis autem diſtantia foci R habebitur per formulam $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''} + \frac{1}{p}$, & poſitis pro $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$ ſuis valoribus erit $\frac{1}{R} = \frac{1}{f}$ $\left(m - 1 + \frac{(m'-1)(h''-k'') + (m''-1)(h'-k')}{h'k'' - h''k'}\right) + \frac{1}{p}$, in

quo

quo valore coefficiens primæ partis incluſus parentheſi debet non eſſe $= o$, ut formula uſui eſſe poſſit.

176. Si aqua debeat includi inter binas lentes, oportebit, ſit $b = a'$, & $b' = a''$, & adhuc remanebit una indeterminatio pro corrigendo errore figuræ ſphæricæ radiorum mediorum. Hinc ob $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, erit $\frac{1}{f'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a''}$; cumque ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ſit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f}$, poſito $f = 1$, erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, & $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a''} - 1$: cum vero ſit etiam $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$, poſitis pro $\frac{1}{f'}$, & $\frac{1}{f''}$ ſuis valoribus ex num. 172, fient $\frac{1}{a} - \frac{1}{a''} - 1 = \frac{h''-k''}{h'k''-h''k'}$, & $\frac{1}{a''} - \frac{1}{b''} = -\frac{h'-k'}{h'k''-h''k'}$, ſive $\frac{1}{a''} = \frac{1}{a} - \frac{h''-k''}{h'k''-h''k'} - 1$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} + \frac{h'-k'}{h'k''-h''k'} = \frac{1}{a} + \frac{(h'-k')-(h''-k'')}{h'k''-h''k'} - 1$.

177. Eo pacto aſſumpto f pro unitate, ad quam omnes valores reducantur, habebuntur per a omnes valores reliquorum radiorum b, a', b', a'', b'', qui nimirum poſiti ordine ſuo cum valoribus f', f'' erutis ex num. 172 erunt.

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - 1$$

$$\frac{1}{b'} = \frac{1}{a''} = \frac{1}{a} - \frac{h'-k'}{h'k''-h''k'} - 1$$

$$\frac{1}{b''} = \frac{1}{a} + \frac{(h'-k')-(h''-k'')}{h'k''-h''k'}$$

$$\frac{1}{f} = 1$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{h''-k''}{h'k''-h''k'}$$

$$\frac{1}{f''} = \frac{h'-k'}{h'k''-h''k'}$$

178. Relinquetur igitur determinandus ſolus valor a, quo definito relate ad illam unitatem aſſumptam, reliqui omnes determinabuntur. Is autem determinabitur facto $= o$ errore figuræ ſphæricæ, cujus expreſſio eruitur facile ex formulis nume-

meri 55 diſſertationis, ubi ſi dicatur ς', quod ibi eſt σ, error nimirum pertinens ad ſecundam lentem, & componatur eodem modo error ς'' pertinens ad tertiam, dicatur autem p, ut ibi diſtantia puncti, ad quod convergunt radii ante ingreſſum in primam lentem, p' diſtantia r foci radiorum primæ lentis, p'' foci primæ, & ſecundæ conjunctarum, erunt

$$\varsigma = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2 f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2 f}\right)\tfrac{1}{2}e^2$$

$$\varsigma' = \frac{m'-1}{m'}\left(\frac{m'^3}{f^2} - \frac{2m'^2+m'}{a'f'^2} + \frac{m'+2}{a'^2 f'} + \frac{3m'^2+m'}{p'f'^2} - \frac{4m'+4}{a'p'f'} + \frac{3m'+2}{p'^2 f'}\right)\tfrac{1}{2}e^2$$

$$\varsigma'' = \frac{m''-1}{m''}\left(\frac{m''^3}{f''^3} - \frac{2m''^2+m''}{a''f''^2} + \frac{m''+2}{a''^2 f''} + \frac{3m''^2+m''}{p''f''^2} - \frac{4m''+4}{a''p''f''} + \frac{3m''+2}{p''^2 f''}\right)\tfrac{1}{2}e^2.$$

179. Error figuræ ſphæricæ ibi erit $R^2(\varsigma+\varsigma'+\varsigma'')$ pro $R^2(\varsigma+\sigma)$: quare oportebit facere $\varsigma+\varsigma'+\varsigma''=o$. Æquatio dividetur per $\frac{1}{2}e^2$, & pro teleſcopiis, in quibus radii ad objectivum adveniunt paralleli, facto p infinito, omittentur poſtremi tres termini valoris ς; poterit autem in ſingulis valoribus ς, ς', ς'' diviſor m, m', m'' transferri intra parentheſim, ut in diſſertatione num. 94, utut relicto extra parentheſim $m-1$ pro factore communi ſingulorum ς, qua translatione calculus numericus evadet paullo facilior, & adhuc facilior diviſione inſtituta per $m''-1$, quo pacto valor ς'' erit liber a coefficiente communi, & priores bini habebunt pro coefficientibus $\frac{m-1}{m''-1}$, & $\frac{m'-1}{m''-1}$. Valores $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, dabuntur in numeris ex poſitione $f=1$, & ex numero 177, valores $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$, dabuntur itidem; erit enim primus $=\frac{m-1}{f}$, ſecundus $\frac{m-1}{f}+\frac{m'-1}{f'}$, adeoque remanebunt ſoli valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, quorum poſtremi cum ex num. 177 habeant formam

mam $\frac{1}{a} + t$ exiſtente t numero ibi dato, ſubſtitutis his valoribus pro $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, & eorum quadratis pro $\frac{1}{a'^2}$, $\frac{1}{a''^2}$, habebitur demum æquatio data per numeros, ac $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, quæ idcirco erit ſecundi gradus.

180. In ea æquatione termini eſſent 15, ſed cum ſingulæ ſubſtitutiones pro valoribus $\frac{1}{a'^2}$, $\frac{1}{a''^2}$ addant binos terminos, & ſingulæ pro $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$ ſingulos; fient 21: erunt autem pro primo termino æquationis $\frac{1}{a^2}$ termini colligendi tres, pro ſecundo $\frac{1}{a}$ quatuor, quorum duo ex ſubſtitutione: pro poſtremo autem termini numerici 11, quorum duo ex ſubſtitutione pro $\frac{1}{a'^2}$, $\frac{1}{a''^2}$, quatuor ex $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$. Invento in ea æquatione $\frac{1}{a}$, invenientur ex formulis numeri 177 reliqui tres valores $\frac{1}{b}$ $= \frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$ unde habebuntur quatuor radii binarum lentium vitrearum a, b, a'', b'' includentium aquam in numeris, quorum unitas f. Eruto autem in iiſdem unitatibus per formulas numeri 177 etiam valore diſtantiæ foci communis R, quam pro tribus lentibus, & pro radiis parallelis exhibet æquatio numeri 175, nimirum $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''}$; reducentur illi quatuor radii ad numeros, quorum unitas ſit R, quæ eſt longitudo teleſcopii, dempto ocularium ſyſtemate, dividendo numeros prius inventos per numerum inventum pro R, adeoque invenientur quæſiti radii relati ad eam ipſam teleſcopii longitudinem.

181. Si in ea æquatione valor a evadat imaginarius; poterit facile inveniri ejus valor ejuſmodi, ut exhibeat errorem minimum; nam æquatio reducta habebit hanc formam $\frac{1}{a^2} + \frac{p}{a} + q = o$, datis per numeros p, & q, cujus primum membrum erit ipſe valor erroris figuræ ſphæricæ diviſus per conſtantem $\frac{1}{2}R^2 e^2$, vel ſimul etiam per $m'' - 1$. Differentiando

ipſum

ipſum membrum, habito a pro variabili, fiet $-\frac{2da}{a^3}-\frac{pda}{a^2}$ $=o$; unde habetur $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}p$, ex quo valore inventis reliquis b, a'', b'', R, ut ſupra, habebitur ſyſtema exhibens errorem minimum. Is autem error ipſe habebitur ponendo hunc valorem a in formula $\frac{1}{a^2}+\frac{p}{a}+q$, & ipſam ducendo in $\frac{1}{2}$ R^2e^2, vel ſimul etiam in $m''-1$, ex qua ſubſtitutione habetur valor $R^2(q-\frac{1}{4}p^2)\frac{1}{2}e^2$, vel is ductus in $m''-1$.

Scholium generale.

182. HOc pacto habentur omnia, quæ pertinent ad ſyſtema trium lentium compoſitarum e tribus ſubſtantiis habentibus diverſas rationes qualitatum diſtractivarum ad refractivas, & diverſam rationem diviſionis ſpectri, ſive diverſam rationem qualitatum diſtractivarum pertinentium ad diverſa colorum binaria, quæ ratio ſi eſſet eadem in binis ſubſtantiis pro binariis omnibus; ſufficerent binæ lentes ex iis binis ſubſtantiis ad conjungendos ad ſenſum in punctum unicum radios omnes provenientes ab unico objecti puncto. Ubi ea ratio eſt diverſa in omnibus tribus habentibus itidem ſatis magnum diſcrimen rationis qualitatum diſtractivarum ad refractivas, obtinebitur idem quamproxime per lentes tres unitis coloribus extremis cum uno medio.

183. Hanc methodum videtur indicare Natura ipſa, quæ in oculo conſtituit tres diverſas refringentes ſubſtantias, quamquam in eo quidem videtur Natura ipſa longe majorem perfectionem quæſiviſſe; nam & curvatura humoris cryſtallini plurimum differre ſolet a circulari, & ipſa lens humoris cryſtallini conſtat ſtratis diverſis ſuperinductis, quæ ſunt diverſæ denſitatis, uti conſtat potiſſimum in humore cryſtallino piſcium ingentium, in quibus diſcrimen denſitatis diverſorum ſtratorum multo facilius per obſervationem determinatur. Fortaſſe ſingula ſtrata deſtinata ſunt ad habendas ejuſmodi qualitates refractivas, & diſtractivas, & ejuſmodi figuras, ut ſi perfecta habeatur oculi conformatio, quamplurimi colores uniri poſſint, vel etiam omnes, ſi continuus ſit mutationis progreſſus in den-

denſitate, & natura materiæ humorem cryſtallinum componentis; unde fit, ut formulæ pertinentes ad errores diverſæ refrangibilitatis, & figuræ ſphæricæ non poſſint applicari ad diſtinctionem imaginis in oculo, præterquam quod vel nulli, vel rariſſimi ſunt oculi, ut & cætera membra omnia, & poma, & frondes, & cryſtalli, & omne ſalium genus, ac reliqua omnia Naturæ opera, in quibus perfecta, quam affectant, figura obſervetur.

184. Si adhibeantur tria vitrorum genera, oportebit elaborare lentes tres, in quibus tamen binæ indeterminationes ſupererunt ad commodiorem formam ſeligendam. Sunt, qui commendent ut ſimpliciorem caſum, in quo ſuperficies quæpiam aſſumatur plana, facto infinito ejus radio. Verum apud vitrorum artifices ſatis conſtat, planam ſuperficiem multo difficilius efformari ſatis exactam, quam ſphæricam. Congruentia ſuperficierum contiguarum eſt multo magis opportuna; nam ea minuit partem luminis amiſſi per reflexiones. In quovis ingreſſu in lentem, & egreſſu ſemper reflectitur pars luminis eo major, quo majus eſt diſcrimen mediorum, quæ ſuperficies dirimit. Si lentes diſtent utcumque exiguo intervallo, habebitur duplex reflexio in egreſſu e vitro in aerem, & ingreſſu ex aere in vitrum, quibus ſuccedit in contiguis unica multo debilior orta in tranſitu e vitro in vitrum. Præter partem luminis amiſſam per eas reflexiones pro imagine in foco radiorum tranſeuntium ſine ulla reflexione habetur incommodum luminis ſpurii advenientis ad imaginem ipſam objecti poſt aliquot refractiones conjunctas cum binis reflexionibus. In tribus lentibus habentibus ſex ſuperficies, ſi nullæ congruant, habentur 15 binaria, quæ ſingula lumen tranſmittunt ad imaginem, & ſingula focos habent, pro quibus inveniendis habeo formulas admodum expeditas. Si aliquis ex iis focis foco principali radiorum directorum ſit proximus, imaginem turbat lumine ſpurio perfuſam in objectis admodum lucidis non ita tenui. Si ſuperficies lentis intermediæ congruant cum adjacentibus, ſuperficies reflectentes erunt quatuor, & binaria ipſarum tantummodo ſex.

185. Hinc etiam ex hiſce capitibus multo melius eſt aquam includere binis lentibus, quod requirit formationem ſuperficierum tantummodo quatuor, & minuit jacturam luminis in foco principali, ac ejus perturbationem a lumine bis reflexo.

186.

186. Theoria omnis ejuſmodi objectivi efformati per ejuſmodi lentem triplicem hic eſt fuſe expoſita. Primo quidem ex obſervationibus vitrometro habitis, quæ fuſe referuntur paragrapho 1, & 2, & ex aliis indicatis, quæ ſunt habitæ ope priſmatis vitrei habentis angulum variabilem, oſtenditur ejus neceſſitas ad majorem teleſcopiorum perfectionem; cum inde appareat, unitis per lentem duplicem radiis extremis, medios ſimul cum ipſis non conjungi. Pluribus circa obſervationes propoſitas adnotatis in §. 3., expoſita eſt in §. 4. theoria radii tranſeuntis per duo priſmata contigua, in quorum primum incidat ad perpendiculum. Ejus ope deducta ſunt plura conſectaria phœnomeni obſervati pertinentia ad unionem colorum, & expoſita omnis ratio inverſionis ſucceſſivæ ſpectri ex diverſa in diverſis ſubſtantiis ratione differentiæ valorum exprimentium rationem ſinuum pertinentium ad diverſa colorum binaria, ſive appellata m ratione ſinus incidentiæ coloris minus refrangibilis ex aere in quampiam ſubſtantiam, $m + dm$ eadem ratione in colore magis refrangibili, M, & $M + dM$ pro alia ſubſtantia, ex diverſa ratione valorum dm, dM pertinentium ad diverſa binaria, ut eorum, qui pertinent ad rubeum, & viridem, ac eorum qui pertinent ad rubeum, & violaceum; unde deducta eſt diverſa in diverſis ſubſtantiis ratio diviſionis ſpectri, & triplex Newtoni error expoſitus.

187. In ea perquiſitione occurrit §. 7. uſus curvæ exprimentis omnes ejuſmodi rationes, exhibentibus abſciſſis omnes valores dm pertinentes ad omnia binaria primi rubei combinati cum quovis alio, & ordinatis omnes dM ipſis reſpondentes, ac §. 8. exhibita eſt ratio determinandi proxime curvam ipſam ex aliquot obſervationibus habitis vitrometro, vel angulo variabili priſmatis vitrei, adeoque rationes ipſas valorum dm, dM reſpondentium binis colorum radiis, nimirum rubeo combinato cum violaceo, & cum quopiam intermedio, ut viridi, quod eſt elementum omnino neceſſarium pro determinatione ſyſtematis trium lentium, quæ ipſæ rationes quo pacto ex diviſione ſpectri immediate obſervata utcumque deduci poſſint, indicatum eſt §. 6.

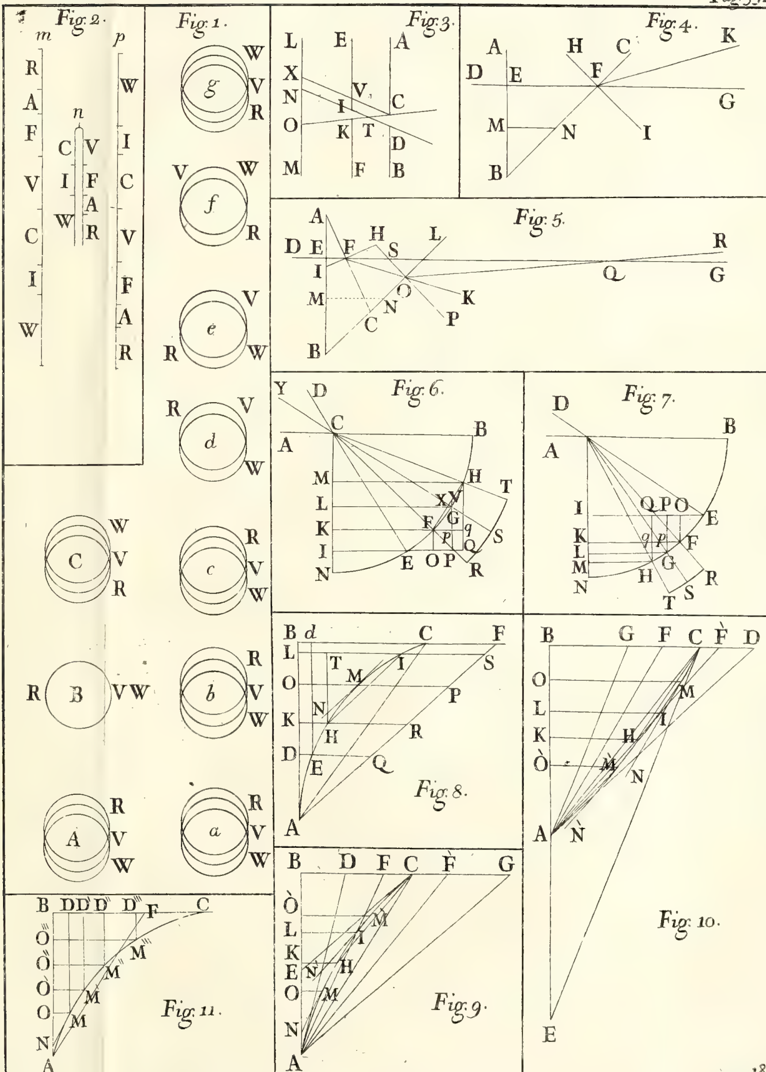
188. Demum §. 9. delati ſumus ad unionem plurium colorum quotcumque ope totidem lentium, ſed indicata tantummodo ſolutione generali diligenter evolvimus id, quod pertinet ad lentes tres, potiſſimum ad eas, in quibus ſuperficies

lentis mediæ congruunt ſingulæ cum ſingulis extremarum. Denominationes pertinentes ad illam rationem differentiarum habentur num. 167: formulæ, quæ proveniunt ex conditione unionis trium colorum in earum functionibus datis per ipſarum radios ſphæricitatis, habentur num. 172: valorem foci communis ejuſmodi lentium exhibet numerus 175: formularum reductionem ad 4 radios profluentem ex congruentia ſuperficierum intermediarum habet 176, cum expreſſione radiorum reliquorum per radium ſolius primæ ſuperficiei, quorum indiculus habetur numero 177.

189. Inde num. 178 proponitur æquatio ſecundi gradus orta ex correctione figuræ ſphæricæ, cujus æquationis forma conſideratur num. 179. Ex ea æquatione eruto valore primi radii, eruuntur per præcedentes formulas reliqui, & diſtantia foci communis, adeoque ſyſtema totum quatuor ſuperficierum relatum ad diſtantiam foci communis. Quod ſi forte ea æquatio exhibeat valores imaginarios, oſtenditur num. 180, quo pacto iidem radii inveniri poſſint ita, ut omnium minimum retineant ſphæricæ figuræ errorem.

190. Hæc omnia ad theoriam pertinent: ſupereſſet applicatio numerorum ad formulas, qui deſumi poterant ex ipſis obſervationibus, quas propoſuimus, quem laborem ſuſcepiſſem utique, ſi per tempus, & valetudinem licuiſſet. Tot curis obrutus, quarum aliquas in exordio hujuſce diſſertationis expoſui, vix, ut liquet ex num. 6, cæpi in hac ipſa diſſertatione digerere in primo ipſo hujuſce anni exordio Mediolani argumentum, quod jamdiu animo conceperam, & cujus ſpecimen quoddam tenue, quod pertinet ad ſucceſſivam inverſionem ſpectri obſervatam per vitrometrum, ejuſque cauſam, ac ad formulas trium lentium initio ſuperioris anni perſcripſeram ad Clairautium, ut Regiæ Scientiarum Academiæ communicaretur, tum vero & ad Scherfferum noſtrum Viennam, a quo id ipſum, cum aliis nonnullis, ut in hujus ipſius diſſertationis exordio innui, jam Germanice eſt editum. Demum Mortono, qui Regiæ Societati eſt a ſecretis innueram, & ſucceſſivam inverſionem ſpectri, & diverſam in diverſis ſubſtantiis rationem diviſionis ſpectri inde erutam, quæ omnino everteret analogiam cum Newtoniana diviſione monochordi, ut ea meo nomine cum Regia Societate Londinenſi communicaret. Vix inter Papienſis ſcholæ turbas mille

aliis


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

aliis impedimentis interturbatus perſequi utcumque potui, abſoluturus utique in hiſce vacationibus bacchanalium, per quas iterum regredi Mediolanum oportuit ad alia etiam ſimul curanda, niſi in ipſo fere primo adventu correptus morbo ſane importuno deberem decumbere. Quam ob cauſſam urgente impreſſionis tempore ægre in ipſo lecto huc congeſſi præcipua ex iis, quæ jamdiu, ut ajebam, in animo habueram jam digeſta.

JOAN.

JOANNIS BRUNELLI

De Mannioca.

AD

FERDINANDUM BASSIUM.

EPISTOLA.

QUoniam, Ferdinande Baſſi dilectiſſime, totus in naturalium rerum contemplatione verſaris; quo ſtudio & magnam tibi laudem comparas, & naturalem ipſam hiſtoriam inventis illuſtrare ſoles non contemnendis; mihi viſum eſt, non omnino ingratum tibi fore, ſi quid ego ad te ſcriberem, quod ad tua ſtudia aliquo modo pertineret; & ſimul jucundum eſſet, ac ſcitu dignum. Quapropter mihi ipſe propoſui de planta quadam, quæ in magnis multiſque Americæ regionibus colitur, quæque a Braſiliæ populis *Maniiba*, ſeu *Maniiva* dicitur, verba facere; ac præcipuos tibi hujuſce plantæ uſus brevi ſermone exponere. Hujuſmodi plantam Botanici deſcripſerunt præſtantiſſimi, quos inter Guglielmus Piſo, ac Georgius Marcgravius mihi vehementer placent. Et Piſo quidem novem plantæ ſpecies enumerat. Sed fieri poteſt, ut & multo plures ſint; & ipſe Vir clariſſimus unam eandemque ſpeciem diſtinctis diverſarum nationum nominibus appellaverit. Etenim etiam Americani, pro varia locorum inter ſe ac regionum diſtantia, aliis atque aliis linguis utuntur, quamquam unum quoddam ſit loquendi genus, ab antiqua ſcilicet ac jam deleta *Topinambà* gente derivatum, iis omnibus fere gentibus commune. Summus quoque Vir Linnaeus (a) in libro, quem ſcripſit, de plantarum generibus, *Maniivæ* florem deſcribit, quamquam ſub alio nomine. Turnefortius (b) ve-

(a) *Genera plantarum. Pariſiis* 1743. *gen.* 867.
Jatropha. *Atque ſub hoc genere ſpecies ſeptem enumerat, in quibus ea, quæ quintum tenet locum, eadem eſt ac illa de qua in præſens agimus; vocaturque ab ipſo Cel. Linnæo* Jatropha (Manihot) foliis palmatis: lobis lanceolatis integerrimis lævibus.
Caroli Linnæi ſpecies plantarum. Holmiæ 1763. *p.* 1429.

(b) *Inſtitutiones rei herbariæ. Pariſiis* 1700. *pag.* 658. *tab.* 438.

vero hujuſce plantæ floris ac fructus; ſed Plukenetius (a), & Sloanus (b) integræ plantæ iconem etiam apponunt. Incipiam igitur a plantæ cultura, quæ diligentiam non parvam, certumque laborem requirit.

Americani inſtituto præparatoque plantario, ſeminibus miſſis, quibus uti nolunt, virides ramos vegetoſque, tamquam nova germina, ex adultis *Maniivæ* plantis amputant, ac foliis nudant. Ramos ad certam longitudinem redactos, duorum ſcilicet pedum, vel eo minus, in terram figunt, ita tamen ut quæ in planta rami cujuſque pars erat inferior, eumdem etiam ſub terra ſitum retineat. Neque vero ſingulos in unaquaque fovea ramos diſponunt, ſed ternos quaternoſve; atque ita inter ſe poſitos, ut in ima foveæ quarte parvis inter ſe diſtent intervallis, repletiſque terra foveis, tumulum etiam ſuperſtruunt, ut ſcilicet ramorum ſumma capita vix e terra prodire videantur. Binas vero, quæ ſibi proxime ſunt, foveas trium ſaltem pedum a ſe mutuo removent intervallo. Oportet autem plane contritam eſſe terram, ac probe ſolutam. Nam ſi duriores grandioreſque glebæ ramos circumſtent, hi ægrius ac parcius radices agent. Id etiam agricolæ diligenter cavent, ne dum inſtant, vel decidunt majores pluviæ, plantationem inſtituant. Irritus enim eorum labor eſſet, ramis omnibus, vel certe pleriſque ingenti humoris copia putreſcentibus. Sæpe autem ac ſæpius poſt ramorum ſatus evellendæ ſunt herbæ, ſtirpeſque variæ & multæ, quæ cum mira celeritate adoleſcant, ſuccos, & vim fere omnem ex terra eliciunt. Rami ſinguli, qui paucos poſt dies in totidem plantas mutantur, tres, quatuor, aut etiam quinque, vel ſex radices emittunt, ſi terra pinguis atque optima fuerit; contra vero binas tantum, eaſque minores ferunt, ſi ſterilis atque arenoſa. Radicibus, quibus *Mandiocæ*, ſeu *Manniocæ* nomen tributum eſt, non eadem eſt vel magnitudo, vel figura. Nam aliæ ſunt majores, aliæ minimæ; nonnullæ rotundæ fere procreantur; multæ etiam in longitudinem extenduntur; quæ longitudo in maximis radicibus ſemipedem craſſis duos interdum pedes adæquat & amplius. Pleræque tamen radices eam for-

(a) *Almageſtum* p. 241. *t.* 205. *f.* 1.
(b) *Ricinus minor, viticis obtuſo folio, caule verrucoſo, flore pentapetalo albido, ex cujus radice tuberoſa, ſucco venenato turgida, Americani panem conficiunt. Sloanus Cat. plant. Jamaicæ* 41. *Hiſt.* 1. *p.* 130. *t.* 85.

ſortiri figuram ſolent, quæ facile definiri non poſſit. Corticis etiam color pro varia radicum ſpecie varius eſt; ſubniger ſcilicet, albus, violaceus, & fere flavus. Pulpa ſimiliter in quibuſdam radicibus ſatis eleganti ac pulcro nitet candore; in aliis vero, ut in ovo vitellus, colore tingitur plane flavo. Ex his farinæ genus optimum conficitur. Verum radices omnes, quacunque in terra gignantur, niſi unius fere anni ſpatio juſtam magnitudinem attingere, perfectamque, ut ajunt, maturitatem conſequi non poſſunt. Quamquam Indi, ſi forte egeant, ac fame premantur, radices quintum etiam poſt menſem e terra eruere non dubitant. His tamen radicibus, cum parvæ ſint, immites adhuc & crudæ, vix boni aliquid comparare ſibi poſſe videntur. Terræ autem nigræ ac pingues, in quibus præſertim denſior aliqua ſilva exciſa fuerit, atque igne cremata, mirum in modum alunt, feruntque *Maniivæ* plantam, quæ ad procerioris hominis ſtaturam interdum aſſurgit. Sed in quovis terræ genere, ut ut ſterilis ea fuerit, in arenis etiam fluminum, dum certis locis, certiſque temporibus latiſſime patent, creſcit nutriturque hujuſmodi planta; quamquam minores tandem, deterioreſque radices prodire debeant. Dixi, ut potui, de *Maniivæ* plantæ cultura. Nunc, Baſſi ornatiſſime, ejuſdem plantæ uſus præcipuos paucis aperiam.

Ac ſane in primis mirum videri debet, plantam mortifero veneno refertam, dum viridis eſt, & ſucco plena, incredibili hominum multitudini pro pane ſufficere. Americani enim, ut multi etiam in Africa populi, ex hujuſce plantæ radicibus diverſa farinarum genera, aliaque multa ad pulmentum & cibum conficiunt; quemadmodum nos etiam ex tot frumentorum generibus tam multa ac varia nobis vitæ ſubſidia comparare conſuevimus. Verum pauca quædam inſtrumenta enumeranda tibi prius, deſcribendaque ſunt, quibus Americani ad hanc rem uti ſolent.

Quoniam Indi, præſertim barbari ferro carent, radulam quamdam, quam *ibecè* vocant, ad radices in minuta fruſta ſolvendas ſibi parant in hunc modum. Minutos undique ſiliceos lapides acutoſque legunt, quos, ſi opus fuerit, duriſſimo ſaxo frangunt, & in minores partiuntur lapillos æquales omnes, quam fieri poteſt, inter ſe, omneſque ſimiliter angulatos. Hos lapillos in tabula lignea figunt ad perpendiculum,

an-

angulis ſurſum acutis; atque ita diſponunt, ut lapillorum baſes ſe ſe mutuo fere contingant, & ſimul totidem veluti lineas rectas conſtituant. Tum vero liquefacta pice ſuper impoſita, ac demum frigefacta, lapilli ad tabulam quam arctiſſime adhæreſcunt, neque facile inde poſſunt evelli. His tamen radulis Indi, qui farinam ſibi comparare ſolent ad paucos dies, ſæpius utuntur, quam Europæi. Hi enim cum magnam ſæpe farinæ copiam conficere debeant, ad radices celerius frangendas ligneam rotam adhibent erectam latiori gyro contentam; cujus rotæ oram extimam in latitudinem nonnihil expanſam undique ferro cingunt in folium attenuato, ubique aſpero, crebriſque foraminibus pertuſo. Radices enim ad rotam, dum ſumma celeritate in orbem agitur, manu admotæ in exilia citiſſime fruſta reſolvuntur.

Aliud etiam inſtrumentum nacti ſunt Americani, quo ſuccum ex fractis jam reſolutiſque radicibus expellunt. Ex molli arundine, *varumà* appellant, qua ſtoreas, aliaque id genus permulta conficere ſolent, corticem detrahunt, quem minutatim in longum ſecant. Ex cortice hujuſmodi ſic præparato longiorem, ac mediocris craſſitudinis cylindrum, quem *tipitì* appellant, in ima parte probe clauſum, in ſuperiore vero apertum ita contexunt, ut hinc inde tractus, in contraria facillime diduci poſſit, interiore totius cylindri capacitate imminuta. Hac enim ratione fit, ut dum cylindrus ſuſpenſus manet totus minutiſſimis radicum fragmentis repletus, ſi ex inferiori ejuſdem cylindri parte pondus appendatur validius, fragmenta undique comprimantur, ac ſuccus omnis effluat ipſe per ſe. Europæi tamen, qui feſtinantius agunt, torcularibus, vel aliis id genus machinamentis frequentius uti ſolent.

Eodem cortice ſubtilius diſſecto diverſa quoque Indi conſtruunt quadratæ formæ ut plurimum incernicula, quibus *urupèma* nomen eſt. Hiſce incerniculis radicum fragmenta contuſa jam, & ſucci fere expertia attritu quodammodo attenuant, ac ſimul purgant.

Ut vero fractas jam reſolutaſque radices, quoties neceſſe fuerit, contundere poſſint; ex arboris duriſſimo trunco ſibi mortarium parant americana voce *inuà* dictum.

Teſtas denique diverſæ fingunt magnitudinis, planas æquabileſque, ac formæ rotundæ, in quibus farinas, & quidquid ex *Manniocæ* radicibus conficiunt, ad ignem torrent. Teſta

quælibet, cujuſcumque fuerit magnitudinis, *japunà* nomen habet.

Sed jam videamus quid Americæ incolæ ex *Manniocæ* radicibus efficiant, atque uſus tandem earumdem radicum principaliores, in Braſilia præſertim, explicemus. Initium faciam a farina, quam Siccam vocant, quæque conficitur in hunc modum. Ope cultri radices primum cortice exuunt, & aqua ad ſordes detergendas abluunt; deinde radula, ſive rota, quam ſupra deſcripſi, in minutiſſima fruſta diſſolvunt. Cylindro autem ſupra commemorato, vel torculari adhibito ſuccum exprimunt; tum fragmenta in mortario contundunt, ſtatimque ad reliquum extrahendum humorem in cylindrum rurſus immittunt iterum contuſuri. Quod ſane illi præſertim, qui diligentiores eſſe volunt, toties iterare ſolent, donec ſuccus omnis effluxerit, ac ſimul longe minora evaſerint *Manniocæ* fragmenta. Atque id quidem ſemper ita fieri debet, quod hic ſemel monuiſſe ſufficiat, quoties aliquid confici ex *Manniocæ* radicibus neceſſe fuerit. Fruſta deinde omnis fere humoris expertia, & incerniculo ſelecta ſuper teſtam expandunt ſubjecto igne calentem, ſumma diligentia caventes, ne vel ignis vehementior ſit, vel fruſta nimis diu ſuper teſtam immota maneant. Quapropter & ignis vim, ſi opus fuerit, temperant; & fruſta ipſa infurnibulo aliquo agitant, perpetuoque motu per totam teſtæ latitudinem circumducunt, donec omnia æque ſiccata fuerint fragmenta; & probe toſta. Hoc modo farina ſicca conficitur, fruſtis in minuta fere grana, flaveſcentia nonnihil, abeuntibus. Hujuſmodi farina & optime nutrit; & ad multos menſes, vel ultra annum ſervari ſolet, ſi quam fieri poteſt diligentiſſime, humiditas omnis arceatur. Servatur autem in corbibus, quibus *urſacanga*, vel etiam *panacù* nomen eſt, quoſque Indi texunt ex vimine *timbò* dicto, ſive ex illis arundinibus per totam longitudinem ſectis, quibus *varumà* nomen ſupra tribuimus. Eoſdem Indi corbes foliis ex certo quodam palmarum genere, *ubìn* ſcilicet, durioribus intus undique circum veſtiunt. Farina, quam modo deſcripſimus, *uì Sicca* ab Indis appellari ſolet.

Farinam vero, quam ex aqua dicunt Europæi, Indi vero *uì Catù*, quæque gratiſſimi ſaporis eſt, ſi recens fuerit, ac rite confecta, hoc modo ſibi parant Americani. *Manniocæ* radices ſex ſeptemve dierum ſpatio ſub aqua detinent, donec

cor-

cortex omnis digitis detrahi poſſit labore fere nullo. Atque hic diligentius obſervant, ne radices in aqua nimis diu maneant. Corrumpi enim facile poſſunt, ac fæde putreſcere. Spoliatas cortice radices, quia molliſſimæ ſunt, in fruſta ſtatim reſolvunt. Succum deinde omnem eo, quem ſupra diximus, modo extrahunt; ac tandem fruſta eadem incerniculo per attritum attenuata, durioribus ac ligneis quaſi filis per medias radices excurrentibus rejectis, in teſta, ut ſupra diximus, ad ignem torrent. Farinæ hujuſmodi grana grandiora nonnihil prodire ſolent, thuris granis ſimillima, ſed flavi ut plurimum coloris. Europæi fere omnes, qui in America degunt, quemadmodum & Indi, hanc farinam plurimi faciunt, atque in deliciis habent; eamque, dum recens eſt, nullaque adhuc humiditate vitiata, triticeo pani facile anteponunt. Verum ſervari diu non poteſt, ut farina illa, quam ſiccam ſupra vocavimus.

Nonnulli farinam ſiccam ad ignem vehementius toſtam, farina etiam, quam ex aqua diximus, interdum modice adjecta, in mortario magna vi uſque eo contundunt dum in minutiſſima grana, vel ſi mavis in pulverem flavi fere coloris reſolvatur. Hujuſmodi farina, calido jure ſuperfuſo, gratiſſimi ſaporis eſt, atque optimum præbet alimentum.

Quoniam nullis Indi, dum comedunt, inſtrumentis uti ſolent, manu collectam farinam in apertum os mira jaciunt dexteritate, ut nullum ferme granum in terram decidat. Quos ego interdum imitari cum vellem, atque Americanus videri; facilius, mihi crede, ac multo ſæpius quam os, utroſque invitus implevi oculos, univerſis qui aderant ridentibus.

Aliam quoque farinam, quam rectius hoc nomine appellaveris, ex *Mannioca* eliciunt Americani. Radices eodem plane modo præparant, ac ſi farina ex aqua eſſet conficienda. Verum fragmenta ſuper teſtam ratione longe diverſa ad ignem torrent. In primis enim diligenter curant, ut ex igne ſubjecto calor longe remiſſior ſit, ac ſibi ſemper æqualis; fragmenta deinde validiſſimo perpetuoque attritu ſuper eamdem teſtam comminuunt, ne in grana ſiccentur. Hoc modo illud efficiunt, ut fragmenta omnia in tenuiſſimam ſubtiliſſimamque farinam reſolvantur albi coloris, noſtræque ex tritico farinæ per quam ſimillimam. Ex hac farina, quæ *carimà* dicitur, panes conficiuntur, aliaque ſatis permulta; quæ tamen ſi ad paucos

dies ſerventur, edi ab homine quantumvis eſuriente vix commode poſſunt.

Venio jam, Baſſi ornatiſſime, ad illum, qui in *Manniocæ* radicibus latet, tenuiſſimum ſubtiliſſimumque cremorem, quique ab Indis *tapioca* vocatur. Hujuſmodi cremor *Manniocæ* radicum præcipua ſane pars eſt, ac multo melior; ſine quo cætera omnia, quæ ex illis radicibus conficiuntur, nullius fere ſaporis eſſent, atque alimentum præbere vix poſſent. Verum hoc modo e radicibus Indi *tapiocam* ſeparare ſolent. Radicum fragmenta minutiſſima utraque manu collecta totis viribus ſæpius atterunt comprimuntque, ſuccum, qui interea decidit, aliquo vaſe colligentes; cremor enim una cum ſucco foras elicitur. Duarum horarum circiter ſpatio cremor ſive *tapioca* lactei coloris pulcherrimi in fundo vaſis totus ſubſidet. In quo vaſe ſub aqua, noxio prius humore rejecto, ad plures dies, decem ſcilicet vel amplius, ſervari *tapioca* poteſt, ſi bis tamen quotidie nova ſemper aqua ſuperfundatur.

Tapioca ſi probe ſiccata fuerit digitiſque contrita in ſubtiliſſimam reſolvitur farinam pulcherrimo candore nitentem. Hinc amylum, & gummi, & pulvis ille muliebrium præſertim capitum ornamentum præcipuum. Jura etiam ex hac farina fieri ſolent longe ſaluberrima; atque in primis pectore laborantibus mirum in modum utilia.

Farina vero, quæ vulgo *tapiocæ* farina dicitur, quæque ad longiſſimum etiam tempus integra ſervatur, hoc modo fieri ſolet. Super teſtam Indi *tapiocam* adhuc recentem ac mollem, atque in fruſta ſolutam ad ignem torrent, donec in grana albi coloris ac paulo majora fruſta ipſa ſiccentur. Hujuſmodi grana dum calida ſunt, ſi digitis contrectentur, mollia quaſi ex cera eſſent ſentiuntur; quæ tamen evaneſcente calore duriſſima ſtatim evadunt. Hujuſce farinæ uſus patet latiſſime; ſed illis præſertim, qui pectore laborant, ſæpe magnum afferre ſolet adjumentum.

Ex *tapioca* in ebullientem aquam immiſſa uſitatiſſima potio fit, ac celeberrima elegantiſſimo hoc nomine *tacacà* inſignita. Vix dici poteſt quam avide Braſiliæ incolæ fere omnes, quemadmodum & Europæi in regionibus illis degentes, potionem hanc appetant, hauriantque. Sed parum admodum *tapioca* in aqua ebullire debet, ne in gluten abeat; ac ſimul perpetuo motu cienda eſt, ne in globos efformetur. Jura deinde

de infunduntur diverſi generis cum ſucco *Manniocæ* jam coɛto, & contuſo pipere; hic enim fit potio multo ſuavior. Verum illi omnes, qui primum hauriunt, ex ſumma quæ ſtatim oritur nauſea propter tenacitatem lævitatemque nonnullam, ad vomitum impelli ſolent. Sumitur hæc potio dum adhuc tepeſcit; nutritque mirum in modum, ac famem ſedat.

Ex eadem etiam *tapioca* genus quoddam placentarum fit, quibus *bejù ſicca* nomen eſt. Hujuſmodi placentæ ſuper teſtam ignis calore ſiccatæ, ſi adhuc calidæ ac butyro conſperſæ comedantur, optimo ſane gratiſſimoque ſapore palatum afficiunt.

Placentæ vero illæ majores vilioreſque, quas Indi *bejù* appellant, ex *Manniocæ* fruſtis ut plurimum fieri ſolent, ſucco prius extracto; ex quibus fruſtis farina ſicca conficitur. Verum hujuſmodi placentæ ſtatim extincto calore inſipidæ fere evadunt; hærenteſque palato difficile admodum glutiri poſſunt.

Ex iſtis Indi placentis, ſed latioribus multo craſſioribuſque, potionem eliciunt longe potentiſſimam generoſiſſimamque, ingrati tamen auſterique ſaporis, quæ *bejù*, *azzù*, *cauìn*, vel etiam *bejù azzù* appellatur; eamque ſibi comparant in hunc modum. Placentas ſtratis latioribus foliis ita diſponunt, ut aliæ aliis incumbentes erectum fere cylindrum componant. Paucis poſt diebus ejuſdem cylindri ſuperficies extima tota muceſcit, roſeoque tingitur colore atris flaviſque maculis hinc inde conſperſo. Placentas tunc Indi calore jam perfuſas, dulceſque palato, diſtrahunt; efficiuntque ut ſingulæ, qua late patent, mucidæ fiant eodem modo. Quod ſtatim ac vident contigiſſe, placentas omnes manibus in fruſta diſcerpunt, fruſta ipſa in calidiſſimam aquam projicientes. Omnia deinde eo uſque totis viribus miſcent, donec placentarum fruſta in pultem evaſerint; ſubtiliſſimoque incerniculo liquorem omnem ſeparant, quem diſpoſita ante fictilia recipiunt. In hiſce fictilibus fermentatur liquor, ebullitque ad ſex vel octo dies; eamque vim concipit interdum, ut vaſa etiam diſrumpat. Verum ultra quintum & decimum diem hic liquor ſervari poteſt, modo in vaſe immotus omnino quietuſque maneat. Nam ſi aliquid de vaſe ſumptum fuerit; reliquus, ne aceſcat, liquor totus ſtatim ebibendus eſt. Quod ſane Indi numquam inviti recuſare ſolent. Hanc Indi, præſertim barbari, potionem ſumunt ad ebrietatem uſque, quoties tripudia, ſolemniores-

reſque ſaltationes horribili cum cantu, ut ſolent, ſimul concelebrant.

Eodem fere modo, rariſſime tamen, ex placenta illa, quam *bejù ſicca* ſupra vocavimus, Indi potionem quoque aliam eliciunt, quæ multo potentius multoque celerius ebrietatem gignit. Hujuſmodi liquores Europæi nonnulli artificio illo, quo Chemici utuntur, multo ſubtiliores reddunt ſuavioreſque; atque ad varios uſus in promptu ſemper habent, magnique faciunt.

Sed & *Maniivæ* plantæ folia in cibum, quaſi olera, ſæpius ab Indis præparari ſolent. Folia nimirum in mortario contundunt; atque in aqua ad ignem coquunt una cum carnium, aut piſcium fruſtis, pinguedine etiam adjecta cum *Manniocæ* ſucco, pipere, & falſamento. Hunc ego cibum, quem *mannizzova* dicunt, contemnere haud potui, quamquam barbarorum eſſe videatur. Etenim cum octo ab hinc annis fluminis Amazonum oras perluſtrarem, accidit, ut, multorum dierum longo confecto itinere, ſeditioſi milites fugam arriperent, & incolarum ingenti cum metu & damno, omnia quacumque tranſirent hoſtium in morem depopularentur. Quo factum fuit ut cum cibaria jam defeciſſent, ex proximis etiam provinciis commeatu prohiberemur.

De *Manniocæ* denique ſucco, quem Indi *tucupì* vel *mannicuera* appellant, aliquid etiam dicendum ſupereſt. Succus iſte ſulphurei coloris e radicibus expreſſus, & crudus dulcis eſſe ſolet gratique ſaporis; pernicioſiſſimum tamen venenum continet potentiſſimumque. Animalia enim univerſa, ex quacumque fuerint ſpecie, quæ hunc ſuccum biberint majore copia, quam oporteat, promptam ac paratam ſibi mortem habent. Primum enim turgere corpus vehementer, & contremiſcere incipit, mox vertigines ſubſequuntur, deinde frigus in extremis artubus, tandem mors. Ac ſane plures ex Indis puerulos e matrum cura elapſos memini extinctos ita fuiſſe, quod crudum hauſerint obſervante nemine *Manniocæ* ſuccum. Sues tamen, ac cervi, atque aliæ ſatis multæ minores beſtiæ ſi radices, quas avidiſſime appetunt, comederint cortice adhuc involutas; nullo, quod obſervatum fuerit, afficiuntur incommodo. Inſecta etiam quamplurima, atque innumerabilium formicarum præſertim agmina integras *maniivæ* plantationes magno cum agricolarum damno ſæpe

de-

devaſtant, nec tamen pereunt. Verum homines neque ſuccum, dum adhuc crudus eſt, neque de radicibus quidquam, nec folia ipſa, dum viridia ſunt, atque ignem neſciunt, ſumere poſſunt ſine certiſſimo mortis periculo.

Interdum tamen contingit, ut beſtiæ majores robuſtioreſque, quemadmodum ſunt equi, ac boves, atque alia id genus animalia, a proximo eripiantur interitu, ſi parva admodum hauſta venenati ſucci potione, ſtatim nullaque mora interpoſita aliquo remedio juventur. In palpitantis videlicet jacentiſque animalis os ad vomitum uſque oleum Indi profundunt; ac ſimul vehementiorem ignem circumponunt uſque dum totum animalis corpus in ſudorem reſolvitur. Sæpius tamen hujuſmodi etiam animalia emoriuntur, quamquam omnis diligentia & cura impenſa fuerit.

Quamvis autem *Manniocæ* ſuccus tam mortiferum in ſe venenum contineat; ad ignem tamen ſi coctus fuerit, nullo pacto nocet, uſumque habet ampliſſimum. In cibis enim fere omnibus hunc ſuccum plerique Braſiliæ incolæ adhibere ſolent, eodemque nomine, *tucupì* videlicet, appellant.

Eumdem *Manniocæ* ſuccum diutius fervefactum, atroque colore perfuſum, non raro Indi *tapioca* modice adjecta in ſolidum ac durum corpus compingunt. Id eſt, quod vocant *tucupì piſciùna;* atque ad cibos condiendos in longum tempus conſervant. Condimentum ſane eſt barbarorum epulis digniſſimum.

Atque hæc, Baſſi ornatiſſime, illa fere ſunt, quæ de *manniivæ* planta, ſeu potius de præcipuis apud Braſiliæ populos *Manniocæ* uſibus, ad te ſcribere conſtitui. Quorum ſane maximam ipſe partem vidi, atque non ſolum in *Parà* urbis vicinia, ſed aliis etiam in locis ab illa urbe remotiſſimis diligentius obſervavi. Multa tamen conſulto prætereunda duxi, ne dum placere tibi ſtudebam, moleſtiam etiam afferrem. Ex his vero, quæ in hunc ſermonem congeſſi, facile ipſe per te videre poteris, quid Scriptores alii de his rebus agentes minus recte dixerint. Nolo enim hunc locum attingere. Tu, qui libris abundas, non enim diligentiæ, ut bibliothecam domeſticam tibi inſtrueres, non labori, non ſumptui peperciſti, iſque es, tantumque & rerum naturalium uſu & memoria vales, ut ullo vix libro indigeas, de his omnibus, quæ ad te perſcripſi, judicium feres. Mihi quidem in factis ipſis narran-

randis fidem, cujus mihi ipſe teſtis ſum, non defuiſſe exiſtimabis. Ceterum ſi quid forte opinione lapſus fuero, & ignoſces, & corriges; elegantiam autem non poſtulabis ab homine prope jam Americano. Quid frater, aliique mei agunt, qui item & tui ſunt? Ut valent? Cui ſtudio ſe dant? In Academia noſtra quid rerum geritur? Aveo ex te cognoſcere. Zanottum utrumque, Franciſcum, & Euſtachium, quorum memoriam nulla mihi umquam delebit oblivio, ſaluere jubebis meo nomine plurimum. Diſpeream, niſi unam vel horum collocutiunculam, vel tuam, non dicam, Americæ, ſed univerſo terrarum orbi anteponam. Tu etiam atque etiam vale, meque, ut facis, ama.

Gregorii Casalii.

De vi pulveris pyrii per machinas dimetienda.

A Pulveris pyrii examine, atque a perveſtigatione machinæ alicujus, quæ pulveris vim ſatis exacte dimetiretur, ad projecta corpora generatim expendenda elapſo anno perductus fui, & ad machinam quamdam inveniendam, quæ eorum leges commode oſtenderet; nunc quaſi per eamdem regrediens viam, a projectilium natura ad naturam pulveris redeo, atque ab ipſa projectilibus inſerviente machina moneri quaſi videor, qua pertractandus ſit machina pulvis pyrius, quaque vis ejus exquirenda. Quamquam non illud vobis, Sodales doctiſſimi, perſuadeatis, velim, me, ſi quam vobis machinam commendavero, eam quaſi perfectam habere, atque in experimentis faciendis ab omni vel minimi erroris ſuſpicione liberam. Neque illud volo, ut conjecturas vos meas pro demonſtrationibus habeatis, nam neque illæ pro demonſtrationibus a me habentur, & ipſe facile ſentio, me provinciam inire difficultatis pleniſſimam.

Clariſſimus Fontenellius in Regalis Academiæ Scientiarum Pariſienſis hiſtoria ſub anno 1720 de pulveris pyrii examine loquens, ſic ait; „ hanc ob cauſſam excogitata fuere inſtru„ menta quamplurima, quæ in hoc peccant omnia, quod ſunt „ inſtrumenta; videlicet machinæ, quæ quamvis paucis ex „ partibus componantur, earum tamen operationes inevitabi„ libus ſunt varietatibus obnoxiæ. „ Quapropter Fontenellius valde poſtmodum celebrat Reſſonii methodum, qua pulveres abſque machinis explorantur; exploratio enim fit in modica pulveris portione, quæ ſupra chartam accenditur. Minime dubitandum eſt, quin hoc ſimpliciſſimum experimentum per maculam, qua chartam pingit, quodammodo patefaciat, quæ pulveris ſit perfectio; quoniam ſi charta vix obumbretur, pulvis optimus eſſe dicitur: ſi aliquanto plus charta inficiatur, non

optimus eſſe: ſi demum charta exardeſcit, eſſe & malus; & improbabilis. Hæc omnia Reſſonio, & Fontenellio facile concedam. Verum placeret ipſos regulas in medium promere, quibus dimetienda ſit nigrities macularum ab uno, atque ab altero pulvere in ſubjecta charta impreſſarum, ut proportio vis unius pulveris ad alterius pulveris vim determinetur. Uſque eo dum regulæ hæ deſiderantur, Pyrotechnicos non deſinam ad machinas revocare, ex quibus etſi non omnia præciſe diſcimus, per eas fit ſaltem ut non omnia omnino ignoremus. Machinæ, nec inficior, in hoc peccant, quod ſunt machinæ; attamen ſi machinæ nullæ eſſent, quæ eſſet Phyſica? Phyſica abſque experimentis ſubſiſtere recuſat, experimenta abſque machinis. Et quamvis anomaliæ bene multæ machinas, proindeque experimenta afficiant, confidit tamen Phyſica ſcientiam ſe eſſe præ ceteris utiliſſimam.

Et ſane, licet multi facienda ſit Fontenellii, atque Reſſonii auctoritas, quot & quam variis ſemper inſtrumentis pulvis pyrius fuit pertentatus, & pertentatur adhuc, ut ejus vis patefiat? Machina utuntur nonnulli, (*Fig.* 1.) quam inſidet tubulus verticalis parvam pulveris portionem capiens, qui, cum accenditur, ſuprapoſitum elevat operculum: operculum autem jungitur circumferentiæ rotæ cujuſdam mobilis circa ſuum axem, quapropter operculi elatio efficit, ut rota ſe ſe nonnihil convertat: rotæ circumferentia eſt dentibus inſtructa, qui interim dum ſimul cum ipſa circumvolvuntur, elaſtrum comprimunt, quod paullatim rotæ motum deſtruens, ipſam tandem quieſcentem reddit. Dentium numerus ſive major, ſive minor, qui elaſtri reſiſtentiam ſuperavere, vel majorem, vel minorem pulveris vim indicat. Machinam hanc doctiſſimus Sodalis noſter Chriſtianus Volfius in capite primo Pyrotechniæ commemorat. Hanc proponit Surireus e Sancto Remigio, aliam inſuper addens huic multo ſimilem, in titulo decimo tertiæ partis animadverſionum in tormenta bellica. De hac, deque alia ei ſimili agit Blondus in articulo de Inſtrumentis ad explorandos pulveres idonei, quem legimus in quinto volumine operis celeberrimi, quod Encyclopedia audit. Hanc explicat Frezierus in capite quarto primæ partis Tractationis ignium artificialium. Hujus deſcriptionem exhibet Saverienus in primo volumine Dictionarii Univerſalis rerum mathematicarum atque phyſicarum. Cæterum Saverienus ipſe ſatis declarat, ſe non

non omnino in hujus machinæ perfectione acquieſcere, cum dicat, „ dentium numerum, qui elaſtrum vincant, minime eſſe determinatum, ut pulvis optimus judicetur: & vix per hanc „ machinam pulverem unum aliquid valere cognoſci poſſe, „ ſi alio cum pulvere comparetur. „ Ad hoc incommodum illud etiam accedit, quod & a Surireo e Sancto Remigio, & a Freziero opportune animadvertitur, videlicet, „ inſtrumentum hocce obnoxium eſſe & rubigini, & tempeſtatum impreſſionibus; & ipſum poſſe, cum de eadem pulveris quantitate periculum fiat, varios variis temporibus vis gradus „ indicare, perinde ut vel magis vel minus ſit ſive nitidum, „ ſive calefactum, ſive illinitum. „ Hæc utique mihi eſſe videntur obſtacula, quæ phyſicum vel animoſiſſimum terreant.

In ſecundo volumine Imaginum, & Deſcriptionum Machinarum, quas Regalis Pariſienſis Academia probavit, una eſt ad vim pulveris expendendam ab Mejo inventa. Machinam hanc (*Fig.* 2.) efficit tubus quadratus in duo brachia contortus ad imas baſes ſimul communicantia: brachium unum verticale inſiſtit, & ſupra clauditur, aliud vero & ſupra adapertum eſt, & eſt obliquum. Tubus aqua impletur, ſed tali pacto, ut brachium verticale non impleatur ad ſummum. In partem enim inanem, & ſupra clauſam verticalis brachii vult Auctor, ut introducatur ope cochleæ quædam pulveris portio, & vult quidem, cochleam ſcilicet vehementer calefaciens, ut pulvis, quem ipſa fert, accendatur. Pulvis enim accenſus, qui cum aere externo cummunicare prohibetur, quique ſe ſe expandere contendit, urget & vim adhibet ſuam contra ſubjectam aquam, quæ idcirco e tubo expulſa, per ſummam partem obliqui brachii, quæ tantum aperta eſt, effugit. Sic comparato volumine pulveris, qui in flammam abiit, cum aquæ volumine, quæ de tubo elapſa eſt, Auctor arbitratur in hac proportione ſe & pulveris ex inflammatione expanſionem, & proinde vim inveniſſe. Ego vero aliquantum dubitarem, ne aqua, quæ foras ejicitur, pulveris majorem, quam quæ eſt, expanſionem perſuaderet. Pulvis utique ſe ſe expandens motum aquæ communicat: verum cum pulveris expanſio ſiſtatur, motus aquæ communicatus non illico extinguitur. Addite inſuper, varios pulveres forſan eadem dilatatione gaudere, dilatati autem velocitate non eadem, ſicque vi pollere varia: quocirca videtur, etiamſi aquæ e tubo egreſſæ, volumina pro-

portionalia eſſent pulverum expanſionibus, non ex hoc tamen colligendum eſſe inter ipſa aquæ volumina & pulverum vires certam intercedere proportionalitatem. Alia ſuperſunt, quæ meas in hanc machinam dubitationes augent: ſed ad machinas alias tranſeamus, nam nullam nos quidem reprehendere volumus, ſed multas proponere, ut liberum cuique ſit probare, quam velit. Unum tantum de illa Mejana dixiſſe ſufficiat, videlicet Volfium, Saverienum, Blondum, Surireum e Sancto Remigio, cum tot machinas deſcripſerint, de hac tamen ne vix quidem meminiſſe. Videtur ergo ne his quidem clariſſimis ſane viris machina ſatisfeciſſe. Cæterum Freziero placuit, qui ejus & meminit diligenter, & eam verbis extollit.

Alteram quoque Frezierus deſcribit, cujus inventus Sebaſtiano Truchetio, homini ex Carmelitarum familia ingenioſiſſimo, tribuitur. Componitur machina ad hunc modum. Ex baſi quadam horizontali (*Fig.* 3.) tubulus verticalis exſurgit. Supra baſim eandem columnarum ad inſtar duo eriguntur cylindri. Parallelepipedum ſupra ſummas columnarum ſuperficies jacet, & machinæ, ut ita dicam, epiſtylium efformat. Cylindrus plumbeus, cui perpendicularis inſiſtit lamina ferrea ex utraque parte denticulata, ſic inſtruitur ut poſſit, tum ſupra tubulum quieſcere, cum inter columnas columnis ipſis parallelus, aſſurgendo moveri. Lateralibus anſis plumbeus cylindrus columnis committitur. Lamina denticulata cum extollatur, tranſit & per rimam, quæ medium epiſtylii tenet, & inter vectes duos, quorum hypomoclia ſupra epiſtylium & columnas firmantur. Pulvere pyrio impleatur tubulus, ipſiuſque orificium cylindrus plumbeus tegat. Statim ac pulvis accenditur, ejus vis ſic urget ſuprapoſitum cylindrum, junctamque laminam, ut cylindrus inter columnas, lamina & inter columnas, & inter vectes efferatur. Vectes autem, quæ eorum eſt dentibus conveniendi ratio, laminam exſurgere ſinunt, deſcendere non ſinunt. Dentium numerus ſupra vectes elatorum aſcenſum cylindri plumbei oſtendit, & idcirco quæ pulveris pyrii ſit vis oſtendere poſſe videtur. De hac machina Blondus etiam & Surireus e Sancto Remigio locuti ſunt. Machinam, quam in rerum militarium Inſtituti noſtri ſupellectile ſervamus, ejuſdem eſſe naturæ haud inficiar. Diſcrimen omne, quod notatu dignum inter eas intercedit, in hoc conſiſtit: nimirum in Truchetii machina ſurſum pelliæ cylindrus

plum-

plumbeus ſuſtinens laminam dupliciter denticulatam, cujus aſcenſui nullum præter maſſæ gravitatem opponitur obſtaculum: in noſtra vero machina lamina horizontalis extollis, cui lamina perpendicularis inſiſtit una ex parte dentibus munita, quæ cum ſurgat, ſuperanda ei eſt vis elaſtri, quod jugiter ſe ſe inter ejus dentes configit. Quo vel adſit plumbi pondus in machina una, vel preſſio elaſtri in altera, ſemper fit, ut cum vi quadam conſtanti pulveri pyrio ſit dimicandum. Hoc in cauſſa eſt, ut me nihil a veritate aberrare cenſeam, ſi unam eandemque judicem utriuſque machinæ eſſe naturam. Machinam aliam proponit Volfius, quam pariter ad harum naturam referri arbitror. Hæc præ cæteris ſimpliciſſima eſſe videtur: utinam ne eſſet minus tuta quam ceteræ. Sed ut ad machinam Truchetii, & ad illam, quæ in Inſtituto eſt, revertar, ſciendum eſt, Pyrotechnicos, cum ipſi iſtarum ope de pulveribus variis periculum fecerint, deſideraviſſe variorum pulverum vires proportionales eſſe numeris dentium, qui ſupra elaſtrum extollebantur in Inſtituti noſtri machina, aut ſupra vectes in illa, quam Truchetius invenit. Hoc autem falſum eſſe judicarunt; viſus enim eſt illis, major dentium numerus aſcendiſſe, quam opus eſſet.

Interea Galli, rerum bellicarum omnium, ideoque & pulveris pyrii valde ſtudioſi, animadvertentes qua dubitatione Pyrotechnici ſive ſui, ſive exteri ejus vim dimetirentur, arbitrati fuerunt ex quadam globi projectione perfectum pulverem dignoſci poſſe. Utuntur ipſi mortario, cujus diameter ſeptem pollices, & tres lineæ pariſienſis quadrantes æquat: in hoc mortario, quod ſemper inclinatum eſſe debet ad horizontem angulo 45, poſito globo pondere librarum ſexaginta, & in ejus camera tribus pulveris unciis, ſi amplitudo jactus obtineatur æqualis hexapedis quinquaginta, pulvis gaudere creditur convenienti perfectione, atque vi. Ex quibus principiis, & per quas deductiones ad hoc ſtabiliendum theorema devenerint Galli, ſilent: cenſere poſſumus theorema ortum eſſe ab obſervationibus atque experimentis. Quæ autem præciſe ſit, tum forma, cum magnitudo, ſive mortarii, ſive ejus baſis ſatis colligitur ab imagine, quam præbet Surireus e Sancto Remigio in titulo decimo ſecundæ partis Operis, cujus ſupra memini. Multi ſunt Auctores, qui de hoc loquuntur mortario, ſed præ cæteris valeat Saverienus, qui animadverſione

qua-

quadam ejus conſtructionem multo & faciliorem, & minus ſumptuoſam reddere contendit.

Cum igitur Pyrotechnicorum induſtria per tot inſtrumenta tranſierit, ut, quæ eſſet tum quantitas abſoluta, tum quantitas relativa virium pulverum diverſorum, tandem perſpiceretur, cumque induſtria hæc tanta terminum quemdam fixum deſignaverit, videlicet tribus unciis dati pulveris, qui melioris eſſe notæ exiſtimatur, amplitudinem projectionis maſſæ librarum ſexaginta ad quinquaginta hexapedas extendi; mihi videtur Pyrotechnicorum induſtria omnia nobis omnino deteхiſſe, quibus opus erat, ut virium proportio quorumlibet pulverum, & vis peculiaris cujuſque cognoſceretur. Et primum cum mortario, de quo jamdudum mentionem fecimus, vel alio quocumque uti placeat, dico, data eadem ſemper mortarii inclinatione, (neque dubito quin inclinationibus omnibus inclinatio 45 graduum longe præſtet) & ſemper data eadem pulveris menſura, ſemperque eodem projiciendo corpore, nil facilius videri, quam proportionem determinare virium pulverum, qui experimento committuntur. Graveſandus in Phyſicæ Elementis paragrapho 550 oſtendit illud, „ amplitudines projectionum, manente eadem directione, „ ſunt ut altitudines, ex quibus copora cadendo, velocitates, „ quibus projiciuntur, acquirere poſſunt: ſunt ergo amplitudi„ nes ut quadrata celeritatum.„ Quocirca ſi vis nihil aliud ſit, niſi maſſa per velocitatem multiplicata, & maſſam noſtris in projectionibus eandem jugiter eſſe ſupponamus, concludere, ut plane noſtis, oportebit variorum pulverum vires rationem radicum quadratarum amplitudinum ſequi. Atque aſſumendas eſſe puto vires juxta proportionem velocitatum, non juxta earum quadratorum proportionem, quoniam amplitudines varias varia projectilia abſolvunt temporibus, quæ ſunt proportionalia radicibus earumdem amplitudinum quadratis. Sit (*Fig.* 4.) A M amplitudo corporis projecti, quod, ommiſſa gravitate, per ſolam projectionem eodem tempore ſpatium A 1 percurriſſet. Fiat dupla corporis velocitas, & tunc amplitudo, ut demonſtravit Graveſandus, erit quadrupla. Spatium itidem, quod eodem tempore corpus percurriſſet per ſolam projectionem, eſſet A 4 quadruplum ſpatii A 1, ſicuti ex parallelis M 1, P 4 deducitur. Sed cum doceant Mechanici velocitatem æqualem eſſe ſpatio per tempus diviſo, ex quo col-

colligitur tempus æquare ſpatium diviſum per velocitatem; tempus igitur primæ projectionis erit $= \frac{1}{1} = 1$, ſecundæ vero erit $= \frac{4}{2} = 2$. Qua de cauſſa ut vim projectilis determinemus, non tota ſumenda nobis erit projectionis amplitudo; per tempus enim dividenda eſt, quod eam conficiens projectile conſumpſit, quodque radicis quadratæ amplitudinis proportionem ſequitur; itaque, ut dicebam, ſtabiliendum erit pulverum vires in propoſitis experimentis futuras eſſe proportionales radicibus amplitudinum quadratis.

Eſt ergo quodlibet mortarium inſtrumentum ſatis idoneum ad pulveres explorandos. Cæterum experimenta, quæ mortario capiuntur, nimium ſpatium, nimiumque laborem requirunt; quid quod & ſumptum nimium? Quapropter, etſi Pyrotechnici valde aſſueverint hæc omnia ſuſtinere incommoda, aſſueſcent, credo, multo libentius tanta animi indulgentia non indigere. Id nunc me hortatur, ut pyrotechnicos vocem ad machinam ſimilem illi, quam in opuſculo meo: de machinula quadam ad projectilium theorias per experimenta probandas: expoſui. Illa projectilium machina ex ea naturæ lege deducta erat, quæ præcipit tum, cum corpus in planum incidens elaſticitatis vi reflectitur, angulum incidentiæ æqualem eſſe angulo reflexionis. Cadat (*Fig.* 5.) corpus per AC perpendicularem horizonti OR, & reflectetur per eandem lineam CA. Si volumus ipſum reflecti per lineam CX, quæ cum perpendiculari angulum ACX datum efficiat, opponatur corporis caſui AC planum PI efficiens cum horizonte angulum $OCP = \frac{ACX}{2}$. Quod ſic oſtenditur. Sit linea CM perpendicularis plano PI. $PCA = ICX$, quorum unus incidentiæ eſt angulus, alter reflexionis. $ACM = MCX$, quippe angulorum æqualium complementa. $OCA = PCM$, quoniam recti: quorum ex utroque ſi dematur angulus PCA, tunc erit $OCP = ACM = \frac{ACX}{2}$. Nec minus theorema hoc valet, ſi (*Fig.* 6.) determinato puncto C reflectente in quovis plano horizontali OR, linea reflexionis CX ſub eodem plano horizontali cadat. Semper enim demonſtrabitur angulum $OCP = \frac{ACX}{2}$. Et quemadmodum linea incidentiæ AC conſtituit lineam reflexionis CX; ita ſi linea XC ut incidentiæ linea ſu-

ſumeretur, lineam C A reflexionis ipſa conſtitueret. Quamobrem ſi non amplius conſiderando corporis caſum A C, conſideremus potius (*Fig.* 7.) ejus aſcenſum X C, lineam reflexionis quamcumque inveniemus, juxta regulas datas planum mobile P I ad horizontalem planum inclinantes, cum & in hoc caſu æque theorema ſubſiſtat, & pari modo demonſtretur. Quæ tum dixi de corporis caſu, nos machinam phyſicam docuerunt; quæ nunc dicam de aſcenſu, docebunt pyrotechnicam.

Sit igitur (*Fig.* 8.) tubulus verticalis potens modicam continere pulveris portionem. Sit globus ferreus diametrum habens majorem, quam quæ eſt tubulo, ita ut globus a tubuli ore ſuſtineri queat: juvat autem in globo centrum figuræ centrumque gravitatis coire. Sit planum marmoreum robuſto machinamento affixum, atque horizonti inclinatum, quod pellat globus ex pulveris tubuli accenſione elatus, ut reflectatur, & quamdam projectionem obtineat, & parabolam deſcribat. Sit demum tabula horizontalis, quæ ſi protraheretur planum marmoreum verſus, tangens fieret globi impactionis momento: hanc autem tabulam terra mollis tegat, ut & cadentem globum excipiat, & deſcriptæ parabolæ amplitudinem deſignet.

Machina hæc eſt, ſi quid judico, ſimpliciſſima, quam ex projectilium legibus non inutiliter colligi poſſe arbitratus ſum. Juvat corpore uti reflexo ad quamlibet projectionis directionem expendendam, quia cum e pulvere pyrio corpori communicanda ſit vis, neceſſe eſt pulverem hunc pyrium poſitum eſſe in recipiente verticali, cui & commode ſemper aptari poteſt, & ſemper eodem modo, neque nimis, ut probe aptetur, agitandus eſt, neque ne agitetur, comprimendus. Juvat copore uti ex materia multo gravi, & volumine non admodum exiguo, quia cum ex data quadam vi motrice tanto minor velocitas prodeat, quanto major eſt maſſa, quæ moveri debet, ita, ſi magna ſit maſſa, quæ parabolas deſcribat, parabolæ deſcribentur parvæ, parvæque habebuntur amplitudines, ex quarum radicibus quadratis, uti dictum eſt, pulverum vires erunt menſurandæ.

Verum quia accidere haud difficile poteſt, ut ob maximam pulverum efficaciam, facto etiam parvo lineæ projectionis, & lineæ verticalis angulo, non tamen parva ſit parabolæ am-

amplitudo, & idcirco tabula horizontalis requiratur longiſſima; in mentem venit tabulæ horizontali perpendicularem tabulam ſubſtituere. Hac autem (*Fig.* 9.) in tabula, quam æque ac aliam, tectam ſuppono terra molli, ut projecti globi impreſſiones recipiat, & patefaciat, en qua methodo dimetiendæ ſint pulverum vires. Notetur in tabula altitudo impreſſionis, quam in ipſam faceret projectile, niſi obtemperandum ei eſſet legibus gravitatis. Conſiderentur impreſſiones, quas revera globus facit percitus atque jactus cum ab uno pulvere tum ab alteris. Menſuretur pro unoquoque pulvere altitudinis differentia, quæ intercedit inter impreſſionem, quæ abſque gravitate fieret, & impreſſionem, quæ projectione gravitateque ſimul agentibus fit. Dico, vires variorum pulverum ſequi proportionem radicum quadratarum reciprocam harum differentiarum. Enimvero (*Fig.* 4) ſuppoſitis, A projectionis initio, M 1 tabula verticali, 1 loco impreſſionis, cui gravitas nihil præſtaret, M impreſſionis loco, quam projectile ob datam quamdam vim utique facit, B alius impreſſionis loco, quam ob vim aliam deinde faciet, certiſſimum profecto, eſt vim primam ſe habere ad ſecundam ut $\sqrt{1B}$ ad $\sqrt{1M}$. Clara & brevis de hoc eſt demonſtratio: dum prima vis urget corpus motu uniformi per ſpatium A 1, gravitas ipſum trahit motu uniformiter accelerato per ſpatium 1 M; dum vis ſecunda urgebit corpus motu uniformi per idem ſpatium A 1, gravitas motu uniformiter accelerato ipſum trahet per ſpatium 1 B; ſpatia autem percurſa motu uniformiter accelerato ſunt ut temporum quadrata; igitur tempus primæ vis eſt ad tempus ſecundæ ut $\sqrt{1M}$ ad $\sqrt{1B}$; ſed vim exprimit ſpatium diviſum per tempus; ergo vis primæ projectionis erit ad vim projectionis ſecundæ ut $\frac{A1}{\sqrt{1M}}$ ad $\frac{A1}{\sqrt{1B}}$: quod idem eſt ac dicere ut $\sqrt{1B}$ ad $\sqrt{1M}$.

Jam videtis, Sodales doctiſſimi, quam facile ſit (*Fig.* 8. 9.) vel hac perpendiculari tabula, vel altera horizontali virium proportionem cognoſcere variorum pulverum, dummodo in partes æquales dividatur ſive perpendicularis altitudo unius, ſive longitudo horizontalis alterius, cum longitudo horizontalis proportionem virium oſtendat ope proportionis directæ radicum quadratarum amplitudinum, oſtendatque altitudo perpendicularis

ris proportionem virium ope proportionis reciprocæ radicum quadratarum deſcenſuum perpendicularium corporis relatorum ad unam eandemque portionem lineæ directionis projectionis.

Si machina hæc aliquid valere credatur, operæ pretium erit duo animadvertere. Quod ad primum attinet, ſi tabula utamur horizontali, optimum erit directionem projectionis quærere, quæ cum linea verticali efficiat angulum 45°, niſi obſtet vel nimia pulverum vis, vel tabulæ longitudo nimis parva. Habebitur hic angulus 45°, facto juxta regulas jam traditas angulo $OCP = \frac{90^{\circ} + 45^{\circ}}{2} = 67^{\circ} + 30'$. Sin autem tabula utamur perpendiculari, deſiderandum eſt lineam directionis projectionis ad verticalem accedere, ita ut angulus e duabus hiſce lineis confectus parvo graduum numero conſtet. Sic enim in tabula horizontali majores habebuntur amplitudines, in tabula vero perpendiculari majores deſcenſus.

Quod conſiderandum ſecundo loco eſt, reſpicit (*Fig.* 9.) tabulam tantum perpendicularem. Poſita Q o linea reflexæ directionis projectionis, determinanda eſt horizontalis diſtantia Q X, quæ intercedit inter centrum globi momento reflexionis & tabulam, atque altitudo tabulæ o X ab hac linea horizontali uſque ad ejus tabulæ cum linea directionis projectionis concurſum. Atqui data diſtantia dat altitudinem: dataque altitudo dat diſtantiam: nam o Q X triangulum eſt rectangulum, cujus duo latera Q X, o X repræſentant ſinus duorum angulorum, quorum unuſquiſque alterius eſt complementum.

Verum de hac machina ſatis ſit dictum. Projectilium leges me hanc promere hortabantur; attamen (quis crederet?) leges ipſæ nunc monent, ut ſileam. Res ita ſe habuit. Poſtquam animadverti nulla fortaſſe meliori methodo æſtimari poſſe pulverum vires, quam ſi eas per projectilia expenderemus, quo tandem ad hujus machinæ inventionem deductus fui, en hoc mihi perpendendum ſe ſe obtulit, videlicet machinam aliam, & ipſam quoque ſimpliciſſimam, jam inventam fuiſſe, qua Pyrotechnici & perſequi poſſent pulverum vires, & eas projectionum legibus ſubjicere. Machina Pyrotechnicis multo ab hinc tempore præ manibus erat: Pyrotechnici autem non ſatis advertebant, illam projectilium leges continere: ſic interim dum ipſa utebantur, quis eſſet ejus uſus minus intelligebant

Ma-

Machina hæc eſt, (*Fig.* 3.) quam Truchetius tradidit. In hac pulvis accenſus perpendiculariter extollit cylindrum plumbeum & ſuprapoſitam laminam. Sed inter corporis projectiones conſideranda adhuc eſt projectio perpendicularis. Hæc quoque projectio parabolam deſcribet, cujus ſi parameter ad axem quæratur, parameter hæc invenietur $=$ o. Parameter $=$ o dabit ordinatas $=$ o, quo fit ut parabola in lineam rectam convertatur. Hanc ob cauſſam in projectionibus verticalibus ab radicibus quadratis amplitudinum, quæ nullæ ſunt, neque diſtinguere poſſumus vires, neque dimetiri; eas autem colligere licebit ex radicibus quadratis altitudinum. Quod illa demonſtrant, quæ loquitur Graveſandus docens invenire cujuſcunque projectionis altitudinem, & brevius etiam demonſtrare poſſunt, quæ ab immortali Galileo de gravium aſcenſu atque deſcenſu dicta fuere. Statuo igitur, machinam Truchetii de pulvere pyrio periculum facere projectione verticali, hujuſque vim dimetiendam eſſe a radice quadrata numeri dentium laminæ, qui poſt & laminæ, & ſubjecti cylindri aſcenſum ab vectibus ferreis ſuſtinentur. Quomodo hæc, Sodales ſapientiſſimi, attribui poſſint & machinæ, quæ in Inſtituto noſtro eſt, facile intelligitis. Si ergo vel machina Truchetii, vel alia ei ſimilis ſatis ſuperque præſtabat, ut vis pulveris cognoſceretur, incaſſum videri fortaſſe poterat, me novam adjicere. Sed affinitas, quæ & novam hanc pyrotechnicam machinam, & veterem illam phyſicam, de qua alias diſſerueram, ſimul jungit, ſuadebat, ut ita dicam, ne, cum de una dixiſſem, de altera ſilerem.

Hæc ſunt, quæ mihi communicanda vobiſcum erant de methodo dimetiendarum pulverum virium; neque tamen multum ad rem facere arbitror, ſi objiciatur, machinas, quas vel antiquas commendo, vel novas propono, ut maxime oſtendere poſſe, qui pulvis plus valeat, quique minus. Etenim machinæ hæ, proportionem virium oſtendunt variorum pulverum, qui comparantur; ergo ut, præter virium proportionem, ſive, quod idem eſt, præter relativas pulverum vires, vis quoque abſoluta cujuſque pulveris innoteſcat, quod ſecundo loco quærendum ſupererat, explorare tantum ſufficit, machina, qua uti volumus, pulverem, cujus vis abſoluta ſit nota; veluti pulverem illum, tres cujus unciæ ex Gallorum mortario ad quadragintaquinque gradus inclinato globum ſexaginta libras ferri continentem ad quinquaginta hexapedarum diſtantiam projicit.

Ad quam cognitam pulveris vim cum per machinam, qua experiundo utimur, vires aliorum pulverum incognitæ referantur, tunc cognitæ fient omnes, ſuamque unaquæque quantitatem abſolutam patefaciet, ſicque etiam quæcumque monebit quando, & quanto ſive excedat, ſive defficiat, ut probe inſerviat vel gerendis bellis, vel ignibus comparandis feſtivis, vel venationibus capiendis, vel cæteris, ſi qui ſunt, uſibus præſtandis.

Quoniam vero non ſolummodo experiri intereſt æqualia variorum pulverum volumina, ut eorum virium proportio, deindeque vis cujuſque abſoluta perſpiciatur, expedit varia etiam comparare ejuſdem pulveris volumina, quippe quia creſcentibus voluminibus creſcunt utique vires, nec tamen utraque augentur juxta proportionem ordinatam, cum magis augeantur vires quam volumina, uti colligitur ex primo articulo ſecundæ partis doctiſſimi operis, cui ab Auctore Belidoro titulus inſcribitur Balliſtarius Gallus, inſtituenda eſſe arbitror experimenta, tubulo tantum, qui continet pulverem, mutato, videlicet tubulo altero ei ſubſtituto, cujus capacitas capacitate ſublati tanto vel major, vel minor ſit, quanto vel majus, vel minus volumen eſt pulveris, quem experiri volumus. Credo machinam, quam propoſuimus, ſi cum tabula perpendiculari adhibeatur, præ cæteris ad hæc præſtanda experimenta idoneam eſſe. Si ab experimentis de eodem variorum pulverum volumine captis, data abſoluta vis quantitate unius pulverum ſpeciei, quantitates abſolutæ virium omnium aliarum ſpecierum eruantur, mihi ſane videntur, ab experimentis, quæ de variis ejuſdem pulveris voluminibus ſuſcipiantur, eadem methodo determinari poſſe vires omnium voluminum pulveris cujuſque alterius generis, dummodo vis alicujus voluminis ipſius pulveris nota ſit.

Tandem aliquando, doctiſſimi humaniſſimique Sodales, deſinam, ad pulverum pyriorum examen, magni procul dubio momenti rem, & machinas, & experimenta vobis proponere. Quæ adhuc propoſui ea vos emendabitis, ac tum demum mihi ſatis probabuntur.

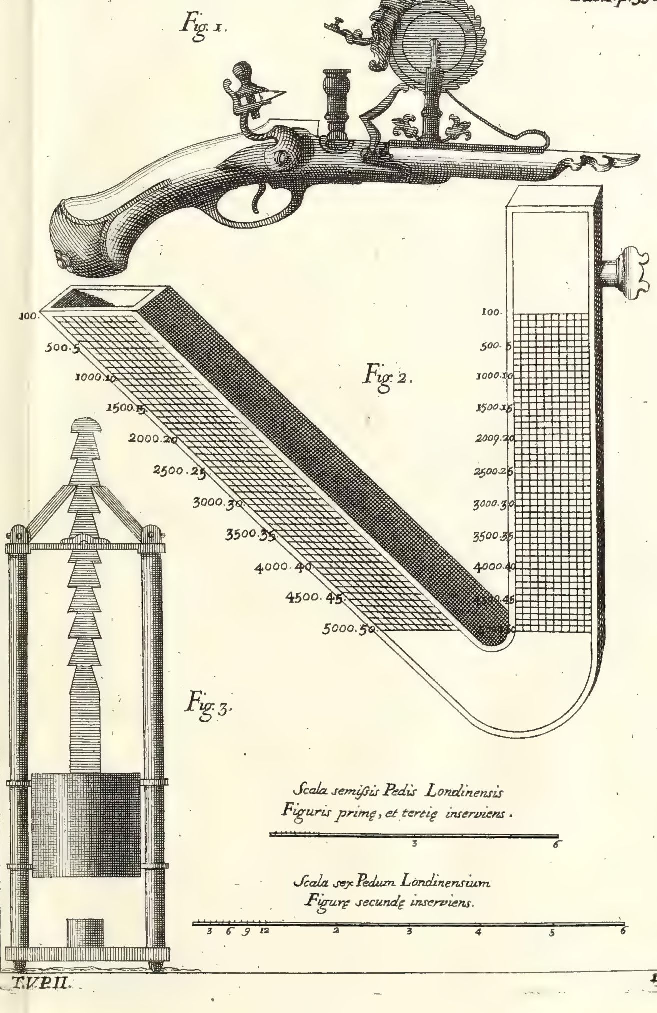

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
100.
500. 5
1000. 10
1500. 15
2000. 20
2500. 25
3000. 30
3500. 35
4000. 40
4500. 45
5000. 50
Scala semiſsis Pedis Londinensis
Figuris primę, et tertię inserviens.
3
6
Scala sex Pedum Londinensium
Figurę secundę inserviens.
3 6 9 12
2
3
4
5
6

Fig. 4.

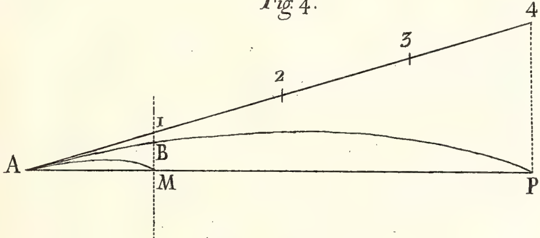


Fig. 5.

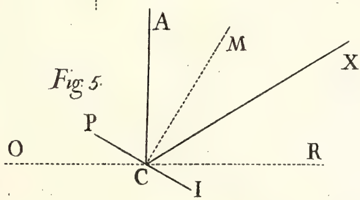


Fig. 6.

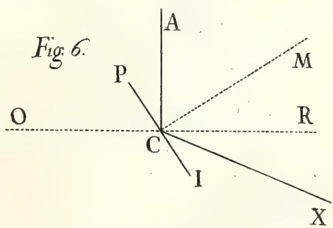
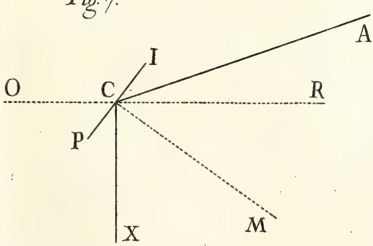
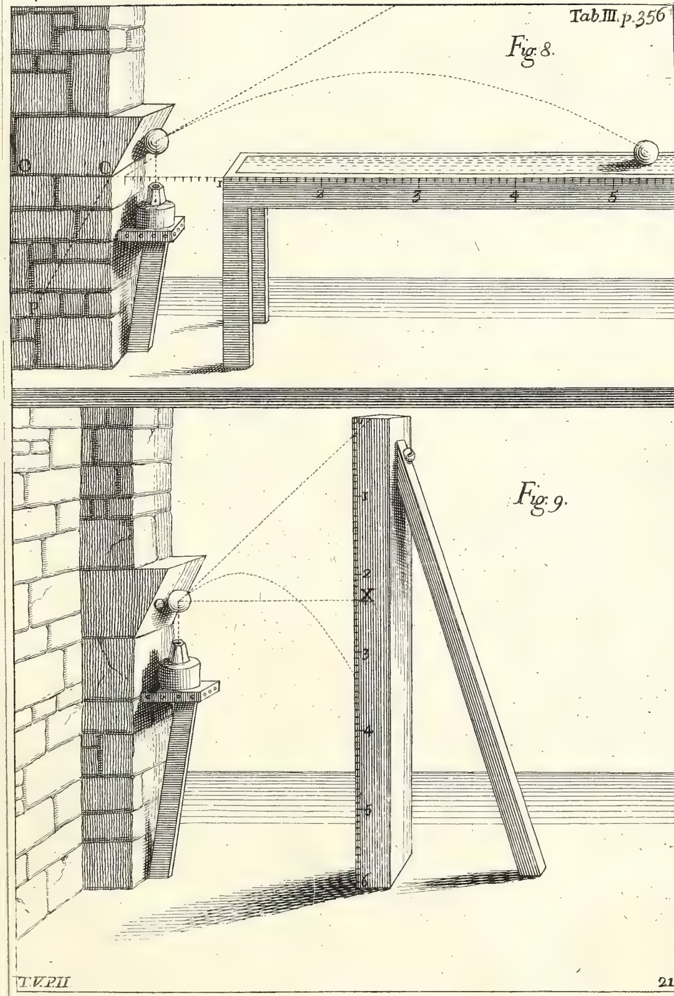


Fig. 7.




Fig. 8.
C
C
P
1
2
3
4
5
Fig. 9.
1
2
X
3
4
5
6

GREGORII CASALII.

De ictu pulveris pyrii.

SIcuti invenire methodum expedit, qua cujuſvis datæ vis quantitatem dimetiamur, ita pro nihilo non eſt reputandum inquirere, in quo vis ipſa conſiſtat, undeque proveniat. Quapropter, Sodales doctiſſimi, quoniam mihi elapſo anno per vos conceſſum fuit quaſdam hic promere animadverſiones in machinas, quibus quantitas vis pulveris pyrii exploratur, ſinite æquo animo, nunc precor, me nonnullas addere conjecturas de hujuſce vis principio atque natura. Pudebat, me, quanta eſſet vis hæc, quæſiviſſe; unde eſſet, omnino ignorare.

Quod primo loco ſtatuendum arbitror, hoc eſt, videlicet pulveris vim æſtimandam eſſe ex illo ictu, qui impertitur vel globo ferreo, vel cuilibet alteri corpori, ut ſive globus, ſive corpus quodcumque velocitatem quamdam concipiat, qua obſtacula, contra quæ dirigitur, impellat. Neque ſane dubitandum eſt, quin in hoc toto actionum commercio accurate ſerventur leges communicationum motuum. De quo nec verbum quidem feciſſem, niſi quædam ſupputatio a celebri Mariotto in ſuo de aeris natura ſpecimine allata, aliquantulum infirmare videretur hanc ipſam ſuppoſitionem. Non ſunt tanti hominis, quantus Mariottus eſt, difficultates prætereundæ. Has ergo primum tollere aggrediar.

Accedens Mariottus ad explicandas dilatationem & condenſationem aeris, oſtendere contendit corporum dilatationem non conſtitui a diſiunctione particularum corpora componentium. Sententiæ ſuæ demonſtrationem colligere confidit a pulveris pyrii accenſione. Supponit ipſe pulveris 20 libras contineri in cubiculo, cujus parietes ſatis craſſi robuſtique ſint, fornix vero 54 lapidibus conſtet, quorum uniuſcujuſque pondus 500 libras æquet. Accendatur pulvis, & vis ejus ita ur-

gebit

gebit contra fornicis lapides, ut eorum aliqui ad altitudinem uſque extollantur 20 pedibus pariſienſibus majorem. Poſtquam Auctor hoc enarravit experimentum, probare nititur, partes pulveris inflammati, quæ impellunt lapides, ipſis tribuere tantam elevationem vi earum ictus non poſſe. Auctoris argumentum ſequenti calculo innititur. Quoniam libræ 20 accenſi pulveris actionem quaquaverſus exercent ſuam, pars tantum pulveris ſexta, ideſt unciæ 54, actionem hanc contra fornicem exercebit. Sed fornicis lapides cum 54 ſint, pulveris uncia quemcumque lapidem urgebit, & idcirco maſſa unciæ urgebit maſſam 500 librarum, ſeu maſſam unciarum 8000. Velocitas pulveris ſumitur ab Auctore æqualis velocitati globi tormentarii, qui extolli poteſt ad altitudinem pedum 3000, quod idem eſt ac pollicum 36000, ſive linearum 432000. Quibus poſitis, juxta percuſſionis leges ſi velocitas unciæ pulveris, quæ uncias 8000 lapidis impellit, exprimatur per gradus 8001, pulvis ſuo ictu unum tantum velocitatis gradum lapidi communicabit. Cum autem gravium aſcenſus ſequantur proportionem directam quadratorum velocitatum, oportere videtur lapidem non plus exſurgere quam ad altitudinem $\frac{1}{148}$ lineæ; ſic enim ſe habet 64016001 quadratum 8000 ad 1 quadratum 1, ut 432000 lineæ ad lineæ $\frac{1}{148}$. Porro aſcenſus hic eſſet inſenſibilis, quod experientiæ repugnat. Tali pacto argumentatur doctiſſimus Mariottus corporum dilatationem a partium eorum ſeparatione omnino differre. Quod utrum verum ſit, & ex ſuppoſitionibus atque theoriis Auctoris ſatis deducatur, ipſi videant Phyſici; nam quemadmodum meum nunc non videretur eſſe hoc negare, ſic nequaquam volo ad hoc concedendum obſtringi.

Mihi tantummodo examinandum propono, an vere probet Auctor partes pulveris inflammati, quæ lapides impellunt, non tantam vi ictus poſſe gignere lapidum elevationem. Opponit Mariottus calculum ingenioſiſſimum, ſed valde vereor, ne calculus oppoſitiones ſuſtinere non valeat, quæ in ipſum convertuntur. Arbitratus eſt Mariottus ſextam unice partem pulveris accenſi contra fornicem agere, de quo quis poſſet cum ipſo tam facile conſentire? Sed hoc omiſſo, eſt ne juxta leges percuſſionis & communicationis motus ponere velocita-

tem

tem pulveris æqualem velocitati globi ferrei, qui a pulvere jactus eſt? Cur Mariottus, quoniam ipſe judicat leges haſce aliud diverſum concludere ab illo, quod per ſuum experimentum concluditur, cur, inquam, non animadvertit & maſſam pulveris, quæ motum communicat, & globi maſſam, cui motus communicatur? Si pulvis totus computaretur, qui ad jaciendum globum in tormentum immittitur, pulveris maſſa ſe haberet ad maſſam globi ut 1 ad 3. Verum ſi placuit Mariotto in ſuo experimento conſiderare pulverem ſecundum proportionem illius partis ſuperficiei ejuſdem pulveris, quæ reſpicit lapides dimovendos, ideſt ei placuit conſiderare $\frac{1}{3}$ pulveris, ſumenda pariter erat ex cylindro pulveris, qui in tormento accenditur, quique accenſus emittit globum, portio ea tantum, quæ eſſet ad totum ut circulus maximus globi ad integram ſuperficiem cylindricam pulveris, quæ eſt circiter proportio 1 ad 7; igitur maſſa pulveris ſic ſe haberet ad maſſam globi, uti $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$ ad 1: ſeu uti $\frac{1}{21}$ ad 1. Quod cum verum eſſet, ſupponenda erat a Mariotto 22 vicibus major pulveris velocitas. Immo cenſeo Mariottum eam ſupponere debuiſſe multo majorem: nam ſi accenſio pulveris fit, ſicuti vel ipſe concedit, ad inſtar ſphæræ, multæ pulveris partes, quæ globum impuliſſent, agentes juxta directionem axis tormenti, non amplius pellent nimis divergentes factæ, multæque aliæ, quæ ipſum aliqua obliquitate impuliſſent, pellent obliquitate majore, vel per directiones ipſum tangentes effugient, & ideo aliæ minorem ei communicabunt velocitatem, aliæ nullam. Ex his conſiderationibus, atque ex multis aliis, quas colligere datum eſt, effectus omnes diligenter perſequendo, quos pulvis producit, interim dum ex tormento projicit globum, arbitror dilucide apparere longe majorem eſſe pulveris velocitatem velocitate globi a pulvere jacti.

Addite, precor, conſiderationem alteram, quam miror fuiſſe a Mariotto prætermiſſam. Intererat animadvertere velocitatem 20 librarum pulveris valde differre a velocitate maſſæ pulveris æqualis $\frac{1}{3}$ ponderis globi, niſi globi pondus 60 libras æquaret. Doctiſſimus Belidorus in ſecunda parte Operis, cui titulus eſt Balliſtarius Gallus, oſtendit tempora accenſionum pulveris ſequi proportionem multo minorem proportione $\sqrt[3]{}$ maſſarum, quæ accenduntur. Quod probat, ſi pondus globi

a Ma-

a Mariotto ſuppoſiti minus ſit 60 libris, libras 20, quæ in cubiculo accenſæ fuerint, debuiſſe juxta proportionem magis magiſque ad ſe ſe inflammandas properare, ac proinde majorem concipere velocitatem, quam minor illa pulveris quantitas in tormento incluſa concipiat. Nec ab re ſit adjicere, diverſam figuram maſſarum pulveris, diverſamque methodum qua ipſæ accenduntur, præſtare poſſe, ut pulvis vel citius, vel tardius incendatur, & idcirco ut ſit pulvis ſeu majore, ſeu minore velocitate donatus; & ſane maſſæ pulveris, quæ in tormento continetur, (etiam ſi maſſæ figuram mittamus, quæ ſecundum multorum ſententiam non omnino probabilis cenſenda eſt) accenſionem, quæ tam longe a centro principium ſumit, minime ſperandum eſt accenſionibus aliis feſtinatione antecellere.

Veſtrum jam ſit, Sodales ſapientiſſimi, judicare quantum valeat Mariotti calculus ad ſeparandam ab idea vis pulveris ideam ictus, quo vis hæc percutiat ſive globum, ſive lapidem, ſive aliud quidpiam, cui ſe ſe communicet. Minime vero arbitror, quoniam calculum Mariotti ſuſtuliſſe videor, me demonſtraviſſe hujuſmodi ictus exiſtentiam. Cæterum neſcio, cur ſupponi nequeat pulverem impertiri ictum objectis reſiſtentibus, iiſque partem ſui motus communicare; in quo ictu omnes profecto ſerventur leges communicationum motuum, habito, ut par ſit, reſpectu maſſarum, & figurarum, & graduum vel duritiei, vel elaſticitatis corporum, quæ ſive per actionem ſive per reactionem in conflictum veniant; neque dubitandum eſt, quin ſicuti maſſa pulveris, momento temporis omnino accenſa, eſſet elaſtrum, cui facultas ſe ſe expandendi concederetur, ſic maſſa pulveris, quæ flammam paulatim concipiat, elaſtrum ſit, quod & lentius expandatur, & regulis magis compoſitis. Attamen mihi non eſt opus demonſtrare hunc ictum, dum vis pulveris globo communicatur, ſatis enim eſt me poſſe ictum ſupponere vi jam communicata, & hanc vim conſiderare, non quatenus globo ſenſim communicabatur, ſed quatenus communicata plane eſt, & globum inſidet, & ex partibus omnibus, quæ communicatæ antea fuerunt quaſi ſumma unica componitur. Hoc pariter uſurpant Phyſici, dum corporis velocitatem indicant, dicendo, tantam eam eſſe, quantam acquireret corpus ſi a quadam altitudine caderet, quod idem eſt ac dicere, ſi corpus caderet

per

per quoddam tempus; extremo caſus momento quantitatem inſpiciunt motus communicati, nec amplius eorum intereſt recordari motum ſucceſſive communicatum eſſe. Ac ſimili methodo utuntur expendentes motum, qui corpori ab elaſtrorum ſerie communicatus fuit, quoniam conſiderantes corporis motum, cum is factus jam eſt æquabilis, ita motum conſiderant, ut ſi communicatus fuiſſet per ictum aliquem. Enimvero ad pulverem regrediendo, placet in medium vocare auctoritatem clariſſimi Deſagulerii, qui de hac re eodem modo judicavit. Cum ipſe loquatur de actionis & reactionis æqualitate in annotatione nona quintæ lectionis Phyſicæ experimentalis, problema exponit, quod ipſe ingenue fatetur ſe ab amico accepiſſe. Quæritur in problemate vis globi tormentarii pondere 24 librarum. Problematis ſolutionem ob actionis & reactionis æqualitatem colligit Auctor ex inventione vis, quam pulvis exercet contra tormentum, interim dum tormento expellit globum. Suppoſitis ab Auctore, globi pondere $= 24$, ideſt 24 libris, & globi velocitate $= 640$, quoniam creditur globum 640 pedes londinenſes minuto ſecundo percurrere, his, inquam, ſuppoſitis, ait Auctor pulverem ob momentorum æqualitatem dare ictum tormento vi $= 15360$. At cum hujuſce expreſſionis diligentia non ei omnino ſatisfaciat, conatur ipſe videre cui ponderi, numero librarum exprimendo, æqualis ſit hæc vis; qua de cauſſa animæ tormenti ſuppoſita longitudine $= 12$ pedibus londinenſibus, & ſuppoſito pulverem, cum flammam concipiens ſe ſe dilatat, pellere globum velocitate uniformiter accelerata, quæ æquabilis tunc demum fit, cum globus e tormento exiit, comperit tandem Auctor auxilio calculi multo elegantiſſimi hanc vim æqualem eſſe ponderi 12800 librarum. Quare ſi, quamvis animadverſum fuerit hanc vim communicari tempore aſſignabili accenſionis & expanſionis pulveris, placet tamen Deſagulerio, pulverem dare ictum tormento, non video quid prohibeat quo minus ſupponam ipſe pulverem globo ictum jam dediſſe.

Conſideretur igitur vis pulveris, cum fuerit globo communicata, veluti ictus, quo globus percuſſus fuit; conſideretur vis hæc, ut ictus, cum pulvis commendetur machinis illis, quæ hanc ipſam vim dimetiuntur, quod maxime utile erit Balliſtariis, quorum ſupputationes commodiores reddet, eorum vero theoriarum, & deductionum certitudinem minime infir-

mabit. Attamen concedatur mihi pauliſper hanc vim liberius ſumere, & ejus communicatione omiſſa, me aliquibus conſiderationibus naturam ejus, & ultima actionis ſuæ principia, atque originem perſequi.

Amplitudo nominis immortalis Nevtoni ſic omnem orbem comprehendit, ut nemo fortaſſe ignoret quod ille dicit in decima ex quæſtionibus, quæ in fine Opticæ poſitæ ſunt; videlicet „ Pulvis tormentarius, quum ignem concipit, abit „ in fumum flammantem. Carbo nimirum, & ſulphur ignem „ concipiunt facillime, nitrumque accendunt; nitrique ſpiritus „ inde in vaporem rarefactus, proruit cum exploſione; ſimi- „ liter ac aquæ vapor ex æolipila. Sulphur quoque, ut eſt „ volatile, convertit ſe itidem in vaporem; id quod exploſio- „ nem illam adauget „ & aliquanto poſt Auctor maximus addit. „ Exploſio itaque pulveris tormentarii oritur ex celeri „ ac violenta actione, qua tota permixtio ſubito, & vehe- „ menter calefacta rareſit utique, vel convertit ſe in fumum „ ſive vaporem: qui denique vapor actionis iſtius violentia „ eodem tempore candefactus, flammæ nimirum ſpeciem ex- „ hibet. „ Hactenus Nevtonus. Clariſſimus Sodalis noſter Franciſcus Vandellius in Opuſculo, quod tomo quarto Commentariorum noſtræ Academiæ adjungitur, vim pulveris & ipſe deducit præcipue a vapore, in quem reſolvitur aquoſus humor, qui in nitro continetur. Hujus ſententia videtur mihi non maxime a ſententia Nevtoni diſcrepare. Incredibile obſequium eſt, quo ſummum afficio Nevtonum: ad Vandellum autem me trahit præter obſervantiam, conſuetudo atque benevolentia antiquiſſima: tamen ſum ego ab utriuſque opinione aberraturus. Fore utique ſpero ut amicus libenter mihi ignoſcat, qui ſane gaudebit ſententiam ſuam cum Nevtoni potius ſententia componi quam cum mea.

Neque ingenio tamen meo opinionem, quam ſequor, tribui volo. Hanc enim ſecuti ſunt parvo cum diſcrimine Boyleus, Delahireus, Joannes Bernullius, Belidorus, aliique non pauci; ſed hujuſmodi opinio minus tuta videri cœpit, poſtquam ſententia magni Nevtoni pervulgata fuit. Jam intelligitis, Sodales, me vim pulveris tribuere elaſticitati aeris, qui in ipſo continetur, quique ex ipſo inflammationis cauſſa erumpit, & expanditur. Hanc ſane opinionem cum ſemper multo probabilem judicaviſſem, & cum tandem ſtatuiſſem Academiæ

ex-

exponere argumenta, quæ illam mihi perſuaſerant, ac de ea egiſſem ſæpius cum Sodalibus noſtris doctiſſimis Franciſco Maria Zanotto, Petronio Matteuccio, Laura Baſſia Veratta, Joſepho Veratto, Bartholomæo Beccario, ecce tibi e typis Auguſtæ Taurinorum volumen primum Commentariorum privatæ quidem Societatis, ſed cum publicis & regiis comparandæ. Quo in volumine ſermones exſtant duo eruditiſſimi, elegantiſſimique Equitis Salutii, qui noſtram hanc opinionem valde ſuſtinent atque confirmant. Non ſum arbitratus, Sodales optimi, hanc ob cauſſam impediri me, quominus ipſe adhuc loquar pro hac ſententia. Quin immo libentius id facio, poſtquam experimenta & argumentationes eruditiſſimi Salutii eo me adduxerunt, ut mihi jam ſententia ipſa & clarior videatur, & verior.

Si vim pulveris explicans a Nevtono recedo, & a quocumque eam ſtatuente in vapore quodam, ad hoc faciendum Nevtonus ipſe me invitat ex tertio libro Principiorum Mathematicorum Philoſophiæ Naturalis, cum in prima philoſophandi regula doceat „ Cauſſas .... non plures admitti debere, „ quam quæ & veræ ſint & .... phœnomenis explicandis „ ſufficiant. „

Sufficere aeris elaſticitatem ad explicanda, quæ a pulvere ſuppeditantur, phœnomena, res mihi videtur ſatis ſuperque perſpicua. Dilatationes ſummæ, ſummæque conſtipationes, quas aer ſuſtinere potis eſt, aeri ineſſe elaterium tam magnum oſtendunt, ut ſane ab ipſo pulveris elaterium dependere poſſit. Innumerabiles prope ſunt experientiæ, atque obſervationes Mariotti, Boylei, Halleſii, quæ de hac mirabili aeris elaſticitate fidem faciunt. Inter Mariotti experimenta, duo præcipue ſunt, quæ in ſupra citato Auctoris Opere legimus, quæque, ſi quid judico, non modicum probant elaſticitatis ſive aeris, ſive pulveris analogiam. Experimenta referam: nam quamvis Mariotti calculum recuſavi, experimenta recipio: difficultates bene multæ me a calculo amovebant, ab experimentis amovit nulla.

Animadvertendum eſt primo pulverem ob accenſionem ſic expandi, ut ſpatium acquirat, quod ſe habet ad ſpatium, quod non accenſus occupabat, alias uti 4000 ad 1, alias uti ad ipſam unitatem numerus etiam multo major, qui aſcendit non raro ad 5000 uſque, & ulterius. Diſſenſio, quæ inter

Auctores intercedit ſicut & inter Balliſtarios in hac ſtabilienda ſpatiorum proportione, oritur forſan a circumſtantiis & anomaliis pulverum variis, qui experimentis committuntur, & ab experiundi methodis non eiſdem.

Enimvero ſi admittatur in pulvere dilatatio = 4000, adeſt utique Mariotti experientia, quæ videtur nos monere hanc eſſe ipſius aeris dilatationem. Quærens Mariottus uſquequo aeris dilatatio extendatur in aqua, quæ multam partem cujuſdam vaſis implet, immergit collum phialæ vitreæ inverſæ aqua omnino plenæ. Ponitur deinde vas ſub recipiens machinæ pneumaticæ, e quo cum paulatim aer extrahatur, quædam aeris bullulæ ad fundum ſurſum proſpicientem phialæ aſſurgunt, & parvum aeris volumen componunt. Extracto tandem omni aere, prout fieri poteſt, a recipiente, aer in phiala vehementer expanſus invenitur, nec non tanta ei remanet elaſticitas, ut aquam vaſis ſuſtineat, quæ circum phialam elata eſt. Aere autem in recipientem reſtituto, aer in phiala contrahitur. Mariottus ſpatia aeris phialæ ſtudioſe dimetitur, & obſervat ſpatium, quod occupat aer hic dilatationi ſubtractus, eſſe = $\frac{1}{4000}$ ſpatii quod expanſus occupabat. Ecce igitur aerem dilatationem illam promere, quam nonnulli ſe in pulvere inſpexiſſe affirmarunt. Quod ſi aer in ſtatu dilatationis circumſtantem ſuſtinebat aquam, ſe adhuc elaſticum eſſe, uti dictum eſt, demonſtrabat, atque idcirco oſtendebat, & ei commodam eſſe dilatationem = 4000, & poſſibilem ei dilatationem eſſe majorem. Quod præterea cognoſcitur ex hoc, videlicet, aerem, qui tantum ſe ſe dilatavit, dilatatum & ipſum jam fuiſſe, cum demum aer idem egeat aqua iterum aſcendente in phialam, ut æquilibrium inſtituat cum aere recipientis, quod idem eſt ac dicere cum naturali aere atmoſphæræ. Hoc porro ſufficere poteſt ad analogiam inter pulveris dilatationem & dilatationem aeris oſtendendam, non tantum illis, qui pulveri tribuunt dilatationem = 4000, ſed illis etiam, qui majorem concedunt.

Attamen iſtorum gratia opportunius erit ad alteram experientiam confugere. Acutiſſimus Mariottus poſtquam agnovit aerem cum aqua miſceri, inque ipſa diſſolvi, agnoſcere etiam ſe putat, quæ dilatatio aeri concedenda ſit, cum is in aqua hæſerit. Quocirca aquæ guttam ſic pertractat & angit,

ut

ut aerem extrahat, qui in ipſa continebatur, quique a vaſculo quodam vitreo excipitur, quod aere ſe impleri oſtendit, ſe ſe exhauriens fluido alio, quo refertum erat. Qua ſe gerat induſtria ingenioſiſſimus Auctor in hac experientia, longum eſſet deſcribere, neque tamen eſt neceſſarium. Illud potius animadvertatur, quod vel ipſe Auctor obſervavit. Deprehendit nempe, quamvis calor cujuſdam gradus ex aqua aerem eliciat, quo paulatim vaſculum vitreum, uti notatum eſt, impleat, calorem tamen majorem educere ex aqua materiam quamdam fulminantem, quæ ſtrepitu vaſculum ingreditur, & ex eo fluidum pene omne, quod aderat, ejiciendo, maximam capacitatis ejus partem momento temporis occupat, deindeque ſtatim veluti in nihilum redigitur, neque ad ſenſum auget aeris quantitatem, quæ minoris caloris ope in vaſculum jam præcurrerat. Argumentatur Auctor hanc eſſe materiam, quæ potis ſit dilatari magis quam aer, minime dilatetur autem calore mediocri; & addit inſuper eſſe forſan aliquid huic materiæ ſimile, quod abſconditur vel in ſale tartari, vel in nitro, & ſalia hæc reddit fulminantia.

Verum en quod, Sodales humaniſſimi, ex hac experientia mihi videor colligere poſſe, & ad pulveris theoriam traducere. Primo loco exiſtimo duas iſtas materias, quarum ex aqua crepitans una, altera placida egrediuntur, nil aliud eſſe præter aerem; nempe vero earumdem differentiam in hoc ſitam eſſe, quod materia una minori vi cum aqua jungatur, altera autem vi majori. Deindeque libenter aſſentio materiam illam, quæ difficilius ab aquæ vinculis liberatur, ipſam eſſe, ob quam ſal tartari, & nitrum fulminationes explodunt; quamvis non improbabile eſſet in nitro utramque adeſſe materiam, propter illum, quem clariſſimus Vandellus noſter obſervavit „ humorem aqueum, qui abunde in nitro continetur. „ Attamen nitrum conſiderantes, quod baſis eſt pulveris, materiam illam, quæ aquæ vel maxime adhæret, præſertim expendamus. Quod ut fiat, placet duo adnotare. Sit primum. Cum elaſtrum aperimus, directionem quamdam intelligere oportet qua aperimus; cum autem hæc materia, vel ipſa e nitro, vel e pulvere educatur, ſe ſe expandit, intelligatur oportet materiam & diſtrahi, & dirigi quaquaverſus, dilatatio elaſtri communis, quod aperitur, dicatur volo dilatatio linearis: dilatatio hujus materiæ ſolida dilatatio, aut dilatatio corporea.

Se-

Secundum. Materia hæc, cum ſe ſe explicat, & dilatat, non utique ſiſtit ſtatim ac ad naturalem aeris denſitatem pervenit, ſed antequam in hoc ſtatu demum quieſcat, ob conceptam vim multo magis expanditur. Quam legem etſi cæteris elaſtris quis negaret, experimenta doctiſſimorum Philoſophorum atque obſervatorum diligentium ſatis docent & confirmant naturam elaſtro huic impoſuiſſe. His ita conſtitutis videatur jam, quæ eſſe debeat hujus elaſtri dilatatio, ut dignoſcatur quantum pulveris dilatationibus aſſimiletur.

Dico igitur, haberi ſpatium majoris dilatationis iſtius elaſtri, multiplicando per ſe ipſum numerum, qui exprimit elaſtri denſitatem in ſtatu compreſſionis, ſuppoſita denſitate naturali $= 1$. Quod, ut clarior ſim, exemplo explicabo. Sit elaſtri conſtipati denſitas 64 vicibus major denſitate naturali: dico ſpatium maximæ dilatationis eſſe ad ſpatium conſtipationis, ut $64 \times 64 = 4096$ ad 1. Quod, audite, precor, quomodo mihi probari videatur. Sumantur, ut ſimiles, figuræ, quæ circumſcribunt elaſtrum ſive conſtipatum, ſive in naturali ſtatu, ſive in maxima diſtractione, immo ob majus commodum ſumantur ut ſphæræ. Sit ergo, ſequendo exemplum propoſitum, denſitas conſtipata ad denſitatem naturalem, ut 64 ad 1; erunt quoque per primam definitionem primi libri Principiorum Mathematicorum ſummi Nevtoni eorum ſpatia in ratione reciproca, ideſt uti 1 ad 64. Et ideo ſi o 1 (vide tab.) ſit diameter denſitatis conſtipatæ, erit o 4 diameter denſitatis naturalis; ſunt enim $1 = \sqrt[3]{1}$, $4 = \sqrt[3]{64}$. Nunc autem notandum eſt, quod ipſe incomparabilis Nevtonus in propoſitione XXIII ſecundi libri demonſtravit, videlicet; „Si fluidi ex „ particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut com„ preſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciproce pro„ portionales diſtantiis centrorum ſuorum.„ Aer interea, qui profecto elaſtrum componit, quod nunc expendimus, ſi experientias, & theorias amplectamur, quas Mariottus exhibet in citati ſui operis principio, fluidum eſt, de quo affirmandum quod „denſitas ſit ut compreſſio.„ Ergo ſi in ſtatu naturali aeris particulæ ſe ſe repellebant ita ut una ab altera diſtaret intervallo o 4, in ſtatu conſtipationis particulæ eædem, quæ non amplius diſtant niſi longitudine $\frac{o4}{4} = o\,1$, ſe ſe repellent, uti monet Nevtonus, vi aucta juxta proportionem re-

reciprocam diſtantiæ, ideſt vi, qua tendet particula una ab altera recedere ſpatio 4 vicibus majori primo ſeu diſtantia $\overline{o4} \times 4 = o\ 16$. Proinde ſi fiat cubus lineæ o 1, & cubus lineæ o 16, ideſt cubi & 1 & 16, habebitur ex proportione iſtorum cuborum, nempe 1 & 4096, proportio ſpatii materiæ conſtipatæ ad ſpatium ejuſdem materiæ maxime expanſæ. En tandem maximam dilatationem expreſſam per numerum 4096, quod idem ſcilicet eveniſſet, ſi numerus 64 per ſe ipſum fuiſſet multiplicatus, Revera cum 1, 4, 16 ſint in proportionalitate geometrica continua, ſequitur $16 \times 1 = 4 \times 4$, ſive $16 = 4^2$; & ideo cubus numeri 16 idem erit ac cubus ſecundæ poteſtatis numeri 4; ſed cubus quadrati idem eſt ac quadratum cubi, igitur pro cubo numeri 16, qui cubus æqualis jam viſus eſt cubo ſecundæ poteſtatis numeri 4, ſumi poterit quadratum cubi numeri 4, ideſt quadratum numeri 64; qui numerus cum exprimat ſpatium naturale ſuppoſito conſtipationis ſpatio = 1, exprimit etiam denſitatem materiæ conſtipatæ ſuppoſita denſitate naturali = 1. Atque ut hoc majori videatur brevitate, fiat $o4 = n$, & idcirco $o16 = n^2$: dico $n^3 \times n^3 = n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$.

Jam deprehendite, Sodales ſapientiſſimi, quamvis ſuppoſuerim, ut quodam uterer exemplo, denſitatem conſtipatam = 64, attamen demonſtrationem eſſe univerſalem, eodemque modo ſubſiſtere, quiſquis ſit numerus, qui hanc exprimat denſitatem. Verum non inficior, me arbitrio quodam numerum hunc elegiſſe. Electionis hæc fuit ratio. Juxta experimentum a doctiſſimo Joanne Bernullio inſtitutum, & ab ipſo in paragrapho XXII Diſſertationis de Efferveſcentia & Fermentatione nobis relatum, e granulo uno pulveris inflammati aer tantus exit, ut ſpatium occupet, quod continere poteſt pulveris granula 50. Interſtitia granulorum 50 in hoc ſpatio clauſorum tertiam ejuſdem ſpatii partem comprehendent, ſi granula ſint prorſus rotunda, & ſic in ſpatio accommodata, ut imæ ſuperiorum granulorum partes tangant partes ſummas granulorum inferiorum; ſi vero hæ deſint conditiones, (& plane deſunt ambæ) interſtitia comprehendent, ni fallor, minus quam quartam partem ipſius ſpatii: quod etſi aliquo modo demonſtrari poſſet quod ad granulorum collocationes, multo minus ſane demonſtraretur quod ad eorum figuras, quarum in-

infinita irregularitas vix ſinit confugere ad rudes obſervationes, & ad deductiones minime rigidas. Si ergo interſtitia occuparent $\frac{1}{4}$ ſpatii, exprimendum eſſet ſpatium non per numerum granulorum 50, quæ continet, ſed per numerum, ad quem ita ſe haberet numerus 50, ut $\frac{3}{4}$ ad 1; qui numerus eſſet *66* + $\frac{2}{3}$. Immo quia interſtitia minus occupant, quam $\frac{1}{4}$, elegi numerum *64*, qui inſuper cum eſſet cubus, & faciliorem calculum, & commodiorem demonſtrationem ſuppeditabat. At vero, quoniam demonſtratio univerſalis eſt, aſſumi quidem poteſt numerus *66* + $\frac{2}{3}$ ad exprimendam conſtipationem, & tunc erit maxima dilatatio = 4444 + $\frac{4}{9}$. Et ſi tamen ſupponi placeat interſtitia occupare $\frac{1}{3}$, exprimatur conſtipatio per numerum 75, & tunc habebimus maximam dilatationem = 5*6*25. Quæ maximæ dilatationes nimirum tales ſunt, quales ſe obſervaviſſe monent Amontonius, Belidorus, Vandellus, cæterique Auctores celeberrimi.

Neque jam diſſimulo duas neceſſarias eſſe ſuppoſitiones, ut recte affirmetur dilatationes has maximas eſſe veras; nempe ſupponere oportet cum Belidoro „ pulverem inflammatum nil „ aliud eſſe præter aerem ſummopere rarefactum; „ & cum Mariotto „ condenſationem aeris augeri juxta proportionem, „ quæ ipſum comprimunt. „ Si vero ſuppoſitiones hæ duæ aliquam patiantur exceptionem, ſatis mihi erit in argumento, in quo tam difficile eſt exacte cognoſcere verum, me ad verum aliquantulum accedere voluiſſe.

Poſtquam expenſum fuit utrum in pulvere aer „ phœno„ menis explicandis ſufficiat, „ reliquum eſſet exquirere an in pulvere hujus cauſſæ præſentia realiter ſubſiſtat, ut legi Nevtoni, & Philoſophiæ perfecte obediatur. Sed ego quidem puto Hauksbejum, Halleſium, Bernullium, Salutium, & alios hoc ita demonſtraviſſe, ut ſpem ademerint prope omnem demonſtrationi quidpiam adjungendi. Attamen ſi liceat pauciſſima quædam & parvi admodum momenti addere doctrinis atque inventis excellentibus, & numero, ut ita dicam, infinitis, breviſſimas ſimpliciſſimaſque experientias memorabo, quas mihi placuit inſtituere. Philoſophi hi ſummi aerem e pulvere extraxerunt, ſolventes nitrum in partes, quæ ipſum conſtituunt, eſſentiales. Arbitrabar ego rem aliquanto ulterius procedere potuiſſe, ſi extraheretur aer vix ſolvendo nitrum in partes ejus

in-

integrales. Etſi non amplius fas eſſet demonſtrare in pulvere veritatem exiſtentiæ aeris, videbatur tamen non injucunda prorſus fore methodus, qua demonſtraretur facilius.

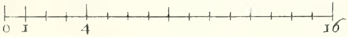
Soluta igitur fuerunt in 140 caratis aquæ putealis carata $23 + \frac{3}{8}$ nitri. Aqua nitrata in vaſe vitreo contenta, atque in alio vaſe vitreo contenta aqua alia, cujus pondus pariter 140 carata æquabat, poſitæ fuerunt ſub recipiente machinæ pneumaticæ. Et obſervato atmoſphæræ pondere reſpondente altitudini barometricæ pollicum pariſienſium $28 + \frac{1}{12}$; extractus fuit paulatim a recipiente tantus aer, ut machinæ hydrargyrum ad pollices $26 + \frac{6}{12}$ aſcenderet. Interea ex utraque aqua prodibat aer, ſed aeris quantitas, quæ ex nitrata aqua educebatur, longe maxima apparebat. Aer deinde recipienti conceditur, deindeque paulo poſt a recipiente exhauritur aſcendente hydrargyro uſque ad altitudinem pollicum $26 + \frac{7}{12}$. Ex aqua nitrata ingens quantitas bullularum aeris ſurgit, ex non nitrata aqua bullulæ vix aliquæ rariſſimæ. Altera quoque die eadem repetita fuit experientia. Pondus atmoſphæræ reſpondebat altitudini barometricæ pollicum $27 + \frac{7}{12}$. A recipiente extractus fuit aer uſque ad hydrargyri aſcenſionem pollicum $26 + \frac{9}{12}$. Obſervationes eædem prorſus fuerunt, niſi quod phœnomenon quoddam in conſpectum venit non inelegans videlicet ex ſumma nitratæ aquæ ſuperficie exibant frequentes materiei ſubtiliſſimæ jactus, quæ a $\frac{3}{4}$ pollicis altitudine decidens leviſſimam venuſtiſſimamque pluviam repræſentabat.

Quamvis experientiæ iſtæ ſatis probarent, aerem educi e nitro ob ejus in aqua ſolutionem, nihilominus inſpicere hoc ipſum placuit auxilio ſyncerioris experientiæ. Quam ecce. Pro aqua puteali uſus ſum aqua nuper diſtillata. Reſpondebat atmoſphæræ pondus altitudini barometricæ pollicum $27 + \frac{3}{12}$. Cœptus eſt exhauriri aer recipientis. Jam apparebat per aquam nitratam perenne aeris, ut ita dicam, flumen ſurſum decurrens, ex non nitrata aqua nihil habebatur, hydrargyro ad altitudinem 12 pollicum elato. Cum hydrargyrum ad altitudinem aſcendiſſet pollicum 23, aqua non nitrata bullulas aeris

dedit pauciſſimas, poſt quas omnino nullas etiam in majori aeris recipientis rarefactione. Aer vero tantus a recipiente demptus fuit, ut hydrargyrum extolleretur ad pollices $26 + \frac{4}{12}$: in qua rerum conditione nihil turbabatur flumen aeris per nitratam aquam exſurgens, immo factum erat & copioſius, & vehementius. Haud ſilendum eſt de alia hujus experimenti circumſtantia. Aderat nempe ſub recipiente præter vaſa duo aquam diſtillatam ſive nitratam, ſive non nitratam capientia, vas tertium, quod aquam putealem minime nitratam continebat. Præbuit hæc aqua conſuetas aeris bullulas, quarum tamen numerus longe minor erat numero bullularum ab aqua, quæ nitrum ſolverat, profluentium, quamvis aqua iſta fuiſſet diſtillata.

Experimenta hæc igitur oſtendebant, opus non eſſe ſolutione compoſiti, ſed ſimplicem ſufficere ſolutionem continui, ut aer ex nitro habeatur permultus. Hiſce tamen experientiis alia eſt adjuncta, quæ majorem in nitro ad aerem ſuppeditandum facilitatem & alacritatem eſſe declarat: per hanc enim experientiam nitrum neque ſolutionem compoſiti, neque ſolutionem continui patitur; itaque cum magnam aeris quantitatem exhibeat, dicendum eſſe videtur, aerem hunc quadam affinitate devinctum ſive nitro adhærere, ſive in poris ejus majoribus abſcondi. Experientiam narro. Pondere atmoſphæræ adnotato, quod reſpondebat altitudini barometricæ pollicum $27 + \frac{6}{12}$; poſitum eſt ſub recipiens machinæ pneumaticæ vas vitreum continens oleum tartari pondere duplo majori, quam pondus fuerit aquæ antea adhibitæ. Extractus eſt aer a recipiente, nec dedit oleum bullulas, præter rariſſimas & exiliſſimas, atque in ſumma aeris recipientis rarefactione. Aer recipienti redditus eſt: deinde in oleum caratis $23 + \frac{3}{8}$ nitri infuſis, iterum a recipiente aer extrahebatur: quod vix inchoatum erat, quando cœpit per oleum exſurgere bullularum aeris flumen, quod ſtatim factum eſt copioſiſſimum, & cœpit ſupra oleum ſpumam bene altam extollere, quæ ſpuma, quodque flumen jugiter augebantur interim dum recipientis aer exhauriebatur: exhauſtus autem fuit uſque ad hydrargyri elevationem pollicum $26 + \frac{9}{12}$. Experientia alias alio tartari oleo tentata

eſt;



$$n^3 \times n^3 = n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$$

$n = 4$ $\qquad$ $n^6 = 4096$

$n = \sqrt[3]{66 + \frac{2}{3}}$ $\qquad$ $n^6 = 4444 + \frac{4}{9}$

$n = \sqrt[3]{75}$ $\qquad$ $n^6 = 5625$

eſt; ſed cum periculum tunc fieret in vacuo de oleo tantum, ideſt de oleo abſque nitro, oleum hocce non modicam aeris quantitatem dedit, quo oſtendebat ſe eſſe male ſaturum. Oleo, quantum poſſibile fuit, expurgato, tandem committitur nitrum. Oleum denuo ſub recipiens eſt poſitum, e quo extracto aere en per oleum excurrere bullularum flumen longe copioſiſſimum. Poſtquam experientiam aliam de oleo tartari ſatis felicem retuli, ſecundam minus tutam præterirem, niſi hæc utique me alliceret ob phœnomenon, quod hanc ornavit, non alteram. Intra bullulas aeris e nitro educti, quæ flumen ſæpe deſcriptum componebant, jactus pulcherrimi identidem extollebantur bullularum aeris longe majorum: quod veriſimiliter repetendum erat ab humido male ſaturo in oleo contento, cujus humidi ope partes nitri nonnullæ ſolvebantur: in ipſis enim experientiis per aquam captis, ſi, antequam nitrata aqua vacui periculo ſubjiceretur, aliquæ nitri portiones vel minimæ ſolvendæ ſupererant, poſita ſub recipiente aqua, exhauſtoque recipientis aere, ſolvebantur interdum, jactuſque omnino ſimiles edebant.

Neque ego, Sodales ſapientiſſimi, obſervationes multas, & multas conjecturas narrabo, quæ de pauciſſimo experientiarum numero ortæ ſunt. Sufficit mihi, me ex his omnibus collegiſſe ſummam eſſe aeris quantitatem, qui nitrum comitatur, non tantum ſe ſe inſinuans in ejus partes eſſentiales, ſed & partibus integralibus ſe miſcens, & in majoribus poris jacens, & ad externos parietes adhærens. Narrare hoc potius gaudebo, videlicet, me debere has poſtremas de oleo tartari experientias monitis atque documentis celeberrimi Beccarii, ſimulque fatebor tantum eſſe, quod tum in his tum in primis experientiis debeo & conſilio, & operæ doctiſſimorum humaniſſimorumque Sodalium Lauræ Baſſiæ, & Joſephi Veratti ejus Conjugis, ut mihi videar ipſis omnia omnino debere.

JOANNIS BAPTISTÆ MARTINI

EX ORDINE MINORUM CONVENTUALIUM.

De uſu progreſſionis geometricæ in Muſica.

QUod omnes partes, quibus mundi univerſitas conflatur, non ſolum aliæ ad alias, ſed etiam ad univerſam rerum naturam relatæ, perfectam quamdam, certamque rationem ſervent; ac præterea earum unaquæque (ne illa quidem vitali aura, qua communiter cum beſtiis veſcimur, excepta) ſuam conſtanter naturam uſque eo retineat, dum admirabilia fœdera inter elementa, quibus coaleſcit, a ſapientiſſimo rerum omnium Opifice poſita ſubſtantialiter non ſolvantur; ea fuit doctiſſimi Platonis præclariſſima ſententia, quam a Pythagoreis, qui ante floruerant, acceperat. Quæ profecto ſententia probari cuique vel maxime debet, ut quæ & iis, quæ ſacris libris traduntur, inprimis conſentanea eſt, & infinitam Creatoris Sapientiam ſummopere commendat. Verum quod hæc partium conjunctio, hocque (ſic enim vocare poſſumus) univerſale vinculum, quo res omnes mirabili quodam modo nectuntur, plane detegi, atque in aperto poni poſſit, & reapſe dici debeat ad normam alicujus *geometricæ progreſſionis* temperatum, id mihi quidem, ſi quid judico, nec certum videtur, nec omnino ab erroris ſuſpicione vacuum. Nam ut cetera mittam, ſi in *ſonis* dumtaxat conſiſtamus, ad eoſque generale illud placitum applicare velimus, jam illico apparet, in intervallis ab ea progreſſione deductis non illa omnia contineri, quibus merito, & cum laude his temporibus utimur, atque ante uſi ſunt majores noſtri; ut propterea non ad *ſingulare*, *& ſimplex principium*, ſed ad *diſtinctum*, *& diviſum*, *& diverſum*, *& multiplex* ampliſſimus muſicæ apparatus ſit revocandus. Quam quidem rem cum demonſtravero, gratum mihi erit, quod, quantum in me erat, deſiderio, & expectationi plurium doctorum hominum ſatisfecero,

cero, qui me ſæpe alias ea de re percontati ſunt meam ſententiam ſciſcitantes.

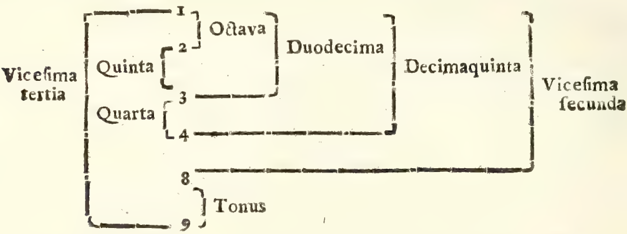
Series quantitatum, quæ ſe mutuo æqualiter continent, a mathematicis *progreſſio geometrica* dicitur: eaque *aſcendens*, ſi termini ſint deinceps alii aliis majores; *deſcendens*, ſi contra accidat. Tam vero hæc, quam illa *finitæ*, vel *indefinitæ* nomen ſibi adſciſcit, pro eo ut limitem terminorum numero ponimus aliquem, vel nullum. Pro vario autem modo, quo unus terminus alterum continet, varia, eaque valde diverſa oriuntur hujuſmodi *progreſſionis* genera; dicitur enim exempli cauſa *ſubdupla*, cum ſecundus terminus, qui *conſequens* appellari ſolet, duplus eſt primi, qui dici conſuevit *antecedens*; *ſubtripla* vero, cum is eſt tertia pars illius; atque ita porro. Quod ſi primus terminus, ſive *antecedens* duplus ſit ſecundi, ſeu *conſequentis*, dicitur abſolute *dupla*; ſimiliterque, ſi triplus, *tripla*; ſicque deinceps. Denique non ſolum quatenus unus terminus alterum contineat, aut in altero contineatur arbitrarium prorſus eſt, modo in eadem ſerie eadem ubique ratio ſervetur, ſed etiam a quo maxime termino *progreſſio* initium ducat, qui *terminus radicalis* dicitur.

Jam vero duas ſibi finxit Plato lineas, in quarum communi vertice conſtitutum eſſet unitatis ſignum; eoque accepto tamquam *aſcendentis finitæ progreſſionis ſubduplæ* initio, exterius atque ad ſiniſtram intuentis ſigna adjecit numerorum 2. 4. 8, ita quidem ut iis ex æquo, & pari ductu diſpoſitis poſtremum 8 extremo unius lineæ reſponderet: ſimiliterque fecit ad dexteram *progreſſione* uſus *aſcendente*, *finita*, *ſubtripla* appoſitis videlicet ſignis numerorum 3. 9. 27 præter jam ante conſtitutum unitatis ſignum tamquam *radicalem terminum*, ſeu *principium numerorum*; quo factum eſt, ut ſecundæ lineæ extremo reſponderet 27. Hocque peracto, ſatis

1
2 3
4 9
8 27

ſe expreſſiſſe judicavit *rationes*, ſeu *proportiones*, quibus *harmonicæ conſonantiæ* continerentur tam *ſimplices*, ſive *primitivæ*, quam *compoſitæ*, ſeu *duplicatæ*, *triplicatæ*, &c. Enimvero ſi in *ſerie* *ſub-*

ſubdupla unitas referatur ad 2, *diapaſon*, ſeu *octava* ſe prodit; ſin ad 4, *bis-diapaſon*, ſeu *duplex octava*, quæ eſt *decimaquinta*; ſi denique ad 8, *tris-diapaſon* reſultat, ſive *octava triplex*, aut *viceſimaſecunda*. In altera porro ſerie unitas ipſa ſi referatur ad 3, exhibet *diapaſon-diapente*, ſive *duodecimam*; *tris-diapaſon-tonum* vero, ſive *viceſimamtertiam*, ſi referatur ad 9. Quod ſi numeri unius *ſeriei* cum numeris conferantur alterius, tria alia obtinentur *intervalla*, quæ ſpatia vocamus ab uno ſono ad alium: hic autem, & deinceps numerum *majorem* ad *minorem* ſemper comparabimus; idque commodius erit; ſic enim fractiones facilius declinabimus. Itaque 3 ad 2 comparantes, *diapente*, ſeu *quintam* conſequimur; 4 autem ad 3, *diateſſaron*, ſeu *quartam*; 9 denique ad 8, purum *tonum*.

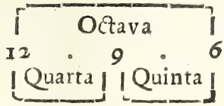


De numero 27 hic ſpeciatim non dicemus; fuit enim hic numerus aliis uſibus a Græcis deſtinatus.

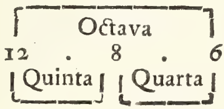
Quo autem *intervalla* inveniret componentia ea, quæ modo retulimus, ſumſit Plato octavam, quippe in qua *intervalla* omnia ſimplicia contineri debent, eamque duobus modis diviſit, *arithmetice* ſcilicet, & *harmonice*, ut mox oſtendam.

Progreſſio arithmetica eſt ſeries numerorum, qui æqualiter ſe mutuo deinceps ſuperant. Ita numerus 3 unitate ſuperat numerum 2, eum vero unitate pariter ſuperat numerus 4; ex quo numeri 2. 3. 4 *arithmeticam progreſſionem* formant. Etiam in hoc *progreſſionum* genere *radicalis terminus* pro voluntate conſtitui poteſt, itemque quantitas, qua unus terminus alium ſuperet. Nunc *multiplicans* tres *quartæ*, *&* *quintæ* terminos, nempe 4, 3, 2, per medium 3 obtinuit rurſus Plato eamdem *arithmeticam ſeriem* expreſſam numeris 12. 9. 6. Quæ ſeries ei *intervalla* præbuit, quæ ipſas *primarias conſonantias* præſeferunt;

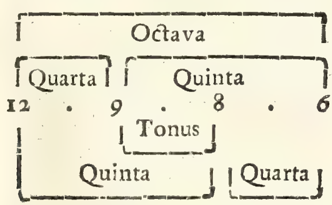
runt, *quartam*, *quintam*, *octavam*; etenim $3:2 = 9:6$, & $4:3 = 12:9$, & $2:1 = 12:6$.



Progreſſio harmonica eſt ſeries trium numerorum, quorum hæc eſt ratio, ut differentia inter primum & ſecundum ſe habeat ad differentiam inter ſecundum & tertium, uti ſe habet primus ad tertium. Hujuſmodi ſunt numeri 12. 8. 6; eſt enim $4:2 = 12:6$, ubi 2 eſt differentia, quæ inter 8 & 6 intercedit, & 4 differentia, quæ intercedit inter 12 & 8. Ab hac quoque ſerie deduxit Plato primitiva illa, quæ diximus, *intervalla*.



Attamen deerat adhuc illuſtri Philoſopho in utriſque *ſeriebus*, nempe *arithmetica*, atque *harmonica*, inſignis illa communis menſura cujuſque *ſpeciei diatonici generis*, quæ *tonus* dicitur; quam ut ab eiſdem aliquo modo eliceret, opus ei fuit illas veluti ſimul conjungere, & arbitrariam quamdam numerorum in eis expreſſorum *ſeriem* ordinare.



Atque, quod ego quidem ſciam, Græci, ut generatim loquar, ulterius expoſitas *progreſſiones* non protraxere: fuiſſet enim

enim id iis fortaſſe inutile, & certe ſupervacaneum, quippe quibus *progreſſiones* illæ etiam limitibus, quos deſcripſimus, coercitæ jam optatum finem attulerant, deductionem ſcilicet *toni*, atque eorum præcipue *intervallorum*, quæ *perfectas conſonantias* præſeferrent tam *ſimplices*, quam *compoſitas*; namque has poſtea *dividentes*, ſimulque, aut cum aliis *intervallis* a diviſione ortis *componentes*, modo etiam *ſubtractione*, ubi opus eſſet, utentes, brevi ſuum illud celebre *muſicum ſyſtema* mirum in modum auxerunt.

Sed ad *diateſſaron*, ſeu *quartam* (quæ cum ex quatuor conſtet *ſonis*, ſive *chordis*, græce *tetrachordon* etiam dicitur) inprimis animum attentiſſime converterunt, ea maxime utentes, ut *intervalla*, quæ in ſucceſſiva *diapaſon*, ſeu *octavæ* propagatione media ſunt, eruerent: nam quamquam poſſent etiam ad eam rem *diapente*, ſeu *quintam* adhibere cum eadem *quarta* conjunctam, tamen ſolam *diateſſaron* uſurpantibus via ſe ſe aperuit minus difficilis, atque adeo expeditior: eſt enim apud Græcos *diateſſaron* inter *primitivas conſonantias* minima, eademque bis ſeparatim in ſerie iterata ſtatim integram *octavam* exhibet.

Cujus aſſertionis veritas ut manifeſta appareat, præmittenda ſunt, quæ ſequuntur. *Tonum* cum dicimus, ordinarium commune *intervallum* hic intelligimus, quod unum inter & alterum *gradum* ſive *ſonum* in ipſa naturali ſonorum ſerie intercedit. Quilibet *tonus* intelligi debet diviſus in plures inter ſe æquales partes humano auditui in quibuſdam circumſtantiis ſenſibiles, quarum unaquæque *comma* nuncupatur, eaque, quæ diviſi *intervalli* ultima eſt, prope jam eſt, quin etiam omnino eſt ipſiſſimus proximus gradus, quem cum is, qui voce, aut muſico aliquo inſtrumento canit, non aſſequitur, noſtras aures moleſtia afficit, quippe quia quod *intervallum conſonans* fuiſſet, fit *diſſonum*. Non omnis *tonus* ejuſdem eſt magnitudinis; alius enim eſt *major* in proportione *ſeſquioctava* 9 : 8; alius *minor* in proportione *ſeſquinona* 10 : 9. Similiterque *comma* eſt aliud *majus* in proportione 531441 : 524288, aliud vero *minus* in proportione 81 : 80. Propterea *tonus* non ſemper eodem partium numero componitur; nam pro eo ut *tonus* eſt vel *major*, vel *minor*, & conſtat *commatis majoribus*, vel *minoribus*, varius ſit oportet partium numerus. Utraque hæc diviſio non niſi progreſſu temporis invecta fuit apud

Græ-

Græcos. Græci itaque *quartam* in duos *tonos majores* diviſerunt, atque illam præterea partem, quæ reliqua eſt, ſeu in eum præterea numerum *commatum*, quæ ad ejus complementum requiruntur. Hic *commatum* numerus appellatus fuit *hemitonium*, ſeu *Limma*, quamquam non ſit, & non poſſit eſſe dimidia pars *toni*, ſed ab ea aliquantum diſtet, ut propterea *hemitonii minoris* nomen ſibi adſciverit, idque eamdem ob cauſam, propter quam *hemitonium majus*, & græco vocabulo *Apotome* vocata fuerat pars illa, quæ remanet in *tono* demto *Limmate*; hæc enim dimidia *toni* parte major eſt. At id non impedit, quominus *quartam* alio etiam modo dividerent, nimirum in unum *tonum majorem*, in unum *minorem*, atque in unum *majus hemitonium*; ſed hujuſmodi partitio interdum, & ſolum iis temporibus, quæ noſtris propiora ſunt, uſuvenit: contra prior illa plerumque, & temporibus remotiſſimis ſemper uſurpata fuit.

Sed diviſiones, quas memoravimus, locum ſibi vindicarunt tantum in *genere diatonico*, quod ita dicitur, quia ex tonis conſtat, & eſt robuſtum, & grave. At in *genere chromatico*, ideſt ſuavi, & molli, tributa fuit *quarta* in duo *hemitonia* ſucceſſiva, atque in *trihemitonium* ex uno *tono & hemitonio* compoſitum, quod dicitur *tertia minor incompoſita* Similiterque in *genere enharmonico* (quod ſic vocarunt quaſi *difficile, & eruditum*, ſicque *genus* etiam *doctorum* dixere) fuit diviſa *quarta* in duo ſucceſſiva *dieſis*, ſive in duo quaſi *dimidia hemitonia*, quæ etiam *toni quartas partes* nuncuparunt, atque in duos *tonos* ſimul junctos *incompoſitos*, quod intervallum *ditonum*, ſeu *tertia major* dicitur.

Porro *quartæ* diviſionem, quam primam attulimus in *genere diatonico*, ſumſerunt, tamquam eam, quæ commodior eſſet, atque illam quidem inprimis, in qua *hemitonium* primo ſtaret loco a gravi ad acutum progrediendo (nam *hemitonium* interdum ſecundo quoque loco poſitum fuit, aliquando etiam tertio, ſicque *ſpecies diateſſaron* plures fecerunt); tum ſucceſſivam *octavæ* propagationem ſic ordinarunt. In ipſo initio *hemitonium* poſuere, poſtea *tonos duos*, atque ita primam *quartam* abſolverunt: dein *intervallum* appoſuere, quod *tonum diazeuticum*, ſeu *tonum diſiunctionis* appellarunt (eo enim modo *octava quartis* duabus componebatur ſeparatis, ac diſiunctis, ut ſupra innuimus): denique tria illa priora, quæ diximus,

mus, *intervalla* iterantes, alteram *quartam* a prima per *tonum diſiunctam* formarunt, ſicque *octavam* compleverunt. Idque in ſequenti tabula apparebit, in qua deſcripſimus etiam *rationes*, ſeu *proportiones* inter unum gradum & alterum: qua de re animadvertendum eſt 384 : 192 = 2 : 1, ſeu, quod eodem recidit, numeros 384, & 192 *intervallum* exprimere, quod *diapaſon*, ſive *octava* vocatur.

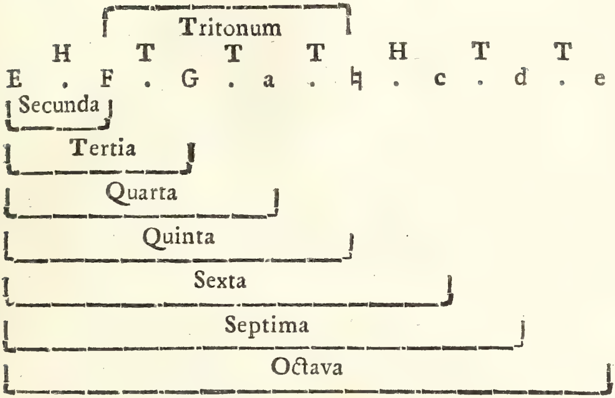
Octava

	Hem.		Ton.		T		T		H		T		T	
E	$\frac{256}{243}$	F	$\frac{9}{8}$	G	$\frac{9}{8}$	a	$\frac{9}{8}$	♮	$\frac{256}{243}$	c	$\frac{9}{8}$	d	$\frac{9}{8}$	e
384	:	$364\frac{1}{2}$	:	324	:	288	:	256	:	243	:	216	:	192
Quarta							Tonus		Quarta					

Diſiunctionis.

Intervallum, quod eſt in primo gradu inter E, & F, cujus primus terminus E eſt per ſe *relativus*, ut qui in *octava* baſis eſt reliquorum omnium ad eum relatorum, ac propterea *fundamentalis* etiam dicitur; *intervallum*, inquam, quod eſt inter primum terminum E, & eum, qui proxime ſequitur F, *ſecunda* dicitur: illud, quod eſt inter primum, & tertium, dicitur *tertia*; & ſic deinceps ad ulteriores terminos pergens, eoſque ad *fundamentalem* referens, habebis *quartam*, *quintam*, *ſextam*, *ſeptimam*, & tandem *octavam*; uti conſpicitur in tabula, quæ ſequitur, in qua præterea *intervallum* quoddam deſignatur valde ſpectabile tam apud veteres, quam apud recentiores, quod *tritonum* dicitur; ex tribus enim conficitur integris *tonis*.

Tri-



Toto *octavæ intervallo* jam in ſua *media* per Græcos diviſo, ad unumquodque ex his mediis in duas ſpecies tribuendum ſe contulerunt, eadem per *diminutionem*, aut per *incrementum* alterantes. Hinc ſi in locum *limmatis*, quod etiam *ſecunda minor* dicitur, ſufficiatur *tonus*, obtinebitur *intervallum* quoddam magis extenſum, quod *ſecunda major* vocatur; ſi in locum duorum *intervallorum*, quorum unum eſt *hemitonium*, alterum *tonus* (quemadmodum requiritur, ut compleatur *trihemitonium*, ſive *tertia minor*) ſubſtituantur duo integri *toni*, invenietur *ditonum*, ſeu *tertia major*: ſi ad *limma* ipſius *diateſſaron*, ſeu *quartæ*, quam ante expoſuimus, *apotome* adjungatur, proveniet *diateſſaron falſa*, ſeu *quarta alterata*, quæ vulgo *quarta major* dicitur, quæque, ut clarum per ſe eſt, ad *tritonum* revocatur: ſin ipſi *diapente*, ſeu *quintæ*, quæ ex tribus conſtat *majoribus tonis*, & *limmate*, dematur *apotome*, ſive *hemitonium majus*, vertetur ea in *quintam deficientem*, ſeu *ſemi-diapente*, aut *quintam*, quam *falſam* nominant. *Hexachordon*, quod *ſexta* eſt, *majus* erit, ſi *quarta*, & *tertia majori* componatur; *minus* autem, ſi *tertia* fuerit *minor*; eademque ratione fiet, ut *tertia* ipſa modo *major*, modo *minor* ad *quintam* adjuncta efficiat modo *heptachordon majus*, ſeu *ſeptimam majorem*, modo *heptachordon minus*, ſeu *ſeptimam minorem*.

Non omnia, quæ adhuc recenſuimus, *intervalla* eodem modo contulerunt Græci in unum tantum genus, at in duas veluti claſſes tribuerunt, quarum una eſt eorum, quæ *conſona* ſunt, altera eorum, quæ ſunt *diſſona*. Ad primam retulerunt tam *primitiva*, *quartam*, *quintam*, *octavam*, quam *replicata*, *undecimam*, *duodecimam*, *decimamquintam*, atque *triplicata*, *decimamoctavam*, *decimamnonam*, *viceſimamſecundam*. Ad alteram vero reliqua omnia, nempe *comma*; *hemitonium*, ſive *ſecundam minorem*; *tonum*, ſive *ſecundam majorem*; *tertiam minorem*, & *majorem*; *quartam alteratam*, ſive *tritonum*; *quintam deficientem*, ſeu *falſam*; *ſextas*, & *ſeptimas* tam *minores*, quam *majores*.

Integer, abſolutuſque horum *intervallorum* apparatus, atque unumquodque eorum poteſt commode deduci ab inchoata duplici *progreſſione geometrica*, quam Plato propoſuit, modo eam ulterius protrahere velimus. Quam deductionem quis ſciat, niſi Deus, an aliquis forte Græcus Muſicus proprii, aut publici commodi cauſa tentaverit, atque etiam obtinuerit? Neque enim eorum, quæ doctiſſima illa natio ad commune emolumentum excogitavit, & in lucem protulit, aliud novimus, niſi id, quod paucis, iiſdemque mancis, & imperfectis monumentis continetur, quæ ad nos uſque pervenerunt. Binæ ſequentes tabulæ propoſitam rem demonſtrabunt; quarum quæ prima eſt, & trianguli quaſi ſpeciem præſefert, ob oculos ponit duplicem *geometricam progreſſionem* protractam, *ſubduplam* ſcilicet ad legentis ſiniſtram, *ſubtriplam* vero ad dexteram: altera autem illa, quæ ante memoravimus, *intervalla* ex ordine deſcribit, alia quidem poſt alia pro ut nobis ſe ſe offerunt in binis illis *progreſſionibus*.

A

A 1	
B . 2 .	3 . X
C . 4	
D . 8	9 . Y
E . 16	
F . 32	27 . Z
G . 64	81 . aa
H . 128	
I . 256	243 . bb
K . 512	729 . cc
L . 1024	
M . 2048	2187 . dd
N . 4096	
O . 8192	
P . 16384	6561 . ee
Q . 32768	19683 . ff
R . 65536	59049 . gg
S . 131072	
T . 262144	177147 . hh
V . 524288	531441 . ii

B : A . 2 : 1 . Octava.
X : A . 3 : 1 . Duodecima.
X : B . 3 : 2 . Quinta.
C : A . 4 : 1 . Decimaquinta.
C : X . 4 : 3 . Quarta.
D : A . 8 : 1 . Viceſimaſecunda.
Y : A . 9 : 1 . Viceſimatertia.
D : X . 8 : 3 . Undecima.
Y : D . 9 : 8 . Tonus.
E : X . 16 : 3 . Decimaoctava.
E : Y . 16 : 9 . Septima minor.
Z : E . 27 : 16 . Sexta major.
F : Z . 32 : 27 . Tertia minor.
G : aa . 81 : 64 . Tertia major.
H : aa . 128 : 81 . Sexta minor.
bb : H . 243 : 128 . Septima major.
I : bb . 256 : 243 . Limma, ſeu hemitonium minus.
cc : K . 729 : 512 . Quarta alterata, ſeu Tritonum.

dd

dd : M. 2187 : 2048. Apotome, ſeu hemitonium majus.
L : cc. 1024 : 729. Semi-diapente, ſeu quinta deficiens.
ii : V. 531441 : 524288. Comma.

At ſi qui forte inferre vellet, omnia, quæ a Græcis uſurpata ſunt, *intervalla* ex duabus *progreſſionibus*, *ſubdupla*, & *ſubtripla* repeti poſſe, ego ſane non poſſem ſtatim concedere. Etenim dabo quidem, *intervalla* omnia inde deduci, quæ ſoli *ſpeciei* inſerviunt, quæ *diatono-diatonica* dicitur, quæque prima eſt, ut quæ nobiſcum nata, ſicque omnium in *diatonico genere* antiquiſſima: at vero *genus* hoc ipſum *diatonicum* nonne habet ſpecies alias ſeptem, quarum *intervalla*, ſi *conſona* excipias, profecto a duabus propoſitis *ſeriebus* non deducuntur? Sed non huc ſolum ſpectat, quidquid muſicus apparatus in hac re offendit, uti mox demonſtrabo. Etiam *chromaticum genus* octo complectitur *ſpecies*, & quinque *genus enharmonicum*, quæ omnes ad *ſpecies diatonici generis* adjunctæ conſtituunt omnino *ſpecies* viginti & unam, quarum viginti *progreſſivo* illo *ſyſtemate* non comprehenduntur. Octo has *ſpecies*, quas modo aperio, quaſque, nomine ab earum auctoribus ducto, placet vocare *ſyſtemata*, invexerunt, ut moleſtam uniformitatem declinarent, aut minuerent, avideque varietatem ſequerentur, quam homines uſque adeo requirunt in rebus omnibus: hocque convenerunt communi conſenſu, ut in iis perpetui, ac immutati manerent primus, & ultimus diviſæ *quartæ* terminus ita ut ſolum variarent plus minuſve ſive per incrementum, ſive per diminutionem terminos intermedios, contrahendo, aut producendo *intervalla*: ex quo eorum *ſubſtantiale* diſcrimen ortum eſt: cum enim de *quantitate* agitur, quod in ea omnino nititur, ſi ea mutetur, non poteſt non mutari.

Tabula, quam ſubjicio, omnes in aperto ponit *ſpecies quartæ* vario modo pro variis uniuſcujuſque *generis ſyſtematibus* diviſæ; atque ſuam cujuſque *gradus proportionem*, & *intervallorum* quantitatem profert.

Genus

Genus Diatonicum.

Prima ſpecies	
Diatonico-Diatonum	$\frac{256}{243} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$
vetus, juxta Eratoſthenem, & Ptolemæum.	$256 : 243 : 216 : 192.$
Secunda ſpecies	
Diatonicum Architæ	$\frac{28}{27} \times \frac{8}{7} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$
& Tonicum Ptolemæi.	$256 : 246\frac{6}{7} : 216 : 192.$
Tertia ſpecies	
Diatonicum molle	$6 + 9 + 15 = 30$
Ariſtoxeni.	$256 : 243\frac{3}{5} : 224 : 192.$
Quarta ſpecies	
Diatonicum intenſum	$6 + 12 + 12 = 30$
Ariſtoxeni.	$256 : 243\frac{3}{5} : 217\frac{3}{5} : 192.$
Quinta ſpecies	
Diatonicum	$\frac{16}{15} \times \frac{10}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{4}{3}$
Didymi.	$256 : 240 : 216 : 192.$
Sexta ſpecies	
Diatonicum molle	$\frac{21}{20} \times \frac{10}{9} \times \frac{8}{7} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi.	$256 : 243\frac{17}{21} : 219\frac{9}{21} : 192.$
Septima ſpecies	
Diatonicum intenſum	$\frac{16}{15} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi.	$256 : 240 : 213\frac{1}{3} : 192.$
Octava ſpecies	
Diatonicum æquabile	$\frac{12}{11} \times \frac{11}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi.	$256 : 234\frac{2}{3} : 213\frac{1}{3} : 192.$

Genus

Genus Chromaticum.

Prima ſpecies
Chromaticum $\frac{28}{27} \times \frac{243}{224} \times \frac{32}{27} = \frac{4}{3}$
Architæ. $256 : 246\frac{6}{7} : 227\frac{135}{243} : 192$.

Secunda ſpecies
Chromaticum molle $4 + 4 + 22 = 30$
Ariſtoxeni. $256 : 243\frac{1}{5} : 230\frac{2}{5} : 192$.

Tertia ſpecies
Chromaticum ſeſquialterum $4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 21 = 30$
Ariſtoxeni. $256 : 246\frac{2}{5} : 236\frac{4}{5} : 192$.

Quarta ſpecies
Chromaticum tonicum $6 + 6 + 18 = 30$
Ariſtoxeni. $256 : 243\frac{1}{5} : 230\frac{2}{5} : 192$.

Quinta ſpecies
Chromaticum $\frac{20}{19} \times \frac{19}{18} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{3}$
Eratoſthenis. $256 : 243\frac{1}{5} : 230\frac{2}{5} : 192$.

Sexta ſpecies
Chromaticum $\frac{16}{15} \times \frac{25}{24} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{3}$
Didymi. $256 : 240 : 230\frac{2}{5} : 192$.

Septima ſpecies
Chromaticum molle $\frac{28}{27} \times \frac{15}{14} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi. $256 : 246\frac{6}{7} : 230\frac{2}{5} : 192$.

Octava ſpecies
Chromaticum intenſum $\frac{22}{21} \times \frac{12}{11} \times \frac{7}{6} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi. $256 : 244\frac{4}{11} : 224 : 192$.

Genus

Genus Enharmonicum.

Prima ſpecies	
Enharmonicum	$\frac{28}{27} \times \frac{36}{35} \times \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$
Architæ.	$256 : 246\frac{6}{7} : 240 : 192.$
Secunda ſpecies	
Enharmonicum	$3 + 3 + 24 = 30$
Ariſtoxeni.	$256 : 249\frac{3}{5} : 243\frac{1}{5} : 192.$
Tertia ſpecies	
Enharmonicum	$\frac{40}{39} \times \frac{39}{38} \times \frac{19}{15} = \frac{4}{3}$
Eratoſthenis.	$256 : 249\frac{3}{5} : 243\frac{1}{5} : 192.$
Quarta ſpecies	
Enharmonicum	$\frac{32}{31} \times \frac{31}{30} \times \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$
Didymi.	$256 : 248 : 240 : 192.$
Quinta ſpecies	
Enharmonicum	$\frac{46}{45} \times \frac{24}{23} \times \frac{5}{4} = \frac{4}{3}$
Ptolemæi.	$256 : 250\frac{10}{23} : 240 : 192.$

Jam vero hoc mihi ſumo, ut unuſquiſque concedat, & quidem jure, ſi in *geometricis progreſſionibus ſubdupla*, ac *ſubtripla* non inveniatur, aut inveniri non poſſit alteruter, aut uterque terminus ejus *intervalli*, quod quæritur, non poſſe tale *intervallum* ab eiſdem *ſeriebus* deduci. Atque hic, quo res clarior ſit, *intervallorum* terminos in duas quaſi ſpecies tribuo, alteram eorum, qui omnino ſunt integri, alteram eorum, qui integri quidem ſunt, ſed *fractionem* adjunctam habent. Qui ad primam ſpeciem referuntur, diviſi ſemel, & iterum, & multoties per binarium, aut per ternarium, ſuas partes exhibent vel perfecte integras, vel cum aliqua fractione conjunctas. Si hoc, has partes ad ſecundam terminorum ſpeciem revoco: ſi illud, vel ad aliquem *radicalem terminum* in alterutra *progreſſione* contentum diviſione tandem devenio; vel non: ſi hoc; ergo *terminus* in iis *ſeriebus* locum non ha-

 bet,

bet, nec habere poteſt. Quod ſi ipſe ſit *numerus integer*, at non iis ſeriebus contentus, aut ſaltem talis, ut ad eas per *radicales progreſſionis terminos* reduci queat, uti innuimus, erit idcirco ab eiſdem excluſus; atque multo vero magis, quotieſcumque conjunctus ſit cum *fractione* aliqua, aut in *fractiones* reſolvatur. Quod autem hujus indolis termini in muſico apparatu occurrant plurimi, hoc meum nunc eſt demonſtrare, ut ſcilicet inde concludatur, Græcorum *intervalla* e propoſitis ſeriebus fruſtra expectari omnia.

Sumamus primo numeros ex ordine productos ex *radicalibus* omnium *generum*, *ſpecierumque* terminis. In *genere diatonico ſyſtema* Architæ habet terminum $246\frac{6}{7}$; *molle ſyſtema* Ariſtoxeni habet $243\frac{1}{5}$; ejuſdemque *intenſum* habet $217\frac{3}{5}$; *molle* autem Ptolemæi $243\frac{17}{21}$, & $219\frac{9}{21}$; ejuſdemque *intenſum*, & *æquabile* $213\frac{1}{3}$, & $234\frac{2}{3}$. In *chromatico* vero Architæ *ſyſtemate* occurrunt termini $246\frac{6}{7}$, $227\frac{135}{243}$: in *molli*, atque in *tonico* tum Ariſtoxeni, tum Eratoſthenis, ac Didymi occurrit terminus $230\frac{2}{5}$; in *ſeſquialtero* Ariſtoxeni termini $246\frac{2}{5}$, $236\frac{4}{5}$; in *molli*, atque in *intenſo* Ptolemæi $230\frac{2}{5}$, & $244\frac{4}{11}$. Habet denique *enharmonicum* Ariſtoxeni, & Eratoſthenis terminum $249\frac{3}{5}$, Ptolemæi vero terminum $250\frac{10}{23}$. Atque hæc quidem, aliaque intervalla, quod quiſque facile cognoſcere poteſt, ſic ſunt, ut vel alteruter, vel uterque terminus *fractum numerum* habeat adjunctum. Sed ad integros omnino terminos veniamus.

In *genere diatonico-diatono* veteri terminus 216 per 2 diviſus exhibet numerum 108, qui diviſus per 2 exhibet 54; hic autem 27; at 27 per 2 diviſus ad numerum deducit cum *fracto* conjunctum, nempe $13\frac{1}{2}$, ut propterea appareat, terminum 216 in *ſubdupla progreſſione* locum habere non poſſe. Idem vero terminus 216 per 3 diviſus numerum præbet 72, qui rurſus diviſus per 3 præbet 24, hicque 8, is denique numerum $2\frac{2}{3}$, ut conſtet illum terminum 216 ne in *ſubtripla* quidem *progreſſione* contineri. Atque eodem in *genere* terminus 192 per 2 iterum iterumque diviſus tandem profert $1\frac{1}{2}$, diviſus autem per 3, profert $21\frac{1}{3}$, qui numeri in neutra *progreſſione* occurrunt. Jam vero in *genere diatonico molli* Ariſtoxeni,

xeni, atque in *chromatico intenſo* Ptolemæi terminus 224 diviſus per 2 dat 112, iſque numerus 112 dat 56, & 56 dat 28, & 28 dat 14, & 14 dat 7, qui numerus in *ſubdupla progreſſione* locum non habet; nam diviſus per 2 exhibet $3\frac{1}{2}$. Sed ne diviſus quidem per 3 poteſt ille numerus 224 ad *progreſſionem ſubtriplam* referri, ut qui ſtatim numerum cum *fractione* offert $74\frac{2}{3}$. Porro ſi terminum 240 in *genere diatonico*, *chromatico*, & *enharmonico* Didymi, atque in *enharmonico* Architæ ex æquo partiamur, prodit ejus pars *aliquota* 120, quam rurſum ſi ex æquo partiamur, prodit 60, tum 30, tum denique 15, unde oritur $7\frac{1}{2}$. Quod ſi in tres æquas partes eumdem terminum 240 tribuamus, obtinebimus 80, a quo numero per 3 diviſo prodit $26\frac{2}{3}$, qui æque ac $7\frac{1}{2}$ in duabus illis *progreſſionibus* non invenitur. In *enharmonico* denique Didymi *genere* terminus 248 per 2 diviſus dat numerum 124, iſque numerum 62, is porro numerum 31, qui exhibet $15\frac{1}{2}$: diviſus autem ille terminus 248 per 3 ſtatim profert $82\frac{2}{3}$.

Quod ſi ipſos ſumamus *radicales terminos* hac illac in tribus *generibus*, eorumque ſpeciebus ſparſos, mirum in quantos incidemus, qui per *radicales* illarum *progreſſionum* terminos diviſi ad earum neutram, impedientibus fractionibus, referri nequeunt. Ne nimius ſim, eos ſtatim ob oculos hic pono, ſuntque 5. 7. 10. 11. 14. 15. 19. 20. 21. 22. 23. 28. 30. 31. 35. 38. 39. 40. 45. 46. 224. Illud ergo concedatur certum eſſe, Græcos *intervallis* uſos per eos terminos expreſſis, ut non poſſent in *progreſſione geometrica* ſive *ſubdupla*, ſive *ſubtripla* locum habere, quæ propterea *intervalla* ex illis *progreſſionibus* deduci non poterant; quod erat demonſtrandum.

Verum quidem eſt, ex *intervallis*, quæ apud Græcos uſuvenerunt, noſtris temporibus tria tantum ſupereſſe, quæ primitivis *conſonantiis*, *quartæ*, *quintæ*, & *octavæ*, earumque *replicatis* reſpondent: at erit ne, qui inferre idcirco velit, intervalla, quibus recentiores utuntur, deduci ab illis *progreſſionibus* utique poſſe? Id potius ſtatuatur, nihilo minus, immo eo magis impoſſibile eſſe, ut hæc noſtra *intervalla* ad illas *progreſſiones* referantur, quo major eſt iſtorum numerus præ numero veterum. *Tertiæ*, & *ſextæ* erant apud Græcos *diſſonæ*, uti oſtendimus: at nunc nobis opus ſunt, modo ſint *conſonantes*; ſicque noſtrum muſicum apparatum magna *intervallorum* ab iis profectorum copia augent. Cum itaque *tertiæ*,

& *ſextæ* noſtræ, atque Græcorum diſcrepent, efficiuntur ſimiles, ſi Græcis unum *noſtrum comma*, & nonnumquam etiam eo minus addatur, aut dematur: quæ additio, imminutioque *temperamentum* dicitur. At ideone fieri dicamus, ut hujuſmodi *intervallorum* termini illis *progreſſionibus* circumſcribantur? Sufficiat animum advertere ad *noſtrum comma*, & quantum ipſum ſit conſiderare, aut quanta ſit tantula ejus pars, quæ addenda, vel demenda eſt; atque ſtatim apparebit, rem multo aliter evenire.

Opus habet *recentior muſica* ſua *ſeptima* tum *majori*, tum *minori*, quarum termini ſunt 15 : 8, & 9 : 5. *Quinta falſa* indiget, & *quarta majori:* illius autem *proportio* eſt 64 : 45, atque hujus, in terminis quidem primis, 45 : 32. *Noſtrum hemitonium minus* terminos habet 25 : 24; *medium* 135 : 128; *majus* 16 : 15; *maximum* 27 : 25; *dieſis* autem *enharmonicum recentiorum* 128 : 125; *comma* denique ſuam *proportionem* terminis definit 81 : 80. Longum eſſet ſingulos hos numeros examini ſubjicere: quare ſufficiat dixiſſe (idque tuto), utrumque quidem, aut certe alterutrum terminum eorum *intervallorum* in propoſitas *progreſſiones* conferri, ſalvis earum legibus, nullo modo poſſe.

Intervalla, quæ ad *Ala mi re fundamentale* referuntur, ſi *octavam* ex æquo in tot *hemitonia* tributam accipiamus, ſunt duodecim, ut in ſequenti tabula videre eſt.

9/8 | 16/15 | 9/8 | 10/9 | 16/15 | 9/8 | 10/9

A. ⨳A. bB. ♮B. B. ⨳B. C. ⨳C. bD. ♮D. D. ⨳D. bE. ♮E. ⨳E. F. ⨳F. xF. bG. ♮G. G. ⨳G. ba. ♮a.

A	41472	
		25/24
⨳A	39814	
		128/125
bB	38880	
		25/24
♮B	37325	
		81/80
B	36864	
		25/24
⨳B	35389	
		128/125
C	34560	
		25/24
⨳C	33178	
		128/125
bD	32400	
		25/24
♮D	31104	
		81/80
D	30720	
		25/24
⨳D	29491	
		128/125
bE	28809	
		25/24
♮E	27648	
		25/24
⨳E	26542	
		128/125
F	25920	
		25/24
⨳F	24884	
		81/80
xF	24576	
		2048/2025
bG	24300	
		25/24
♮G	23328	
		81/80
G	23040	
		25/24
⨳G	22118	
		128/125
ba	21600	
		25/24
♮a	20736	

I. 16/55 | II. 135/128 | III. 16/15 | IV. 25/24 | V. 16/15 | VI. 27/25 | VII. 25/24 | VIII. 16/15 | IX. 25/24 | X. 16/15 | XI. 135/128 | XII. 16/15

10/9 | 10/9 | 9/8 | 10/9 | 9/8

Sumo

Sumo unicum *intervallum* ab F ad G, quod *majori tono* continetur. Eſt hoc *intervallum* in quinque minora diviſum, quorum terminos ſi in examen adducamus, duos tantum *radicales* in datis *progreſſionibus* inveniemus; reliquis enim iterum ac ſæpius per 2, aut per 3 diviſis, denique comperiemus eorum partes cum *fractione* aliqua conjunctas eſſe. Terminus 25920 ſub ſeptimam diviſionem per 2 exhibet $202\frac{1}{2}$, ſub quintam autem per 3 dat $106\frac{2}{3}$: terminus 24884 ſub tertiam per 2 exhibet numerum $3110\frac{1}{2}$, ſub ipſam primam per 3 numerum $8294\frac{2}{3}$: terminus 24576 ſub decimam quartam diviſionem per 2 tandem profert numerum $1\frac{1}{2}$, ſub ſecundam per 3 numerum $2730\frac{2}{3}$: terminus 24300 ſub tertiam per 2 numerum $3037\frac{1}{2}$, ſub ſextam per 3 numerum $33\frac{1}{3}$: terminus 23328 ſub ſextam per 2 numerum $364\frac{1}{2}$, ſub ſeptimam per 3 numerum $10\frac{2}{3}$: denique terminus 23040 ſub decimam per 2 numerum $22\frac{1}{2}$, ſub tertiam per 3 numerum $853\frac{1}{3}$.

Sin autem ipſos acceperimus *radicales* earum proportionum *terminos*, qui præter eos, quos jam ante enumeravimus, ſunt 25 . 80 . 2025, eoſque iterum iterumque per 2, aut per 3 diviſerimus, prodibunt pariter eorum partes *fractionibus* adjunctæ. Atque hic animadvertendum eſt, ſi in locum ipſius *Ala mi re* ſumatur tamquam *fundamentale* alterum ♯A, omnia ferme *intervalla* mutari, idemque contingere, quicumque terminus ab hiſce, quos diximus, diverſus adhibeatur tamquam primus; nullo autem modo umquam ſperandum eſſe, ut res melius cedat. Quod cum ita ſit, ponatur jam, ſi fas eſt, *recentiora muſica intervalla* ab *ſubdupla*, & *ſubtripla geometrica progreſſione* omnia deduci non poſſe.

At ſi aliæ adjungerentur *progreſſiones*, velut *ſubquintupla*? Res ſcilicet eodem ſemper recidet, idque præcipue propter *fractos numeros*, qui integris admiſcentur, dum per diviſionem ad *radicales terminos* contendimus. Præterquamquod etiamſi *fractos* non curemus, *ſubquintuplæ progreſſionis* additione non omnes conſequimur *radicales terminos*: adhuc enim deſiderantur & 6, & 10, & alii complures: omninoque fieri facile poteſt, ut *intervallum* aliquod occurrat, hujuſmodi, ut per quemcumque numerum dividantur ejus termini, horum unus tantum, & non alius ad illas *ſeries* reducatur. Quod cum accidat, patet tale *intervallum* non poſſe ab iis *ſeriebus* repeti. Uno denique iſto modo fieri poſſe putarem, ut neglectis *fra-*

ctis,

ctis, omnia tuto *intervalla* tam *antiquorum*, quam *recentiorum* ab *geometricis progreſſionibus* obtinerentur, quæ eorum quidem terminos in ſe continerent: ſi nimirum omnes quotquot fingi poſſunt, *geometricæ ſeries* acciperentur; vel ſi unuſquiſque cujuſvis *intervalli terminus* tamquam *radicalis* in aliqua ſerie ſumeretur. Quæ ſane res non ita facile concedenda eſſet, utpote quæ eodem recideret atque ſequens propoſitio: datis omnibus numeris integris poſſibilibus, ſtatui poſſunt omnes *proportiones*, quæ inter ipſos inveniri queunt. Ecquis ſit, cui non hæc hypotheſis inopportuna videatur? Nos certe neque tantam *progreſſionum* multitudinem adoptabimus, neque eam hypotheſim, quæ *fractos* non conſiderat: etenim qui aſſerat, omnia *recentioris muſicæ intervalla* duci poſſe a *ſubdupla*, & *ſubtripla*, & ſi velis etiam a *ſubquintupla progreſſione*, nequit porro in inductione, qua aſſertionem probare nititur, ab hypotheſi ex parte recedere, atque mutare, aut invertere pro voluntate *progreſſiones*. Quod feciſſe quidam videntur non ſine aliqua eorum præceptorum offenſione, quibus recte differendi ratio continetur: id enim earum *progreſſionum* identitas poſtulat, ut & termini iidem maneant, & eadem eorum inter ſe relatio.

Ecqua tandem erit tutiſſima ratio, quam ſequi poſſimus, ſi quando quantitatem *intervallorum*, quibus *recentior* muſica continetur, definire velimus, quæque ipſa per ſe ſufficiat, a qua nihil propterea abſit, ut ea ſit, quæ merito normæ, & regulæ nomen ſibi vindicare queat? Scilicet ipſa eſt *intervallorum diviſio*, & *ſubtractio*, & *compoſitio*; a quibus quidem ſemper in promptu eſt, ut cum ſemel tamquam totius rei *baſim*, & *fundamentum* illud *intervallum* poſuerimus, quod *octavam* vocamus, completam abſolutamque muſicam ſupellectilem derivemus.

Diviſio ad *octavam*, ad *quintam*, & ad *tertiam majorem* contrahitur, quæ quidem conſonantiæ ſic exprimuntur 1 : 2, 2 : 3, & 4 : 5. Fac duplices *numeros* exprimentes *octavam*, habebiſque 2, & 4, inter quos medius arithmeticus eſt 3. Facta ſerie 2. 3. 4, præſto tibi erit *quinta* in numeris 2, & 3, atque *quarta* in numeris 3, & 4. Duplicans extrema *quintæ*, habes 4, & 6, inter quos numeros ſi medium arithmeticum conſtituas 5, habebis in numeris 4, & 5 *tertiam majorem*, atque in 5, & 6 *tertiam minorem*. Duplicans denique

4, &

4, & 5 (*tertiæ majoris* terminos) efficies numeros 8, & 10, quos inter ſi medium arithmeticum 9 colloces, extrema *majoris toni* obtinebis in numeris 8, & 9, *toni* vero *minoris* in numeris 9, & 10.

Subtractione utimur, dum minus *intervallum* a majore auferimus. Exceſſus autem hujus ſupra illud (qui *differentia* dicitur) *intervalla* exhibet, quæ ſequuntur. Exceſſus *tertiæ majoris* ſupra *minorem hemitonium minus* affert $\begin{array}{c} 6 \times 5 \\ 5 \quad 4 \\ \hline 25 : 24 \end{array}$. Exceſſus *tertiæ minoris* ſupra *tonum majorem hemitonium majus* præbet $3)\begin{array}{c} 6 \times 5 \\ 9 \quad 8 \\ \hline 48 : 45 \\ 16 : 15 \end{array}$. Eademque ratione exceſſus *hemitonii majoris* ſupra *minus* profert *dieſis enharmonicum* recentiorum $3)\begin{array}{c} 25 \times 24 \\ 16 \quad 15 \\ \hline 384 : 375 \\ 128 : 125 \end{array}$. Exceſſus *toni majoris* ſupra *minorem* gignit *comma recentiorum* $\begin{array}{c} 10 \times 9 \\ 9 \quad 8 \\ \hline 81 : 80 \end{array}$. Ejuſdemque *majoris toni* ſupra *hemitonium minus* exceſſus producit *hemitonium maximum* $8)\begin{array}{c} 25 \times 24 \\ 9 \quad 8 \\ \hline 216 : 200 \\ 27 : 25 \end{array}$. Ac denique exceſſus *hemitonii maximi* ſupra *dieſis enharmonicum* ſuppeditat *hemitonium medium* $25)\begin{array}{c} 128 \times 125 \\ 27 \quad 25 \\ \hline 3375 : 3200 \\ 135 : 128 \end{array}$; atque *dieſis enharmonici* ſupra *comma* exhibet *comma minus* $5)\begin{array}{c} 128 \times 125 \\ 81 \quad 80 \\ \hline 10240 : 10125 \\ 2048 : 2025 \end{array}$.

Neque ſuperioribus operationibus minus fœcunda intervallis eſt ea, quæ *rationum compoſitio* vocatur. Etenim ſi *tertiam majorem*, & *tonum majorem* ſimul componas, exiſtet tibi *quarta major* $\begin{array}{c} 5 : 4 \\ 9 : 8 \\ \hline 45 : 32 \end{array}$: ſin *quartam conſonam*, & *hemitonium majus quinta deficiens* $\begin{array}{c} 4 : 3 \\ 16 : 15 \\ \hline 64 : 45 \end{array}$, quæ *falſa* etiam dicitur. Compoſitis

tis autem ſimul duobus *tonis majoribus*, & *uno minore*, *tritonum* habebis $\begin{array}{r} 81:64 \\ \underline{10:9} \\ 18)\;810:576 \\ 45:32 \end{array}$, quod ad *quartam majorem* revocatur. Porro ex *quarta*, & *tertia minori* ſimul compoſitis *ſexta minor* reſultat $\begin{array}{r} 4:3 \\ \underline{6:5} \\ 3)\;24:15 \\ 8:5 \end{array}$; ex *quarta* vero, & *tertia majori ſexta major* $\begin{array}{r} 4:3 \\ \underline{5:4} \\ 4)\;20:12 \\ 5:3 \end{array}$; atque ex *quinta*, & *tertia minori ſeptima minor* $\begin{array}{r} 3:2 \\ \underline{6:5} \\ 2)\;18:10 \\ 9:5 \end{array}$;

ac denique ex *quinta*, & *tertia majori ſeptima major* $\begin{array}{r} 3:2 \\ \underline{5:4} \\ 15:8 \end{array}$.

Igitur ſatis fidenter concludere poſſe mihi videor, omnia *ſimplicia intervalla recentioris muſicæ* ex tribus expoſitis *operationibus* deduci. Concluſio hæc jure ab ea, quam executi ſumus, inductione ſequitur, ſi modo animadvertatur eo, quem propoſuimus, apparatu ſingula illa *intervalla* contineri. Quod ad reliqua attinet, quæ ſunt ſupra *octavam*, ſcilicet *compoſita*, ſeu *duplicata*, *triplicata* &c., clarum, apertumque eſt, ex hujus & eorum, quæ ipſam ſubſequuntur, *acutiorum intervallorum compoſitione* methodo, quam paulo ante ſervavimus (quod idem & ad *duplicem octavam*, & ad quodcumque aliud majus *intervallum* transferendum eſt) totum integrumque muſicum apparatum conſtrui poſſe, neque ullum eſſe in hac re modum.

Quæ omnia cum ita ſint, jam conſtat principium a nobis propoſitum ad formandam ſeriem cujuſcumque *intervalli recentioris muſicæ* certum, conſtantiſſimumque eſſe, quippe quod in *arithmeticis* certiſſimis *operationibus* nititur. Idemque eſt porro univerſale; ab eo ſiquidem tota abſolutaque deducitur *muſica* ſupellex, quin opus ſit quidquam vel tantillum mutare. Eſt præterea commodum, & expeditum; ſola enim aut *diviſione*, aut *ſubtractione*, aut *compoſitione* totus eruitur muſicus recentiorum apparatus. At non *ſimplex* eſt, ſed *multiplex*: quid tum porro? neque vero amittet idcirco opportunitates tantas, quas habet præ tribus *geometricis progreſſionibus*, *ſubdupla*, *ſubtripla*, *ſubquintupla*; quarum quidem ſyſte-

ma haberi nequit *univerſale;* pleraque enim & *veterum*, & *recentiorum intervalla* ab eo duci nequeunt, niſi *imperfecte*, quod eodem redit, ac ſi dicas ullo prorſus modo; ejuſdemque præterea uſus cum labore, & moleſtia conjunctus eſt; nam qui eo uti velit, ut accurata *intervalla* obtineat, modo addere, modo demere debet unum *comma* recentiorum, non numquam autem ab hoc ipſo auferre, aut cum eo componere minorem aliquam particulam; quod quidem eo tandem redit, ut modo opus ſit *compoſitione*, modo *ſubtractione*, quæ ſunt ejus principii, quod nos ſtatuimus, quaſi partes.

Ergo hoc denique tamquam certum conſtituendum eſt, quippe quod, ut mihi quidem videtur, evidenter demonſtratum eſt, non ſimplex illud (ſi modo ita appellare liceat, & tale revera ipſum ſit) principium, quod ad tres *geometricas progreſſiones*, *ſubduplam*, *ſubtriplam*, & *ſubquintuplam* ſimul junctas refertur; ſed *diſtinctum* iſtud, & *diviſum*, & *diverſum*, & *multiplex* (ſic enim nominavimus), quod refertur ad tres, quas diximus, *operationes*, *diviſionem* ſcilicet, *ſubtractionem*, & *compoſitionem*, veram eſſe, univerſalem, & facilem omnium ſive *veteris*, ſive *noſtræ muſicæ intervallorum* originem; ſi una quidem excipiatur, quam ſuppoſuimus, *baſis*, ſive *fundamentum*, nempe *octava*, quemadmodum paulo ante innuimus.

Quamquam forte aliud etiam ſtatui poſſet *ſyſtema*, quod interim neque aperio, neque profero, nec quale ſit judicare volo, cum ejus vis, ac pretium a ſolutione pendeat ſequentis problematis: *unica methodo ſeriem conſtituere ex diverſis proportionibus compoſitam, quæ quinque genera participent, ſcilicet multiplex, ſuperparticulare, ſuperpartiens, multiplex-ſuperparticulare, & multiplex-ſuperpartiens.* Quam propoſitionem, cum ſatis intelligam ad mathematicam provinciam pertinere, libentiſſime quidem, & merito iis doctiſſimis viris relinquo conſiderandam, qui in mathematicis diſciplinis tutiſſime, & ſumma cum laude verſantur.

JOSEPHI BENVENUTI.

De Lucenſium Thermarum atmoſphæra.

PErſpectum vobis eſt, Sodales clariſſimi, hominum temperiem pro cæli varietate variam eſſe, variam ſanitatem ac vitam, mores etiam & morbos pro regionum varietate differre; Medicum idcirco maxime decere loci, quem inhabitat, naturam, atmoſphæræ qualitates & alterationes, ſoli & aquarum indolem, exquiſite ſcrutari, ut in morborum curatione methodum climati reſpondentem inveniat, ægriſque mortalibus opituletur. Idipſum Veteres agnovere, Hippocratem ſequuti, qui aeris conſtitutiones, ac medicaminum vires multis in regionibus exploravit, variaque itinera diſcendi cauſa ſuſcepit. Talibus ego exempiis excitatus, e re futurum exiſtimavi de Lucenſium Thermarum atmoſphæra aliqua ſcribere, tractanda ſuſcepturus, quæ nemo antea pertractavit.

Corſenæ pagus, qui Lucenſium Thermarum nomine venit, quindecim milliarium intervallo ſeptentrionem verſus ab urbe Luca diſiunctus, ſub longitudine graduum viginti & octo, ac minutorum quinquaginta, latitudine vero graduum quadraginta quatuor, in colle ſitus eſt. Tribus ex partibus a montibus, quibus circumcingitur, ſatis diſtans, ſeptentrionem verſus cum illo conjungitur, qui *Contronis* nuncupatur. Vallis & planities hac eadem ex parte jugo ſubeſt, nobilibus ædibus ornata, prope quam *Limæ* flumen rapido motu excurrit, quod cum torrente altero *Camalionis* vocato, clivi radices ab occaſu alluente, binorum ad milliarium diſtantiam, meridiem verſus, in *Auſerim* illabitur.

Corſenæ collis altitudinem metiri exoptans, Scheuchzeri methodo uſus ſum in Anglicanis tranſactionibus deſcripta, utpote quæ a celebri Auctore trigonometrica præſtantior declaretur. Bina igitur, cum ampla tubi cavitate, tum hydrargyri altitudine perfecte convenientia barometra, unum in collis

cacumine, alterum in imo locavi, hac adhibita cautione, ut eodem adamuſſim tempore dum ego unum inſpicerem, alterum Amicus obſervaret. Compertum inde habuimus hydrargyrum in barometro, quod in monticuli apice poſitum erat, ad pariſinos pollices viginti ſeptem, lineaſque undecim aſcendiſſe; ad clivi radicem, pollices viginti octo, lineas duas, cum quarta parte decimali, indicaſſe. Trium igitur linearum, cum quarta decimali diſparitas fuit: ſingula autem linea cum ex laudato Scheuchzero unum, & ſeptuaginta pariſinos pedes indicet; patet hinc altitudinem Corſenæ collis bis centis triginta ſex circiter pedibus æqualem eſſe. Ut vero ejuſdem celſitatem ſupra mare, (quod recta, duodecimo circiter lapide a Lucenſibus thermis diſtat) exploratam haberem; iiſdem inſtrumentis, iiſdemque cautionibus, tam in pago noſtro, quam prope maritimum Viaregii littus, ſereno utrobique cælo, eodemque ſpirante vento, tentamen iteratum eſt, ex quo facile cognovi, Corſenæ vallem quingentis quadraginta circiter pedibus ſupra Viaregii oras extolli.

Satis ex hinc patet, Academici ſapientes, Lucenſium thermarum aerem tenuem, levem, nitidum ac purum eſſe, nimia tamen ſubtilitate haud ita præditum, ut cum eo, quem in Alpibus inſpiramus, æquiparari queat. Ejus tenuitas demonſtratione non indiget, quo enim magis atmoſphæræ altitudo creſcit, eo levior ac tenuior evadit; ſin vero decreſcat, ponderoſior & craſſior fit. Corſenæ autem in pago, haud mediocrem atmoſphæræ altitudinem barometrum oſtendiſſe animadvertimus. Prout autem aer magis vel minus ponderat, corpora inde diverſimode afficiuntur; compertum enim vobis eſt, humani corporis partem quadrato pariſino pedi æqualem, ita ab atmoſphæra comprimi, veluti ſi a triginta duorum circiter pedum cubicorum aquæ pondere premeretur; cubicum autem aquæ pedem, ſeptuaginta tres fere gallicas libras pondo æquare; ſpatium hinc quadrati pedis in humani corporis ſuperficie, trecentum triginta ſex ſupra bis mille libras ſuſtinere. Etenim $73 \times 32 = 2336$. Quot ergo quadratis pedibus humanum corpus conſtabit, toties deſcriptum pondus ſuſtinebit. Mediocris Viri ſtatura, quindecim pedum ſtatuitur; in hoc igitur aeris preſſio triginta quinque millibus, & quadraginta libris æqualis erit, cum $2336 \times 15 = 35040$. Quamquam humanum corpus, ut ſatis conſtat, diverſimode premitur juxta va-

varias mercurii altitudines in barometro, unde nil mirum, ſi atmoſphæræ variationibus tam notabiles, in hypocondriacis præcipue, commotiones excitentur. At de atmoſphæræ gravitate ſatis. Cæteras qualitates examinabo.

Purum tunc dicimus aerem, cum adventitiis inſalubribus corpuſculis, animata ea ſint, vel inanimata, ſcatere haud deprehendimus. Noſter profecto nullimode infici poteſt, cum a ſolo & aquis nullum infectum halitum promanare timendum ſit. Nulla hic ſtagnantium aquarum fœditas, nullus hic ſpecus, nullæ cavernæ; nulla ex vegetabilibus, animantibus, aut mineralibus prava miaſmata; nullæ ex fætentibus artibus exhalationes promanant; quin potius incolæ atmoſphæram fragrantium florum, & ſalubrium herbarum effluviis odoratam hauriunt, quæ ſpiritus recreat, blandam ſanguini temperiem conciliat, hilaris mentis, vegetique corporis procreatrix. Solum ipſum non pingue, ſed ſabuloſum, minus agricolarum votis reſpondens, craſſis oleoſiſque halitibus neutiquam nocet. Accedunt & ſaluberrimi thermalium aquarum vapores, haud ſulphurei, vel bituminoſi, ſed neutro ſale, martiali itidem ochra ſcatentes, humano corpori amiciſſimi, ut edito haud ita pridem ſcripto demonſtravi.

Roris etiam analyſis de ſaluberrima ſoli noſtri natura certiorem me fecit. Ex Boerhaavio etenim, & Arbuthnoſio didiceram ſubſtantiis illis rorem imbui, quibus humus, unde oritur, abundat, ejus propterea analyſim pro potiori methodo habendam fore, qua ſoli quovis in loco indoles referetur. Ne tædeat rogo, Sodales, ſi quæ hac de re tentamina inſtitui, vobiſcum conferam.

Super pratum Villenſibus thermis proximum, nocturno æſtivoque tempore, alba ſtrophiola ſubtiliſſimæ texturæ expanſa reliqui, ſuſpenſa tamen, ac ſiccis baculis filo alligata, ut ſatis ab illis, ac ſubjectis herbis diſtarent, ne forſan ab earum contactu diverſam ros indueret naturam; antequam vero ſol ſurgeret, rorem expreſſi, ſal ab evaporatione illi non abſimile relinquentem, quod a thermalibus aquis extrahitur, ex tenuibus ſcilicet, albidiſque cryſtallis, ad priſmaticam figuram proxime accedentibus, conflatum. Magna vero me tenuit admiratio, cum ad tercentum circiter paſſuum ab ipſis thermis diſtantiam in Corſenæ planitie, periculum ea plane methodo iteraſſem; rorem etenim obtinui inodorum, inſipidum, fluidiſſi-

diſſimum, nec ſalis miculam ab evaporatione relinquentem. Curioſitate motus, pluries experimentum repetebam, chimicis periculis quamplurimis in uſum vocatis; compertum tandem habui rorem prope thermas ejuſdem ſemper naturæ decidere, quod ab aquarum vaporibus fieri autumabam: alibi non ita: quem enim in planitie collegi, alias inſipidum, interdum ſalino ſapore præditum, neutro ſale plus minus ſaturatum, deprehendi. Cujus rei cauſa ab effluviorum mutabili natura fortaſſe pendebat, quæ continuo in atmoſphæram evecta, ſali acido primigenio uniuntur; magis vero alcalica ſalia ſublevantur, cum ab æſtivo ſole arefacta tellus vapores emittit, eis propemodum ſimiles, qui ex calcinatis lapidibus, vel coctis lateribus promanant. Ruſticos tunc, delicatulas præſertim fœmellas, interdum vidi pedum rubore ac pruritu vexatas, poſtquam ſuper ſolum rore madidum diſcalceatæ ambulaſſent.

Vitrea ſeptem vaſcula, quæ æqualem roris doſim ſub diverſo cœlo collectum recipiebant, bene clauſa, ſolaribus valde fervidis radiis expoſui, quemque paludoſis ex locis collegeram, ſeptima die corruptum, ac vermibus inquinatum vidi. In duobus inſuper vaſculis, quæ rorem ſaluberrimis in regionibus delapſum continebant, vermiculos duodecima die, nudis oculis, conſpexi. Quem autem ros cætera vaſcula excipiebant, tardius putrefactus eſt, neque inſecta exhibuit, utut in ſuperficie virideſcens materies, muſco perquam ſimilis, adparuiſſet. Fœtidus erat ros in ſingulis vaſculis, ille vero magis, in quo vermes oborti ſunt.

Ad aeris itidem puritatem libera ventorum perflatio conducit; de his propterea, cardinalibus nempe, obiter verba faciam. Ventus ab oriente ſpirans, vernali & æſtiva tempeſtate, ſiccum apud nos ac ſerenum cælum ut plurimum ſequitur; hiemali vero tempore, frigus, niveſque producit. Auſter, ſeu meridionalis, calidus & humidus, facile pluvias infert; ſi vero non inferat, ſenſibilem ſecum humiditatem vehit humano corpori noxiam. Raro Corlenæ cælum auſtralibus hiſce ventis perflatur, ut ex adjuncta meteorologica tabula colligitur. Occidentalis ſeu Zephyrus, plerumque quidem ſiccus, ſæpius in pago noſtro æſtivo tempore ſpirare ſolet. Aquilonaris ſiccus & frigidus, hiemali tempeſtate facile, vehementerque perflando, ingentem in atmoſphæra commotionem excitat.

Aer

Aer igitur noſter ventorum impulſu agitatus infici nequit, ut ſtagnanti contingeret; nec aliunde a ventis, malignis halitibus onuſtis inquinabitur, quod nulla extent ſuſpecta loca, quæ duodecim fere milliarium intervallo a Lucenſibus thermis non abſint: tametſi vero cominus exiſterent, interjectis præcipue montibus, minime nocitura forent, ut rationibus & exemplo demonſtrarunt Varenius (a), & Lanciſius (b). Rapidus inſuper binorum fluminum motus, quæ ad Collis ima excurrere diximus, atmoſphæræ agitationi plurimum conducit.

Inſalubris quoque fit aer, niſi a ſolaribus radiis ſatis calefiat, æque vero ſi nimio æſtu incaleſcat. Clariſſimus Halleyus caloris a ſole provenientis quantitatem in Anglicanis tranſactionibus (c) determinavit; neque tamen ego celebris viri methodum imitatus fui, ut Corſenæ cæli calorem deprehenderem; thermometro potius tentamina inſtitui, quibus compertum habui, Lucenſium thermarum incolas æſtivo temperato calore frui, neque aſpero nimis frigore hiemali tempeſtate vexari.

Sunt qui humiditate nimia Corſenæ cælum ſcatere crediderint, quod ibi aliquando aura ſerotina decidat. An vero ex ejus defluxu benigna aeris temperies labefactari queat, judicabitis vos, doctiſſimi Sodales, qui optime intelligitis a relabentibus hiſce vaporibus neque ſaluberrima loca immunia eſſe; docuit enim Boerhaavius tellurem a ſolaribus radiis calefactam, millies diutius, quam aer, calorem retinere; ex ejuſdem hinc ſuperficie vapores exhalare pergent a ſolis æſtu commoti, etiam aere frigeſcente ab ejus occaſu; non igitur atmoſphæræ culpa, ſed a ſole potius magis minuſve terram irradiante, major vel minor auræ ſerotinæ copia repetenda erit. In regionibus porro ſaluberrimo aere ditatis, uberior contingit vaporum defluxus, eo præſertim tempore, quo ſolis radii, magis ad perpendicularem lineam accedentes, diutine terram percutiunt. Soli & atmoſphæræ qualitates aura ſerotina ſequitur, ibique noxiam experimur, ubi illa ſunt infecta.

Aquoſis effluviis Corſenæ cælum minime abundare, præter hygrometrum, vulgares experientiæ confirmant. Alkalica fixa ſalia parum aeri expoſita madeſcunt; veſtes in ſcriniis diutius clauſis repoſitæ, mucoſæ non fiunt, nec lintea humida; li-

(a) *Geograph. gen. pag. m.* 249. (b) *De Silv. Ciſter. Conſil. num.* 5. (c) *An.* 1693.

ligna albicanti mucore haud obducuntur; charta etiam & libri omnino ſicci ſervantur; neque vaſa ſtannea maculis quibuſdam vix delendis inquinantur, ſicuti udis in locis contingere obſervamus. Vapores inſuper in montium noſtrorum cacumine minime condenſantur, ut in alpibus evenire animadvertimus.

Salubre omnino ac temperatum Lucenſium thermarum cælum, præter jam dicta, demonſtrant inſectorum quorumdam abſentia; aquarum bonitas, tam hydroſtatica lance, quam chimicis tentaminibus explorata; ſolum aromaticis plantis redundans; optimus incolarum color, qui ſuavibus moribus, acrique ingenio præditi ſunt; vernaculi morbi per ſe nulli, eorumdemque incolarum longævitas, quæ interdum ad nonageſimum annum protrahitur.

Quoad meteora, nihil de his peculiare animadverti, quod eodem plane modo in reliquis Etruriæ locis haud adpareat. Satis de ventis & aura ſerotina dixi. Tonitrua hieme præſertim audiuntur, eaque non levia. Lumen boreale haud infrequens eſt. Pluvia ſæpius, procella rarius oritur, tunc vero auſtrali vento perflante. Quotannis fere utut aqua in glaciem coeat, niveſque cadant, citius tamen quam in Urbe liqueſcunt.

Meteorologicam hic tabulam adjeci, ut omnino res ipſa poſtulabat; quæ vero ad ejus explicationem attinent breviter attingam. Hydrargyri in barometro media altitudo Corſenæ in valle, ubi domus mea ſita eſt, pollices pariſinos viginti ſeptem lineaſque octo adæquat. Thermometrum hydrargyro repletum, ad Bülfingeri mentem conſtructum, ſcalam, ſive graduum numerationem juxta Reaumurii methodum conjunctam habet. Hygrometrum cæteris præſtantius, ex cannabina chorda valde retorta confeci. Eam in calido furno reliqui, donec ita exſiccata foret, ut facile, ſi extenderem, diſrumperetur. Tunc vitreo tubo inſerui, cujus in ſuperiori parte, acicula tranſverſim per chordam adacta, ſpongiam aqua madidam introduxi, quæ guttatim eam humectaret, donec plumbeum ſtylum, inferiori chordæ parti extra tubum productæ alligatum, haud ultro ſe contraheret, ac in gyrum verteret, ſed ſpongia ſemota extenderetur. Compertum ſic habui chordæ variationes intra pollicum trium, linearumque novem ſpatium, contigiſſe, hinc in quadraginta partes, ſive gradus diviſi. Hygrometrum ſic ſatis mobile, faciliuſque comparabile obtinui,

nui,

nui, eo ſiquidem magis, ſi chordam ſæpius renovarem; temporis enim decurſu, ſenſibiliter minus moveri animadverti.

Pluviæ quantitatem ut detegerem, cylindrico vaſe figulino, vitrea interius cruſta obducto uſus ſum, aperto aeri expoſito, cujus diameter gallicum pedem, quatuorque pollices æquabat. Ceſſante pluvia, pondus delapſæ aquæ, potius quam menſuram, in meteorologica tabula adnotabam.

Ventorum directionem anemoſcopium ſupra excelſam Parochialis Eccleſiæ ſacram turrim poſitum, oſtendebat. Horum autem vis ſenſuum auxilio ſtatuta eſt. Ventorum columna numeris vacua, tranquillum aerem indicat; quæ vero numero unitatem deſignante notata eſt, placidam atmoſpheræ agitationem: quæ ſecundo numero mediam; quæ tertio maximam oſtendit.

Barometrum, Thermometrum, & Hygrometrum, in Xyſto, qui occidentem reſpicit, locata ſunt. Quotidie vero meridianis horis eorum variationes obſervabam; obſervationes vero ab ineunte menſe Majo Anni 1762 uſque ad exitum Aprilis Anni 1763 perduxi.

Hæc habui quæ differerem, Sodales clariſſimi, neutiquam ejuſmodi, ut veſtræ, & hujus loci dignitati reſpondeant. Dixi quæ potui, non quidem ut volui, ſed quantum intellectus tenuitas permiſit.

S E Q U I T U R

METEOROLOGICA TABULA

I N Q U A

Lucenſium Thermarum atmoſpheræ variationes quotidie per annum adnotatæ ſunt.

JANUARIUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 10.	5. calor.	20.	S. W. 2.	ſubnubila	per hunc menſem delapſa, libras triginta, & uncias quinque pondere æquavit.
II.	27. 11.	$3\frac{1}{3}$.	$21\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſubſerena	
III.	27. 10.	3.	21.	W.	ſerena	
IV.	27. 8.	$4\frac{1}{2}$.	$22\frac{2}{3}$.	S. W. 1.	nubila pluvia	
V.	27. 8.	5.	23.	S. W. 2.	ſubnub. ſubſer.	
VI.	27. 10.	$4\frac{2}{3}$.	$20\frac{1}{3}$.	W.	ſerena	
VII.	27. 11.	$4\frac{1}{2}$.	19.	W. 1.	ſubnub. ſubſer.	
VIII.	28. 1.	4.	$25\frac{1}{2}$.	W.	ſerena	
IX.	28. 1.	5.	$22\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	ſubſerena	
X.	28. 3.	5.	25.	S. W. 1.	ſubſerena	
XI.	28. 5.	$4\frac{1}{3}$.	22.	E. 1.	ſerena	
XII.	28. 4.	4.	$19\frac{2}{3}$.	E. 1.	ſerena	
XIII.	28. 6.	$3\frac{1}{2}$.	19.	E. 1.	ſubſerena	
XIV.	28. 8.	3.	$17\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	ſerena	
XV.	28. 2.	2.	15.	N. 3.	ſerena ſubnub.	
XVI.	27. 11.	$5\frac{1}{3}$.	17.	S. 1.	nubila ſerena	
XVII.	27. 7.	8.	$21\frac{1}{2}$.	S. E.	nubila	
XVIII.	27. 7.	7.	21.	S. E. 3.	pluvia nubila	
XIX.	27. 5.	$4\frac{1}{2}$.	$24\frac{1}{3}$.	S. 2.	pluvia	
XX.	27. 8.	4.	26.	S. W. 1.	ſubnubila	
XXI.	27. 10.	$3\frac{2}{3}$.	$23\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſubſerena	
XXII.	27. 8.	3.	22.	W. 1.	ſerena	
XXIII.	27. 9.	$2\frac{1}{3}$.	17.	W. 1.	ſerena ſubſer.	
XXIV.	27. 9.	1.	$15\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſerena	
XXV.	27. 11.	0.	15.	N. W. 1.	ſerena	
XXVI.	28.	1. frigor.	$14\frac{1}{3}$.	N. W. 2.	ſubnub.	
XXVII.	28. 2.	$1\frac{1}{2}$.	16.	W. 2.	ſerena	
XXVIII.	28. 3.	$1\frac{1}{2}$.	$13\frac{2}{3}$.	N. 3.	ſerena	
XXIX.	28. 3.	$2\frac{1}{3}$.	17.	N. 3.	ſubſerena	
XXX.	28. 4.	1.	18.	N. W.	ſubnubila	
XXXI.	28. 2.	0.	$14\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	nix pluv. ſubn.	

FEBRUARIUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	28. 6.	$1\frac{1}{2}$. calor.	$16\frac{1}{3}$.	N. W. 1.	ſubſerena	per hunc menſem delapſa, ſexdecim libras, & uncias tres pondo æquavit.
II.	28. 4.	0.	16.	W. 3.	nubila	
III.	28. 1.	0.	16.	W. 2.	ſubnub. ſerena	
IV.	28. 1.	1. calor.	$14\frac{1}{2}$.	W.	ſubſerena	
V.	28.	3.	$15\frac{1}{2}$.	S. W. 1.	ſubnubila	
VI.	28.	3.	17.	S. W. 1.	nubila	
VII.	27. 10.	3.	18.	N. W. 3.	ſubnub. ſerena	
VIII.	28. 7.	$3\frac{1}{2}$.	$18\frac{2}{3}$.	W.	ſubſerena	
IX.	28. 5.	5.	19.	S. W. 2.	nubila	
X.	28. 1.	4.	$16\frac{1}{2}$.	N. W. 1.	ſerena nubila	
XI.	28. 4.	4.	18.	S. W. 2.	nubila	
XII.	27. 10.	5.	$20\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	ſubnub. ſubſer.	
XIII.	27. 8.	5.	$20\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	nubila ſubſer.	
XIV.	27. 10.	$6\frac{1}{2}$.	23.	S. W. 2.	nubila pluvia	
XV.	27. 5.	$8\frac{1}{2}$.	26.	S. E.	pluvia	
XVI.	27. 6.	6.	$27\frac{1}{2}$.	S. W. 1.	nubila pluvia	
XVII.	27. 11.	$3\frac{1}{3}$.	26.	N. W. 1.	ſubſerena	
XVIII.	28. 2.	3.	$22\frac{1}{3}$.	N. 2.	ſerena	
XIX.	28.	3.	18.	N. 3.	ſerena	
XX.	28.	3.	$16\frac{1}{2}$.	N. 2.	ſerena	
XXI.	28. 1.	4.	16.	N. W. 1.	ſerena	
XXII.	27. 11.	6.	$16\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſubſerena	
XXIII.	27. 9.	6.	18.	S. W.	nubila	
XXIV.	27. 4.	6.	22.	S. W.	nubila ſubſer.	
XXV.	27. 7.	6.	$20\frac{2}{3}$.	S. 2.	ſubnubila	
XXVI.	27. 7.	$6\frac{1}{2}$.	$22\frac{1}{2}$.	S. 1.	ſubſerena	
XXVII.	27. 10.	6.	24.	S.	ſubnub. ſerena	
XXVIII.	27. 8.	7.	24.	S. W. 2.	ſubſerena	

MAR-

MARTIUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 11.	7.	24.	S. 1.	ſubſerena	per hunc menſem delapſa, libras viginti & octo, ſeptemque uncias pondo æquavit.
II.	27. 7.	$8\frac{1}{2}$.	$26\frac{1}{2}$.	S. E.	nubila pluvia	
III.	27. 5.	9.	$26\frac{1}{3}$.	S. E.	pluvia	
IV.	27. 8.	$7\frac{1}{2}$.	$26\frac{1}{3}$.	S.	nubila	
V.	27. 10.	$8\frac{2}{3}$.	25.	E. 2.	ſubſerena	
VI.	27. 11.	$9\frac{1}{3}$.	23.	E.	ſerena	
VII.	27. 11.	$9\frac{1}{2}$.	$21\frac{1}{2}$.	E.	ſubſerena	
VIII.	28.	$8\frac{1}{2}$.	19.	E. 2.	ſubſerena	
IX.	27. 10.	6.	19.	N. W. 1.	nubila ſerena	
X.	27. 8.	6.	$16\frac{1}{2}$.	N. W. 1.	ſerena	
XI.	27. 7.	$4\frac{1}{2}$.	18.	E. 3.	nubila pluvia	
XII.	27. 7.	4.	16.	N. E. 2.	nubila pluvia	
XIII.	27. 9.	3.	$18\frac{1}{3}$.	E.	nebula pluvia	
XIV.	27. 7.	5.	19.	S. 2.	ſubnubila	
XV.	27. 6.	8.	$22\frac{1}{2}$.	S. E.	nubila	
XVI.	27. 1.	$9\frac{1}{2}$.	$25\frac{1}{3}$.	S. E. 3.	nubila pluvia	
XVII.	26. 10.	11.	28.	S. E. 3.	nubila pluvia	
XVIII.	27. 2.	$11\frac{1}{2}$.	29.	S. W. 2.	ſubſerena	
XIX.	27. 7.	9.	28.	W.	ſerena	
XX.	27. 10.	$6\frac{1}{2}$.	$24\frac{1}{2}$.	W.	ſubnubila	
XXI.	27. 11.	7.	$21\frac{2}{3}$	W.	ſerena ſubſer.	
XXII.	27. 9.	$8\frac{1}{2}$.	20.	S. W. 2.	ſubſerena	
XXIII.	27. 8.	$8\frac{1}{2}$.	20.	S.	nebula nubila	
XXIV.	27. 9.	8.	$18\frac{1}{2}$.	N. W.	ſubſerena	
XXV.	27. 11.	$8\frac{1}{2}$.	$17\frac{2}{3}$.	N. W. 1.	ſerena	
XXVI.	27. 11.	9.	17.	N. W.	ſubſerena	
XXVII.	27. 11.	8.	17.	N. E.	ſerena	
XXVIII.	28. 1.	$7\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{3}$.	E. 1.	ſubſerena	
XXIX.	28. 3.	9.	$16\frac{1}{3}$.	E.	ſerena	
XXX.	28. 1.	8.	15.	N. 2.	ſerena	
XXXI.	28. 1.	8.	15.	N. 3.	ſerena	

APRILIS.

Dies	Barometrum		Thermometrum	Hygrometrum	Ventus		Tempeſtas	Pluvia
	Poll.	lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct.	vis		
I.	28.	3.	9 $\frac{1}{2}$.	15.	W.	1.	ſubſerena	per hunc menſem delapſa, libras trigintaquinque pondo æquavit.
II.	28.	3.	9 $\frac{2}{3}$.	15.	W.	1.	nubila ſubſer.	
III.	28.	1.	9.	15.	W.	1.	ſerena	
IV.	28.	3.	9.	14 $\frac{1}{2}$.	N.		ſerena	
V.	28.	5.	9.	14.	N.		ſerena	
VI.	28.	2.	11.	14 $\frac{1}{2}$.	S. W.	2.	ſerena ſubnub.	
VII.	28.		12 $\frac{1}{2}$.	16.	S.		nubila ſubſer.	
VIII.	27.	9.	14.	19.	S.		pluvia, nub.	
IX.	27.	10.	10 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	N. W.	2.	ſubſerena	
X.	27.	10.	10.	16 $\frac{1}{3}$.	N. E.	1.	ſerena	
XI.	27.	11.	9.	16.	E.		ſubnub. ſerena	
XII.	27.	11.	10 $\frac{1}{2}$.	15 $\frac{1}{3}$.	E.	1.	ſerena	
XIII.	27.	11.	10 $\frac{1}{2}$.	15.	E.		ſerena	
XIV.	27.	11.	10.	14 $\frac{1}{2}$.	N. E.	1.	ſerena ſubſer.	
XV.	28.	1.	9 $\frac{1}{3}$.	14 $\frac{1}{2}$.	N. E.		ſerena ſubſer.	
XVI.	28.	2.	10 $\frac{1}{3}$.	13 $\frac{2}{3}$.	N. E.	1.	ſubſerena	
XVII.	28.	2.	10.	13.	W.		ſubſerena	
XVIII.	28.		9 $\frac{1}{2}$.	14 $\frac{1}{2}$.	W.		ſubſerena	
XIX.	27.	10.	10.	15 $\frac{1}{3}$.	S. W.	1.	nubila ſerena	
XX.	27.	9.	10.	15 $\frac{1}{2}$.	S. W.		nubila ſubſer.	
XXI.	27.	9.	10.	15.	W.	1.	ſubſerena	
XXII.	27.	10.	10.	15.	W.	1.	ſerena	
XXIII.	27.	11.	9 $\frac{2}{3}$.	14.	W.		ſerena	
XXIV.	28.	3.	9.	14.	N.		ſerena	
XXV.	28.	5.	9.	14.	N.		ſerena ſubſer.	
XXVI.	28.	2.	10 $\frac{1}{3}$.	13 $\frac{1}{3}$.	N. W.	2.	ſubſerena	
XXVII.	28.	2.	10 $\frac{2}{3}$.	13.	W.	1.	ſerena	
XXVIII.	28.		10 $\frac{2}{3}$.	13 $\frac{1}{2}$.	S. W.	2.	ſubſerena	
XXIX.	27.	9.	12.	15.	S.		nubila pluvia	
XXX.	27.	6.	12 $\frac{1}{2}$.	18.	S.		pluvia nub.	

MA-

M A J U S.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 10.	$10\frac{1}{2}$.	$17\frac{1}{2}$.	E. 1.	ſerena	per hunc menſem delapſa libras quadraginta duo pondo æquavit.
II.	27. 9.	$10\frac{1}{2}$.	$16\frac{2}{3}$.	N. E.	ſerena	
III.	27. 7.	$9\frac{2}{3}$.	$16\frac{1}{2}$.	N. W. 1.	ſubſerena	
IV.	27. 6.	10.	$16\frac{1}{2}$.	W.	nubila ſubſer.	
V.	27. 6.	10.	17.	S. W. 2.	ſubnubila	
VI.	27. 4.	$10\frac{1}{2}$.	$17\frac{2}{3}$.	S. W. 2.	ſubnubila	
VII.	27. 5.	12.	$18\frac{1}{2}$.	S. W. 2.	nebula ſubſer.	
VIII.	27. 5.	$12\frac{1}{3}$.	$18\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſerena ſubnub.	
IX.	27. 3.	12.	19.	W. 1.	nubila nebula	
X.	27. 3.	$12\frac{2}{3}$.	$20\frac{1}{2}$.	S. 1.	nubila pluvia	
XI.	27. 5.	$13\frac{1}{3}$.	23.	S. 1.	pluvia ſerena	
XII.	27. 4.	12.	23.	W.	ſubſerena	
XIII.	27. 4.	$11\frac{1}{2}$.	23.	S. W. 2.	nubila ſubſer.	
XIV.	27. 6.	12.	21.	W.	ſubſer. ſerena	
XV.	27. 7.	$12\frac{2}{3}$.	$18\frac{1}{2}$.	N. W. 1.	ſerena	
XVI.	27. 7.	13.	$18\frac{1}{2}$.	N. E. 2.	nubila	
XVII.	27. 7.	$13\frac{1}{2}$.	18.	N. E.	nubila	
XVIII.	27. 7.	$12\frac{2}{3}$.	$17\frac{1}{3}$.	E. 2.	pluvia nubila	
XIX.	27. 8.	$12\frac{1}{3}$.	$17\frac{1}{3}$.	E. 2.	nubila ſubſer.	
XX.	27. 7.	$13\frac{1}{2}$.	17.	E. 1.	ſubſer. ſerena	
XXI.	27. 8.	$12\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{3}$.	E. 1.	ſubſerena	
XXII.	27. 7.	$12\frac{1}{2}$.	16.	N. W. 1.	ſubnub. ſubſer.	
XXIII.	27. 8.	$13\frac{2}{3}$.	16.	N. W. 2.	ſerena ſubnub.	
XXIV.	27. 9.	$13\frac{1}{2}$.	16.	N. W.	ſerena ſubnub.	
XXV.	27. 9.	$13\frac{1}{2}$.	$15\frac{1}{2}$.	W. 1.	ſubnubila	
XXVI.	27. 9.	$13\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{3}$.	W. 1.	nubila ſubſer.	
XXVII.	27. 8.	$13\frac{1}{2}$.	17.	W. 1.	ſubſerena	
XXVIII.	27. 9.	13.	$17\frac{1}{2}$.	W. 2.	ſubſerena	
XXIX.	27. 7.	$13\frac{1}{3}$.	17.	W. 1.	ſubſerena	
XXX.	27. 6.	$14\frac{1}{2}$.	19.	S. W. 3.	nubila	
XXXI.	27. 5.	$14\frac{2}{3}$.	21.	S. 2.	nubila	

JUNIUS.

Dies	Barometrum Poll.	lin.	Thermometrum Grad. part.	Hygrometrum Grad. part.	Ventus direct.	vis	Tempeſtas	Pluvia
I.	27.	8.	15 ½.	19 ½.	S. W.	2.	ſubſer. ſubnub.	per hunc menſem delapſa, libras vigintitres, & uncias novem pondo æquavit.
II.	27.	7.	16.	19.	W.	1.	ſerena	
III.	27.	7.	16.	17.	W.	1.	ſerena	
IV.	27.	7.	16 ½.	14.	E.		ſubnubila	
V.	27.	6.	16.	15 ½.	E.	1.	nubila	
VI.	27.	7.	15.	15 ½.	N. E.	1.	ſubſerena	
VII.	27.	8.	14 ½.	15.	N. E.	2.	ſubnub. nubila	
VIII.	27.	8.	16 ⅓.	15.	E.		ſubſerena	
IX.	27.	7.	16.	16.	E.	2.	ſerena	
X.	27.	5.	17.	16 ½.	S.		ſerena ſubnub.	
XI.	27.	6.	16 ⅔.	16 ⅔.	S.		ſubnub. nubila	
XII.	27.	8.	14.	17 ½.	E.		pluvia	
XIII.	27.	10.	15 ⅓.	17 ½.	E.	1.	ſubnub. ſubſer.	
XIV.	27.	8.	14 ½.	18.	S.	1.	pluvia nub.	
XV.	27.	8.	14 ⅔.	17 ½.	E.	1.	pluvia ſubnub.	
XVI.	27.	8.	14.	17.	E.		ſerena	
XVII.	27.	11.	14 ½.	15 ⅓.	N. E.	2.	ſerena	
XVIII.	28.		14 ½.	14.	N. E.	2.	ſerena	
XIX.	28.		15 ⅔.	13 ⅔.	E.		ſubſerena	
XX.	28.		16 ½.	13.	N. W.	2.	nubila	
XXI.	27.	11.	18.	13 ⅓.	N. W.	2.	nubila nebula	
XXII.	27.	9.	17 ½.	15.	S. W.	1.	nebula pluvia	
XXIII.	27.	10.	17 ½.	17 ⅓.	S. W.	1.	nub. ſubſerena	
XXIV.	27.	9.	17.	16 ½.	S. W.	1.	nubila pluvia	
XXV.	27.	9.	16 ½.	16.	W.		ſubſerena	
XXVI.	27.	8.	17 ½.	16.	S. W.	2.	nubila	
XXVII.	27.	10.	18.	16.	W.		nubila	
XXVIII.	28.		18 ⅓.	15 ½.	N. W.	2.	ſerena	
XXIX.	28.	2.	18 ½.	15.	N. W.	1.	ſubſerena	
XXX.	28.		18 ½.	15 ⅓.	S. W.	2.	ſubnubila	

JU-

JULIUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 11.	18½.	15⅓.	S. W. 2.	ſubſerena	per hunc menſem delapſa, libras ſeptemdecim pondo æquavit.
II.	27. 11.	18½.	15.	S. W. 2.	ſubſerena	
III.	28.	18½.	15.	W. 1.	ſubnub. ſubſer.	
IV.	28. 1.	19.	15.	W. 2.	ſerena	
V.	28. 1.	19.	14.	W. 2.	ſerena	
VI.	28. 2.	19⅓.	14.	N. W. 1.	ſerena	
VII.	28. 3.	19.	13½.	N. E. 2.	ſubſerena	
VIII.	28. 2.	18⅓.	12½.	N. E. 2.	ſubnub. ſerena	
IX.	28. 1.	19.	12.	E. 1.	ſubnub. ſubſer.	
X.	28. 1.	19.	12.	E. 1.	ſubnub. ſubſer.	
XI.	28. 2.	19.	12.	N.	ſerena	
XII.	28. 2.	19½.	12.	N.	ſerena	
XIII.	28. 2.	20½.	12.	N. W. 1.	ſubſerena	
XIV.	28. 2.	21.	12½.	N. E.	ſubſerena	
XV.	28. 2.	21.	12½.	N. E.	ſerena	
XVI.	28. 1.	19½.	14.	E.	nubila pluvia	
XVII.	27. 9.	19½.	14½.	S. E. 2.	pluvia ſubſer.	
XVIII.	27. 10.	20.	16.	S. E.	nubila ſubſer.	
XIX.	27. 8.	21.	16.	S. W.	ſubſerena	
XX.	27. 8.	21.	15½.	E.	ſerena	
XXI.	27. 10.	21½.	14.	E. 1.	ſerena	
XXII.	28. 1.	22.	13½.	N. E. 2.	ſerena	
XXIII.	28. 2.	22.	13½	N. E.	ſerena	
XXIV.	28.	21½.	14.	S.	nubila pluvia	
XXV.	28.	20.	14½.	S.	nubila	
XXVI.	28.	19½.	14½.	S. W. 1.	pluvia ſubſer.	
XXVII.	28. 2.	19½.	14½.	W.	ſubnub. nebula	
XXVIII.	28. 1.	19.	14.	W.	nubila ſubnub.	
XXIX.	27. 10.	20.	15½.	S. E. 1.	pluvia ſubſer.	
XXX.	27. 6.	20.	16.	S.	pluvia nubila	
XXXI.	27. 6.	20½.	18⅓.	S. E. 2.	pluvia nubila	

AUGUSTUS.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 7.	$20\frac{1}{2}$.	18.	N. W.	ſerena	per hunc menſem delapſa, libras viginti duo, & uncias octo pondo æquavit.
II.	27. 7.	21.	16.	W. 1.	ſerena	
III.	27. 7.	$21\frac{1}{3}$.	15.	W. 1.	ſerena	
IV.	27. 8.	22.	$13\frac{1}{2}$.	W.	ſerena	
V.	27. 8.	21.	13.	N. E. 2.	ſubnubila	
VI.	27. 7.	$20\frac{1}{2}$.	$14\frac{1}{2}$.	N. E. 1.	ſubſerena	
VII.	27. 8.	$20\frac{1}{2}$.	13.	E.	ſerena ſubnub.	
VIII.	27. 8.	$20\frac{1}{2}$.	13.	E.	ſubſerena	
IX.	27. 8.	20.	$15\frac{1}{3}$.	E.	nubila	
X.	27. 6.	20.	17.	S. E.	ſubnubila	
XI.	27. 5.	$21\frac{1}{2}$.	17.	S. W.	ſerena	
XII.	27. 8.	21.	15.	N.	ſerena	
XIII.	27. 9.	21.	15.	N.	ſerena	
XIV.	27. 10.	21.	$13\frac{1}{2}$.	N.	ſubſerena	
XV.	27. 11.	$20\frac{1}{2}$.	$13\frac{1}{2}$.	N. W.	nubila ſerena	
XVI.	28. 1.	20.	14.	W. 1	nubila ſubſer.	
XVII.	28. 1.	19.	14.	W. E. 1.	pluvia	
XVIII.	28. 2.	$18\frac{1}{3}$.	$15\frac{1}{3}$.	N. E.	nubila pluvia	
XIX.	28. 1.	$18\frac{1}{2}$.	15.	N. W.	ſubnubila	
XX.	28. 1.	19.	15.	N. W.	ſerena	
XXI.	27. 11.	$18\frac{1}{2}$.	$13\frac{1}{3}$.	W.	ſubſerena	
XXII.	27. 10.	$19\frac{2}{3}$.	15.	W.	ſubnubila	
XXIII.	27. 10.	$19\frac{2}{3}$.	$15\frac{1}{2}$.	S. W. 1.	ſubnubila	
XXIV.	27. 10.	21.	16.	S. W. 1.	ſubnubila	
XXV.	27. 10.	20.	16.	S. W. 1.	pluvia nubila	
XXVI.	27. 10.	20.	16.	N. W.	nubila pluvia	
XXVII.	27. 11.	20.	$15\frac{1}{2}$.	E.	ſerena	
XXVIII.	28.	$21\frac{1}{3}$.	$15\frac{1}{2}$.	E.	ſubnubila	
XXIX.	28.	$20\frac{1}{2}$.	15.	E.	ſerena	
XXX.	28.	20.	$15\frac{1}{2}$.	W.	ſubſer. ſerena	
XXXI.	28. 2.	$20\frac{1}{3}$.	15.	N. W.	ſubnub. ſubſer.	

SEPTEMBER.

Dies	Barometrum		Thermometrum	Hygrometrum	Ventus		Tempeſtas	Pluvia
	Poll.	lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct.	vis		
I.	28.		$19\frac{1}{3}$.	$14\frac{1}{2}$.	N. E.	1.	nubila	per hunc menſem delapſa, libras viginti pondo æquavit.
II.	27.	10.	18.	15.	N. E.	2.	nubila pluvia	
III.	27.	8.	$16\frac{1}{2}$.	15.	E.		nubila pluvia	
IV.	27.	8.	17.	$15\frac{1}{2}$.	E.		ſubſerena	
V.	27.	8.	17.	15.	N.		ſubſerena	
VI.	27.	8.	18.	15.	N.		ſubnub. ſerena	
VII.	27.	8.	18.	$16\frac{1}{2}$.	S. W.	2.	ſerena	
VIII.	27.	7.	$18\frac{1}{2}$.	17.	S. W.	2.	ſerena	
IX.	27.	7.	19.	17.	W.		ſubſerena	
X.	27.	8.	$17\frac{1}{2}$.	$17\frac{1}{2}$.	S. W.	2.	ſubſerena	
XI.	27.	6.	18.	$17\frac{1}{2}$.	S.		nubila ſubſer.	
XII.	27.	4.	$17\frac{2}{3}$.	19.	S.		nubila ſub ſer.	
XIII.	27.	5.	$17\frac{2}{3}$.	19.	W.	1.	ſubſerena	
XIV.	27.	8.	18.	$18\frac{1}{2}$.	N. W.		ſerena	
XV.	27.	8.	$17\frac{2}{3}$.	18.	N. W.		ſubſerena	
XVI.	27.	7.	17.	$17\frac{1}{2}$.	N. E.	1.	nubila ſubſer.	
XVII.	27.	8.	$16\frac{1}{3}$.	$17\frac{1}{2}$.	N. W.		nubila nebula	
XVIII.	27.	8.	$16\frac{1}{2}$.	18.	N. E.		nubila nebula	
XIX.	27.	7.	16.	18.	S. W.	1.	nubila pluvia	
XX.	27.	7.	16.	$19\frac{1}{2}$.	S. W.		ſubnubila	
XXI.	27.	9.	17.	$19\frac{1}{2}$.	W.	2.	ſubſerena	
XXII.	27.	10.	17.	19.	W.	2.	ſerena	
XXIII.	27.	11.	$17\frac{1}{2}$.	$18\frac{2}{3}$.	W.	1.	ſerena	
XXIV.	28.	1.	16.	18.	N. W.		ſubnubila	
XXV.	28.		$14\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{2}$.	S. W.	2.	ſubnubila	
XXVI.	27.	11.	15.	$16\frac{1}{2}$.	S. W.	1.	nubila ſubſer.	
XXVII.	27.	9.	16.	$16\frac{1}{2}$.	S.		pluvia nubila	
XXVIII.	27.	9.	$15\frac{1}{2}$.	18.	W.	1.	ſubſerena	
XXIX.	27.	11.	$14\frac{1}{3}$.	$17\frac{1}{3}$.	W.	1.	ſerena	
XXX.	28.		15.	$16\frac{1}{2}$.	W.	1.	ſubſerena	

OCTOBER.

Dies	Barometrum Poll. lin.	Thermometrum Grad. part.	Hygrometrum Grad. part.	Ventus direct. vis	Tempeſtas	Pluvia
I.	27. 11.	16.	16.	N. E. 2.	ſerena	per hunc menſem delapſa, libras centum viginti duo pondo æquavit.
II.	27. 11.	16.	16.	N. E. 2.	ſerena	
III.	27. 10.	15.	$14\frac{1}{3}$.	W. 1.	ſubnub. ſerena	
IV.	27. 9.	$13\frac{1}{2}$.	14.	N.	ſubſerena	
V.	27. 9.	12.	15.	W.	ſubſerena	
VI.	27. 7.	$12\frac{1}{2}$.	$16\frac{2}{3}$.	S.	nubila	
VII.	27. 5.	$12\frac{1}{2}$.	$16\frac{2}{3}$.	S.	nebula nubila	
VIII.	27. 2.	14.	19.	S. E. 2.	nubila ſubnub.	
IX.	27. 4.	$12\frac{1}{3}$.	$19\frac{2}{3}$.	E.	ſubſerena	
X.	27. 3.	12.	19.	E.	ſubſerena	
XI.	27. 3.	$13\frac{1}{3}$.	$19\frac{1}{2}$.	S.	nubila pluvia	
XII.	27. 2.	14.	$20\frac{1}{3}$.	S.	ſubſerena	
XIII.	27.	15.	$23\frac{2}{3}$.	S. E. 3.	pluvia	
XIV.	26. 10.	$14\frac{2}{3}$.	27.	S. E. 3.	pluvia	
XV.	26. 11.	$14\frac{2}{3}$.	27.	S. 1.	pluvia	
XVI.	27. 4.	14.	$28\frac{1}{3}$.	S. E. 2.	pluvia nubila	
XVII.	27. 5.	$13\frac{1}{3}$.	28.	E.	nubila ſubnub.	
XVIII.	27. 8.	$12\frac{2}{3}$.	$27\frac{1}{2}$.	E.	nubila pluvia	
XIX.	27. 6.	$12\frac{1}{2}$.	27.	E.	ſubnub. pluvia	
XX.	27. 2.	12.	28.	S.	pluvia	
XXI.	27. 4.	12.	$27\frac{1}{2}$.	S. W. 3.	pluvia ſubſer.	
XXII.	27. 4.	12.	$27\frac{1}{2}$.	S. W. 3.	ſubſer. ſubnub.	
XXIII.	27. 7.	$11\frac{2}{3}$.	$26\frac{1}{3}$.	W.	nubila pluvia	
XXIV.	27. 6.	$10\frac{2}{3}$.	$25\frac{2}{3}$.	N. W.	nebula ſubſer.	
XXV.	27. 6.	11.	24.	N. W.	pluvia	
XXVI.	27. 8.	$10\frac{1}{2}$.	$24\frac{1}{2}$.	N. E.	nubila pluvia	
XXVII.	27. 10.	10.	$24\frac{1}{2}$.	E.	ſubnub. ſubſer.	
XXVIII.	27. 8.	12.	27.	S.	ſubſerena	
XXIX.	27. 9.	11.	27.	E.	nubila nebula	
XXX.	27. 6.	13.	28.	S. E. 1.	nubila pluvia	
XXXI.	27. 8.	$11\frac{1}{3}$.	27.	E.	ſubnub. ſubſer.	

NO-

NOVEMBER.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad. part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	27. 9.	10½.	25⅓.	E.	ſerena	per hunc menſem delapſa libras triginta duo, & uncias quinque pondo æquavit.
II.	27. 11.	11.	22½.	N. E. 2.	ſubſerena	
III.	27. 11.	11.	20⅔.	W. 1.	ſubſerena	
IV.	27. 10.	10⅓.	17½.	N. 1.	nubila ſubſer.	
V.	27. 11.	10⅔.	20.	S. W. 2.	ſubnubila	
VI.	28.	11.	20.	W.	nebula ſerena	
VII.	28.	9½.	18⅓.	W.	nebula ſerena	
VIII.	28. 1.	7⅔.	18.	N.	ſubnubila	
IX.	28. 1.	8.	16⅔.	E. 1.	ſubſerena	
X.	28. 2.	8.	16.	N. E. 1.	ſerena	
XI.	27. 11.	8.	16.	S. W. 2.	ſerena	
XII.	27. 10.	7⅔.	16.	S. W. 2.	ſubnubila	
XIII.	27. 8.	9.	16½.	S. W.	nubila pluvia	
XIV.	27. 5.	9.	18.	S.	nubila	
XV.	27. 3.	10⅓.	18⅓.	S.	pluvia ſubſer.	
XVI.	27. 3.	10½.	19½.	S. W. 2.	ſubſerena	
XVII.	27. 6.	9½.	19.	W.	ſerena	
XVIII.	27. 8.	9.	17⅓.	N.	ſerena	
XIX.	27. 11.	7⅔.	16⅓.	N.	ſerena	
XX.	28. 2.	7.	15.	N. 1.	ſerena	
XXI.	28. 3.	7.	15.	N. E.	ſubſerena	
XXII.	28. 5.	6⅓.	15.	N E.	ſerena ſubnub.	
XXIII.	28. 5.	6.	14.	N E.	ſubnubila	
XXIV.	28. 2.	6.	14½.	N. W. 1.	ſubnubila	
XXV.	28. 2.	5⅔.	14½.	W.	ſerena nubila	
XXVI.	28.	5.	15.	S. W. 2.	pluvia ſubnub.	
XXVII.	28.	5.	17½.	E. 1.	pluvia ſubſer.	
XXVIII.	28. 1.	5⅔.	17.	E. 1.	ſerena	
XXIX.	28. 3.	7.	16.	W.	ſerena	
XXX.	28. 2	6⅓.	16½.	N. W.	ſubſerena	

DE-

DECEMBER.

Dies	Barometrum	Thermometrum	Hygrometrum	Ventus	Tempeſtas	Pluvia
	Poll. lin.	Grad.part.	Grad. part.	direct. vis		
I.	28. 1.	6.	16.	N. E. 2.	ſerena	per hunc menſem duodecim libras, & uncias novem pondo æquavit.
II.	28.	6.	16 $\frac{1}{2}$.	N. W. 2.	ſerena	
III.	27. 10.	7 $\frac{1}{3}$.	19.	E.	ſubnubila	
IV.	27. 10.	7 $\frac{1}{2}$.	19.	E.	ſubſerena	
V.	27. 9.	6.	19 $\frac{1}{2}$.	E. 2.	ſubnubila	
VI.	27. 10.	4.	19.	E.	ſubſerena	
VII.	27. 8.	1 $\frac{1}{2}$.	19.	E. 1.	nubila nix	
VIII.	27. 8.	1. frigor.	17 $\frac{1}{2}$.	N. E. 1.	nub. nix ſubſer.	
IX.	27. 9.	1. calor.	18.	E.	ſubſerena nub.	
X.	27. 11.	3 $\frac{1}{2}$.	17.	N. W. 2.	ſerena ſubſer.	
XI.	28. 1.	3 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{1}{3}$.	N. W. 1.	ſerena	
XII.	28. 3.	3.	15 $\frac{1}{3}$.	N. E.	nebula ſerena	
XIII.	28. 6.	3.	15.	W.	ſubſerena	
XIV.	28. 4.	3.	17.	S. W. 2.	ſubſerena	
XV.	28. 4.	4 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{3}$.	S. W. 2.	ſubſerena	
XVI.	27. 11.	4 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{2}{3}$.	S.	nubila pluvia	
XVII.	27. 9.	4 $\frac{1}{2}$.	23.	S.	nebula pluvia	
XVIII.	27. 9.	4.	23.	W. 1.	ſerena	
XIX.	27. 11.	3.	19 $\frac{1}{2}$.	W.	ſerena	
XX.	28. 1.	1 $\frac{1}{2}$.	17.	W. 2.	ſerena	
XXI.	28. 1.	0.	16 $\frac{1}{3}$.	N. W. 2.	ſerena	
XXII.	28. 2.	0 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{1}{3}$.	N. W.	ſubnubila	
XXIII.	28. 3.	0.	16 $\frac{1}{3}$.	N.	ſubſerena	
XXIV.	28. 5.	0.	15 $\frac{1}{2}$.	E.	ſubnubila	
XXV.	28. 5.	0.	14 $\frac{1}{2}$.	E. 1.	ſerena	
XXVI.	28. 5.	1. calor.	14.	E.	ſubnubila	
XXVII.	28. 3.	1. frigor.	14.	N. E.	ſerena	
XXVIII.	28.	0 $\frac{1}{2}$. frig.	13 $\frac{1}{3}$.	N.	ſerena	
XXIX.	27. 11.	2. calor.	14 $\frac{1}{3}$.	N. 2.	ſerena	
XXX.	27. 10.	2 $\frac{1}{2}$.	16 $\frac{1}{2}$.	N. 3.	ſerena	
XXXI.	27. 9.	3 $\frac{1}{3}$.	17 $\frac{1}{2}$.	N. W. 1.	ſubnubila	

VIN-

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

Additamentum ad Opuſculum de termino generali Serierum recurrentium cum appendice, quod editum eſt in hujus tomi parte prima.

METhodus, quam in opuſculo pluribus verbis explicavi, me docuit, qua ratione inveniendi eſſent termini generales ſerierum recurrentium cum appendice. Verum quum poſtea terminos generales inventos diligenter inſpicerem, cognovi, eos eſſe admodum ſimiles terminis generalibus ſerierum recurrentium vulgarium gradus ſuperioris, quotieſcumque unitas eſt radix illius æquationis, cujus reſolutio neceſſaria eſt ad terminum generalem inveniendum. Quapropter ſuſpicatus ſum, ſeries recurrentes cum appendice eſſe ſeries recurrentes vulgares gradus ſuperioris: quod ſi antea animadvertiſſem multo facilius ex regulis traditis in meo commentario inveniſſem earum terminos generales.

Quod ſuſpicatus ſum, id verum eſſe deprehendi; imo facillime deteguntur quantitates, per quas multiplicandi ſunt termini antecedentes ad ſubſequentem inveniendum. Nam efforma æquationem, in qua primus terminus ſit x elatus ad poteſtatem, quam indicat gradus ſeriei recurrentis cum appendice: coefficientes aliorum terminorum ſint quantitates, negative tamen ſumptæ, quæ antecedentes terminos debent multiplicare, facto initio ab ultimo. Formulam hanc multiplica per $x - 1$, & nova formula exorietur, cujus coefficientes, mutatis ſignis, ſi multiplicent terminos antecedentes, formabunt ſeriem, quæ eadem erit ac recurrens cum appendice.

Regulam hanc, quæ praxim facillimam præbet, explicabo, illam gradatim demonſtrans in ſeriebus cujuſcumque gradus. Itaque ſit ſeries recurrens primi gradus, cujus primus terminus $= a$, appendix $= z$, quantitas multiplicans terminum antecedentem $= t$, nimirum a, b, c, d, e, f &c. Mani-

nifeſtum eſt, fore $b = ta + z$, $c = tb + z$, $d = tc + z$ &c. Multiplica formulam $x - t$ per $x - 1$, ut habeas $\begin{matrix} xx - tx + t \\ - x \end{matrix}$.

Acceptis duobus primis terminis a, b efforma ſeriem recurrentem ſecundi gradus multiplicando duos antecedentes, facto initio ab ultimo, per $t + 1$, $- t$. Tertius terminus ſeriei proveniet $tb + b - ta$; ſed $b = ta + z$; ergo tertius terminus invenietur $= tb + z = c$. Similiter quartus terminus naſcetur $= tc + c - tb$; ergo ſubſtituto valore c fiet $= tc + z = d$: atque ita de reliquis. Conſtat itaque ſeriem recurrentem cum appendice gradus primi eſſe eamdem ac ſeriem recurrentem vulgarem gradus ſecundi formatam eo modo, quo ſupra docui.

Tranſeo ad ſeries recurrentes cum appendice ſecundi gradus. Primi duo termini ſint a, b; quantitates per quas duo termini antecedentes multiplicandi ſunt, facto initio ab ultimo, ſint t, s. Series, quæ hoc modo formatur, ſit a, b, c, d, e, f &c. Habebimus $c = tb + sa + z$, $d = tc + sb + z$, $e = td + sc + z$; atque ita deinceps. Efforma æquationem $xx - tx - s = o$, quam multiplica per $x - 1$, ut proveniat $\begin{matrix} x^3 - tx^2 - sx + s = o \\ - x^2 + tx \end{matrix}$. Jam vero acceptis tribus primis terminis a, b, c confice ſeriem recurrentem tertii gradus, multiplicando tres terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per $t + 1$, $s - t$, $- s$. Quartus terminus erit $= tc + c + sb - tb - sa$; atqui ſupponitur $c = tb + sa + z$; ergo retento tc, & pro c hoc valore ſubſtituto, fiet $= tc + sb + z$, qui eſt idem ac quartus terminus d ſeriei ſuperioris. Eodem modo quintus terminus fiet $= td + d + sc - tc - sb$, qui ſubſtituto valore invento d evadet $= td + sc + z$, qui eſt quintus terminus e ſeriei ſuperioris. Eadem methodo identitas reliquorum terminorum demonſtrabitur. Quapropter ſeries recurrens cum appendice ſecundi gradus eadem eſt ac ſeries recurrens tertii gradus confecta perinde, ac antea traditum eſt.

Simili ratione ſeries recurrens cum appendice tertii gradus demonſtratur convenire cum ſerie recurrente quarti gradus. Sit ſeries recurrens cum appendice a, b, c, d, e, f, g &c. Appendix ſit $= z$; tres multiplicatores terminorum antecedentium, facto initio ab ultimo, ſint t, s, r. Habebimus $d = tc + sb + ra + z$, $e = td + sc + rb + z$, $f = te +$

sd

$sd + rc + z$ &c. Multiplica formulam $x^3 - tx^2 - sx - r = o$ per $x - 1$, ut fiat $x^4 - tx^3 - sx^2 - rx + r = o$. Tum
$ - x^3 + tx^2 + sx$
ſumptis quatuor terminis primis a, b, c, d efforma ſeriem recurrentem multiplicando quatuor terminos antecedentes, facto initio ab ultimo, per $t + 1$, $s - t$, $r - s$, $- r$. Quintus terminus erit $td + sc + rb - ra$; ſed $d = tc + sb + ra + z$;
$+ d - tc - sb$
ergo retento td, & hoc valore pro d ſubſtituto, fiet quintus terminus $= td + sc + rb + z$, qui convenit cum quinto termino e ſeriei ſuperioris. Quod de reliquis omnibus ſimiliter demonſtrabitur. Progreſſus iſte ſatis ſuperque oſtendit, ſeries recurrentes cum appendice nihil aliud eſſe, quam ſeries recurrentes vulgares gradus ſuperioris.

Serierum, in quibus hactenus verſati ſumus, nova proprietas aperienda eſt, ut earum uſus magis magiſque pateat, & natura cognoſcatur. Ajo itaque, ſeries recurrentes cujuſcumque gradus, quotieſcumque æquatio, quæ reſolvitur ad earum terminos generales inveniendos, habet pro radice unitatem, obtinere pro differentiis primis ſeriem recurrentem gradus inferioris. Quare quum ſeries iſtæ coincidant cum ſeriebus recurrentibus cum appendice gradus inferioris, palam fit, differentias primas ſeriei recurrentis cum appendice præbere ſeriem recurrentem ejuſdem gradus.

Gradatim procedens incipiam a ſeriebus recurrentibus ſecundi gradus. Sit æquatio $xx - tx + t = o$, cujus una ra-
$- x$
dix $= 1$. Sumptis ad libitum primis duobus terminis a, b, formetur ſeries multiplicando duos terminos antecedentes per $t + 1$, $- t$, facto initio ab ultimo. Hæc ita exponatur a, b, c, d, e, f &c. Conſtat $c = tb + b - ta$, $d = tc + c - tb$, $e = td + d - tc$ &c. Differentiarum ſeries erit hujuſmodi $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - e$, $e - f$ &c. In ſecundo termino pro c ejus valorem ſubſtitue, & fiet $ta - tb$; ergo ſecundus terminus eſt æqualis primo multiplicato per t. Similiter in tertio ſubſtitue valorem d, & habebis $tb - tc$; igitur tertius terminus eſt æqualis ſecundo multiplicato per t; atque ita de reliquis. Conſtat itaque, differentiarum ſeriem eſſe recurrentem primi gradus, in qua quilibet terminus multiplicatus per t dat ſubſequentem.

Eadem methodo res conficitur in ſerie tertii gradus. Sit æquatio $x^3 - tx^2 - sx + s = o$, quæ habet pro radice uni-
$- x^2 + tx$
tatem. Sumptis primis terminis ad libitum a, b, c formetur ſeries multiplicando tres terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per $t + 1$, $s - t$, $- s$. Sit autem a, b, c, d, e, f, g &c. Patet $d = tc + sb - sa$, $e = td + sc - sb$ &c. Su-
$+ c - tb$ $\quad + d - tc$
mantur differentiæ, & naſcetur ſeries $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - e$, $e - f$, $f - g$ &c. In tertio termino pro d ſubſtitue ejus valorem, & invenies $tb - tc + sa - sb$, qui reſultat, ſi ſecundus terminus ducatur in t, primus in s. Eodem modo poſito in quarto termino valore e, invenies $tc - td + sb - sc$, quæ quantitas naſcitur multiplicato tertio termino per t, ſecundo per s; atque ita deinceps. Quare ſeries differentiarum eſt recurrens ſecundi gradus.

Si ſeries ſit gradus quarti aſſumatur æquatio
$x^4 - tx^3 - sx^2 - rx + r = o$, quæ componitur ex duabus
$- x^3 + tx^2 + sx$
$x^3 - tx^2 - sx - r = o$, $x - 1 = o$. Acceptis quatuor primis terminis a, b, c, d conficiatur ſeries multiplicando quatuor terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per $t + 1$, $s - t$, $r - s$, $- r$. Series hæc ita exponatur a, b, c, d, e, f, g, h &c. Conſtat fore $e = td + sc + rb - ra$, $f =$
$+ d - tc - sb$
$te + sd + rc - rb$, atque ita deinceps. Series differentia-
$+ e - td - sc$
rum exurget $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - e$, $e - f$, $f - g$ &c. In quarto termino pro e pone ejus valorem, & habebis
$tc - sb + ra$, quæ quantitas item reſultat, ſi tertius ter-
$- td - sc - rb$
minus ducatur in t, ſecundus in s, primus in r. Eodem modo in quinto termino ſi valorem f ſubſtituas, invenies quantitatem, quæ naſcitur multiplicato quarto termino per t, ſecundo per s, primo per r, atque ita deinceps. Itaque conſtat, differentiarum ſeriem eſſe recurrentem quarti gradus. Ex hoc progreſſu jure optimo colligimus, ſeriem recurrentem, ſi unitas ſit radix æquationis reſolvendæ, ut detegatur terminus generalis, exhibere differentias, quæ conſtituunt ſeriem recurrentem gradus inferioris. Quocirca ſeries recurrentes cum appen-

pendice habebunt differentias, quæ coaleſcunt in ſeriem recurrentem ejuſdem gradus.

Si ea æquatio, quam reſolvi oportet ad inveniendum terminum generalem ſeriei recurrentis, habeat unam radicem æqualem unitati, differentiæ primæ conſtituunt ſeriem recurrentem gradus inferioris. Quod ſi non tantum una, ſed duplex unitas ſit radix æquationis illius, non ſolum differentiæ primæ coaleſcent in ſeriem uno gradu inferiorem; ſed etiam differentiæ ſecundæ conſtituent ſeriem duobus gradibus inferiorem. Ratio per ſe ſe eſt evidens. Nam ſi unitas eſt duplex radix æquationis reſolvendæ pro ſerie data, relinquitur unitas tamquam radix æquationis reſolvendæ ad inveniendum terminum generalem ſeriei primarum differentiarum; ergo hæc habebit differentias primas, quæ erunt differentiæ ſecundæ ſeriei datæ, componentes ſeriem recurrentem uno gradu minorem ſerie primarum differentiarum; ergo ſeries ſecundarum differentiarum erit duobus gradibus inferior ſerie data. Pariter ſi in eadem æquatione tres radices æquales ſint unitati, differentiæ tertiæ coaleſcent in ſeriem recurrentem tribus gradibus inferiorem ſerie data, atque ita deinceps.

Verumtamen generatim ſeries recurrentes habent differentias primas, quæ coaleſcunt in ſeriem recurrentem ejuſdem gradus. Sit ſeries recurrens a, b, c, d, e, f, g &c. Series primarum differentiarum erit $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - e$, $e - f$, $f - g$ &c. Sit primo ſeries recurrens primi gradus, & t ſit multiplicator termini antecedentis. Fiet $b = ta$, $c = tb$, $d = tc$ &c. In ſecundo termino ſeriei differentiarum ſubſtitue valores c, b, & invenies $ta - tb$, quæ quantitas eſt primus terminus ductus in t. Similiter tertius ſubſtitutis valoribus fit $tb - tc$, qui terminus oritur ex ſecundo termino multiplicato per t, atque ita deinceps; ergo etiam ſeries differentiarum eſt ſeries recurrens gradus primi.

Sit deinde ſeries recurrens gradus alterius, & quantitates, quæ debent multiplicare terminos antecedentes ſint t, s, facto initio ab ultimo. Habebimus $c = tb + sa$, $d = tc + sb$, $e = td + sc$ &c. In tertio termino primarum differentiarum pro c, d ſubſtitue valores ſupra poſitos, & fiet $\begin{matrix} tb + sa, \\ - tc - sb \end{matrix}$ quæ quantitas exurgit, ſi ſecundus terminus ducatur in t, primus in s. Similiter ſi in quarto pro d, e valores ſubſti-

tuas, reperies $\begin{array}{l} tc + sb \\ -td - sc \end{array}$, qui habetur multiplicato tertio termino per t, ſecundo per s, atque ita de reliquis. Igitur compertum eſt, ſeriem differentiarum eſſe recurrentem ejuſdem gradus ſecundi.

Idem dicas velim de ſerie recurrente tertii gradus: nam poſitis multiplicatoribus t, s, r, habemus $d = tc + sb + ra$, $e = td + sc + rb$ &c. In quarto differentiarum termino colloca valores d, e, & reſultabit $\begin{array}{l} tc + sb + ra \\ -td - sc - rb \end{array}$, quæ quantitas naſcitur, ſi ducas tertium terminum in t, ſecundum in s, primum in r; atque ita deinceps. Quæ quum ita ſint progreſſus ſatis ſuperque manifeſtat, ſeriem recurrentem habere differentias, quæ pariter componunt ſeriem recurrentem ejuſdem gradus.

VIN-

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

De corpore projecto, cui præter potentiam ſervantem rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum a centro, applicatæ ſunt aliæ potentiæ duæ, quarum una dirigitur ad idem centrum, altera eſt huic perpendicularis.

EGREGIO GEOMETRÆ CLAIRAUT

VINCENTIUS RICCATUS S. P. D.

NOn multos ante dies accepi tranſmiſſum Parma libellum tuum, in quo tu, Vir doctiſſime, difficilem abditamque Lunæ theoriam perficere contendis. Nihil mihi hoc munere carius extitit, pro quo etiam atque etiam gratias tibi ago maximas. Statim ac abſolvi epiſtolam geometricam, in qua tum eram occupatus, libellum tuum incepi legere ea animi voluptate, qua reliqua tua opera ſemper legi, a quibus plurimum me didiciſſe profiteor. Quod hactenus legi, oſtendit ſummum perfectumque geometram, quem ſcientia, artificium, induſtria vel maxime commendat. Uteris ea methodo, quam primus omnium in aliis perquiſitionibus mechanicis uſurpaſti, quamque deinceps amplificavit doctiſſimus Allembertus in ſua Dynamica. Quandoquidem in hujuſmodi quæſtionum genere alia methodo uti conſueſco, quam pluribus verbis explicavi in opuſculo edito in quarto tomo Academiæ Bononienſis, & cujus novum ſpecimen exhibeo in tomo quinto, qui modo imprimitur, ſolvens problema non expers difficultatis; in mentem mihi venit, inter meam tuamque methodum inſtituere non injucundam comparationem, per quam cognovi, utramque ad eadem omnino conſectaria perducere. Ut autem tibi fidem faciam, me opus tuum legere perattente, ſtatui, ad te mittere comparationem inſtitutam; quod tibi non injucundum fore confido. Qua methodo aggrederer ipſe quæſtionem a te propoſitam, paucis accipe.

Mo-

Mobile A projiciatur per directionem AC, (*Fig.*) velocitate $=V$; ipſique applicentur potentiæ duæ, prima quæ tendat ad focum F, altera ſit primæ perpendicularis: quæritur æquatio curvæ AD a mobile deſcriptæ. Ducantur AB, FB, prima normalis, ſecunda parallela directioni AC. Vocetur $AF=b$, $AB=Q$, $FB=P$. Agatur quæcumque ordinata $FD=y$, cum qua infiniteſimum angulum faciat Fd. Potentia, quæ dirigitur ad focum F, ſit $DH=f$, quæ huic eſt perpendicularis ſit $DK=g$. Notetur punctum m, ubi DK ſecat Fd. Quum FDm ſit angulus rectus, minima recta dm erit differentia FD, atque adeo $=dy$; vocetur $Dm=dx$. Normalis curvæ ſit DG, cui ex punctis F, H, K ducantur perpendiculares FG, HI, KO. Sit $DG=q$, $FG=p$. Radius oſculi vocetur $=R$. Suppono id, quod alias demonſtravi, nimirum $R=\frac{ydy}{dq}$, $q=\frac{ydx}{ds}$, $p=\frac{ydy}{ds}$. Species ds denotat minimum curvæ arcum Dd. Vocata $=u$ velocitate in D, principium, quod ego principium actionum nominare ſoleo, mihi ſufficit æquationem primam.

I. $-fdy+gdx=mudu$. Ad inveniendam ſecundam, quæ innititur in proprietate vis centrifugæ, animadverte, eſſe

FD : DH :: DG : DI DF : DK :: FG : DO

$y : f :: q : DI=\frac{fq}{y}$, $y : g :: p : DO=\frac{gp}{y}$.

Ex his orietur ſecunda æquatio $\frac{fq}{y}+\frac{gp}{y}=\frac{mu^2}{R}$. Subſtitue valorem R, ut habeas $\frac{fqdy}{dq}+\frac{gpdy}{dq}=mu^2$. Arceantur p, q, eorum valoribus ſubſtitutis, & reſultabit æquatio.

II. $\frac{fydxdy}{dqds}+\frac{gydy^2}{dqds}=mu^2$.

Æquationes iſtæ duæ, a quibus ſolutionis facio principium, vel maxime differunt ab illis duabus, ad quas tua te methodus ducit. Nihilo tamen minus aliæ ab aliis non difficili calculo deducuntur; quod ita oſtendo. Voco elementum temporis $=dt$; notum eſt, fore $u=\frac{ds}{dt}$, acceptiſque differentiis, ſumpto tamquam conſtante dt, quæ tua ſuppoſitio eſt, erit $du=\frac{dds}{dt}$. Si in meis æquationibus valores hoſce ſubſtituas, invenies æquationes duas.

I.

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } -fdt^2dy + gdt^2dx = mdsdds \\ \text{II. } fdt^2dx + gdt^2dy = \frac{mds^3dq}{ydy}\end{array}\right\}$$ Prima multiplicetur per dx, altera per dy; tum utriuſque æquationis accipiatur ſumma, ut oriatur $gdt^2.\overline{dx^2+dy^2} = mdxdsdds + \frac{mds^3dq}{y}$, ſive $gdt^2 = \frac{mdxdds}{ds} + \frac{mdsdq}{y}$; ſed $dq = \frac{dydx}{ds} + \frac{yddx}{ds} - \frac{ydxdds}{ds^2}$; ergo facta ſubſtitutione proveniet formula $gdt^2 = \frac{mdxdds}{ds} + \frac{mdydx}{y} + mddx - \frac{mdxdds}{ds} = \frac{mdydx}{y} + mddx$. Abſcinde FR $= r$, atque hoc radio deſcribe minimum arcum Rr $= d\varphi$; habebis $y : r :: dx : d\varphi$; ergo $dx = \frac{yd\varphi}{r}$, & $ddx = \frac{dyd\varphi}{r} + \frac{ydd\varphi}{r}$. Quare facta ſubſtitutione naſcetur $gdt^2 = \frac{md\varphi dy}{r} + \frac{md\varphi dy}{r} + \frac{mydd\varphi}{r} = \frac{2md\varphi dy + mydd\varphi}{r}$, quæ adamuſſim convenit cum prima ex tuis æquationibus.

Si multiplices primam ex meis æquationibus per dy, ſecundam per dx, & alteram ab altera deducas, invenies $fdt^2.\overline{dx^2+dy^2}$, ſeu $fdt^2ds^2 = \frac{mdxds^3dq}{ydy} - mdydsdds$. Divide per ds^2, & ſubſtitue valorem dq, ut obtineas $fdt^2 = \frac{mdx^2}{y} + \frac{mdxddx}{dy} - \frac{mdsdds}{dy}$; ſed $dsdds - dxddx = dyddy$; ergo $fdt^2 = \frac{mdx^2}{y} - mddy = \frac{myd\varphi^2}{r} - mddy$, quæ eadem eſt cum ſecunda æquatione tua. Quoniam formulæ aliæ ab aliis tam clare deducuntur, perſpicuum eſt, utramque methodum tutiſſimam eſſe, & utriuſque principia apprime cum veritate convenire.

Verum tuis formulis non indigeo, quum ex meis menſuram velocitatis, & temporis determinem, & curvæ æquationem inveniam. Ob oculos mihi pono duas meas æquationes, antequam ejecta fuerit ſpecies u & ponens in ſecunda pro fdy ejus valorem $gdx - muu$, quem prima ſuppedi-

ditat, nanciſcor $\frac{g\,y\,d\,x^2 - y\,d\,x\,.\,m\,u\,d\,u + g\,y\,d\,y^2}{d\,q\,d\,s} = m\,u^2$, ſive $g\,y\,d\,s - \frac{y\,d\,x}{d\,s}\,.\,m\,u\,d\,u = m\,u^2\,d\,q$; atqui $\frac{y\,d\,x}{d\,s} = d\,q$; ergo $g\,y\,d\,s = m\,u^2\,d\,q + m\,q\,u\,d\,u$, & facta multiplicatione per q, $g\,q\,y\,d\,s = m\,u^2\,q\,d\,q + m\,q^2\,u\,d\,u$, & integrando $2\,S\,g\,q\,y\,d\,s = m\,u^2\,q^2 - m\,V^2\,Q^2$. Summatoria ita accepta eſt, ut evaneſcat in puncto projectionis. Ultima æquatio præbet

$$u = \frac{\sqrt{m\,V^2\,Q^2 + 2\,S\,g\,q\,y\,d\,s}}{q\sqrt{m}}.\ \text{Hinc}$$

$$d\,t = \frac{d\,s}{u} = \frac{q\,d\,s\sqrt{m}}{\sqrt{m\,V^2\,Q^2 + 2\,S\,g\,q\,y\,d\,s}};\ \text{atqui}\ q\,d\,s = y\,d\,x = \frac{y^2\,d\,\varphi}{r};$$

$$\text{igitur}\ u = \frac{\sqrt{m\,V^2\,Q^2 + 2\,S\,\frac{g\,y^3\,d\,\varphi}{r}}\,.\,\sqrt{r^2\,d\,y^2 + y^2\,d\,\varphi^2}}{y^2\,d\,\varphi\,\sqrt{m}},\ \&$$

$$d\,t = \frac{y^2\,d\,\varphi\,\sqrt{m}}{r\sqrt{m\,V^2\,Q^2 + 2\,S\,\frac{g\,y^3\,d\,\varphi}{r}}},$$ quæ formula exquiſite cum ea cohæret, quam tu, Vir doctiſſime, in ſecundi problematis principio per methodum artificiorum pleniſſimam deduxiſti.

Ut ad curvæ æquationem perveniam, in meam æquationem ſecundam introduco valorem velocitatis, ut oriatur $\frac{f\,y\,d\,x\,d\,y + g\,y\,d\,y^2}{d\,q\,d\,s} = \frac{m\,V^2\,Q^2 + 2\,S\,g\,q\,y\,d\,s}{q^2}$; ſed $y\,d\,x = q\,d\,s$; ergo $\frac{f\,q\,d\,y}{d\,q} - \frac{m\,V^2\,Q^2}{q^2} = \frac{-g\,y\,d\,y^2}{d\,q\,d\,s} + \frac{2\,S\,g\,q\,y\,d\,s}{q^2}$; & facta multiplicatione per $\frac{-d\,q}{q}$, provenit $-f\,d\,y + \frac{m\,V^2\,Q^2\,d\,q}{q^3} = \frac{g\,y\,d\,y^2}{q\,d\,s} - \frac{2\,d\,q\,S\,g\,q\,y\,d\,s}{q^3}$. Quum autem $q\,d\,s = y\,d\,x = \frac{y^2\,d\,\varphi}{r}$, orietur æquatio $-f\,d\,y + \frac{m\,V^2\,Q^2\,d\,q}{q^3} = \frac{r\,g\,d\,y^2}{y\,d\,\varphi} - \frac{2\,d\,q\,S\,\frac{g\,y^3\,d\,\varphi}{r}}{q^3}$, & translatis opportune terminis

$m\,V$

$$mV^2Q^2 + 2S\frac{gy^3 d\varphi}{r} \cdot \frac{dq}{q^3} = fdy + \frac{rgdy^2}{yd\varphi}$$, ſive $\frac{dq}{q^3} = \frac{fdy + \frac{rgdy^2}{yd\varphi}}{mV^2Q^2 + 2S\frac{gy^3 d\varphi}{r}}$. Supponamus $f = \frac{Fb^2}{y^2} + z$, ut F ſit potentia in puncto projectionis, quæ ſervat rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum. Præterea ſupponamus, ab hac potentia F produci velocitatem projectionis $= V$ per ſpatium $= L$, ut ſit $mV^2 = 2FL$, & æquatio novam formam induat

$$\frac{dq}{q^3} = \frac{\frac{Fb^2 dy}{y^2} + zdy + \frac{rgdy^2}{yd\varphi}}{2FLQ^2 + 2S\frac{gy^3 d\varphi}{r}}.$$

Quandoquidem $\frac{dq}{q^3}$ eſt algebraice integrabilis, ſtatim occurrit methodus diſtribuendi æquationem hoc pacto $\frac{dq}{q^3} = \frac{b^2}{2LQ^2} \cdot \frac{dy}{y^2} + \frac{zdy + \frac{rgdy^2}{yd\varphi} - \frac{b^2 dy}{LQ^2y^2}S\frac{gy^3 d\varphi}{r}}{2FLQ^2 + 2S\frac{gy^3 d\varphi}{r}}$. Hæc ſi integretur, exhibet $-M\frac{1}{2q^2} = \frac{-b^2}{2LQ^2y} + S\frac{zdy + \frac{rgdy^2}{yd\varphi} - \frac{b^2 dy}{LQ^2y^2}S\frac{gy^3 d\varphi}{r}}{2FLQ^2 + 2S\frac{gy^3 d\varphi}{r}}$. Ad determinandam additam conſtantem M, opus eſt advertere fieri $q = Q$, ſi $y = b$; unde erit $M = \frac{L-b}{2LQ^2}$: verum ita oportet accipere ſummatoriam, ut in puncto projectionis evaneſcat. Hanc autem ſummatoriam deinceps vocabimus $= H$. Itaque habemus $\frac{L-b}{LQ^2} + \frac{b^2}{LQ^2y} - \frac{1}{q^2} = 2H$, ſive $\frac{L-b}{LQ^2} + \frac{b^2}{LQ^2y} - (\frac{r^2dy^2 + y^2d\varphi^2}{y^4d\varphi^2} = 2H$, ſubſti-

tuto ſcilicet valore q. Ultima æquatio in hunc modum ſcribatur, $\overline{\frac{L-b}{LQ^2}+\frac{b^2}{LQ^2 y}-\frac{1}{y^2}}\,.\,d\varphi^2-\frac{r^2\,dy^2}{y^4}=2H\,d\varphi^2$, ſive

$$d\varphi^2-\frac{r^2\,dy^2}{\frac{L-b}{LQ^2}y^4+\frac{b^2y^3}{LQ^2}-y^2}=\frac{2H\,d\varphi^2}{\frac{L-b}{LQ^2}+\frac{b^2}{LQ^2y}-\frac{1}{y^2}}.$$

Prima pars hujus æquationis eſt reſolubilis in duos factores reales. Effecta hac reſolutione, & dividendo per alterum ex factoribus orietur $d\varphi+\frac{r\,dy}{y\sqrt{\frac{L-b}{LQ^2}y^2+\frac{b^2}{LQ^2}\,.\,y-1}}=$

$$\frac{2H\,d\varphi^2}{\overline{\frac{L-b}{LQ^2}+\frac{b^2}{LQ^2y}-\frac{1}{y^2}}\,.\,d\varphi-\frac{r\,dy}{y\sqrt{\frac{L-b}{LQ^2}y^2+\frac{b^2}{LQ^2}\,.\,y-1}}}.$$

Hujus æquationis pars prima exhibet ſectionem conicam, quæ deſcriberetur, ſi abeſſent potentiæ z, g. Hoc tibi clare conſtabit, ſi facias $\frac{LQ^2}{L-b}=\frac{n^2\,.\,\overline{n+m}}{n-m}$, $\frac{LQ^2}{b^2}=\frac{n\,.\,\overline{n+m}}{2m}$, ex quibus remanent determinatæ m, n per datas b, L, Q; tum ponas $y=\frac{n\,.\,\overline{n+m}}{m+p}$, ut ſit $p=\frac{n\,.\,\overline{n+m}}{y}-m$. Peractis ſubſtitutionibus naſcetur æquatio $d\varphi-\frac{r\,dp}{\sqrt{nn-pp}}=$

$$\frac{2H\,d\varphi^2\,.\,n^2\,.\,\overline{n+m}^2}{\overline{n^2-p^2}\,.\,d\varphi+\frac{r\,dp}{\sqrt{nn-pp}}}.$$

Poſita $r=n$, luce clarius eſt, $\frac{r\,dp}{\sqrt{rr-pp}}$ eſſe elementum arcus circularis, cujus ſinus $=p$. Hunc arcum vocemus $=\mu$: erit igitur $d\varphi-d\mu=\frac{2H\,d\varphi^2\,.\,n^2\,.\,\overline{n+m}^2}{\overline{n^2-p^2}\,.\,\overline{d\varphi+d\mu}}$. Ultimus hic terminus fiat $=d\lambda$, & integretur æquatio; $A+\varphi-\mu=\lambda$. Quantitas A eſt arcus, cujus

cujus ſinus $= \frac{\overline{n.n+m}}{b} - m$. Facto tranſitu ad ſinus erit $Sc.\overline{A+\varphi-\mu} = Sc.\lambda$. Prima pars dat ſectionem conicam, ſecunda correctionem. Si ſequimur methodum, quæ primum obvium venit, in hunc modum ſolvitur tuum primum problema. Veruntamen video, ſolutionem hanc, & formulam, per quam obtinetur, tum ob ſubſtitutiones, quæ adhibitæ ſunt, tum ob multiplices arcus, quos includit, exiguam illi, quem tibi propoſuiſti finem, poſſe utilitatem afferre.

Tua ſolutio invenienda eſt, quæ multo eſt utilior, atque elegantior: quamobrem novus calculi circuitus tenendus eſt. Inquiro primum valorem $\frac{dq}{q^3}$. Quoniam $q = \frac{y^2 d\varphi}{\sqrt{r^2 dy^2 + y^2 d\varphi^2}}$, ſumptis differentiis in hypotheſi $d\varphi$ conſtantis, proveniet $dq = \frac{y^3 dy d\varphi^3 - r^2 y^2 dy d\varphi ddy + 2 r^2 y dy^3 d\varphi}{\overline{r^2 dy^2 + y^2 d\varphi^2}^{\frac{3}{2}}}$; igitur

$$\frac{dq}{q^3} = \frac{y^3 dy d\varphi^3 - r^2 y^2 dy d\varphi ddy + 2 r^2 y dy^3 d\varphi}{y^6 d\varphi^3} = \frac{dy}{y^3} - \frac{r^2 dy ddy}{y^4 d\varphi^2}$$

$+ \frac{2 r^2 dy^3}{y^5 d\varphi^2}$. Hoc invento ſubſtituo in æquatione $\frac{dq}{q^3} =$

$$\frac{b^2}{2LQ^2} . \frac{dy}{y^2} + \frac{z dy + \frac{rg dy^2}{y d\varphi} - \frac{b^2}{LQ^2} . \frac{dy}{y} S \frac{gy^3 d\varphi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\varphi}{r}}$$ valorem

$\frac{dq}{q^3}$, & tranſpono terminos, ut habeam $\frac{b^2}{2LQ^2} . \frac{dy}{y^2} - \frac{dy}{y^3} +$

$$\frac{r^2 dy ddy}{y^4 d\varphi^2} - \frac{2 r^2 dy^3}{y^5 d\varphi^2} + \frac{z dy + \frac{rg dy^2}{y d\varphi} - \frac{LQ^2}{b^2} . \frac{dy}{y^2} S \frac{gy^3 d\varphi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^2 d\varphi}{r}}$$

$= 0$. Facta multiplicatione per $\frac{y^2}{dy}$, ita ſcribatur æquatio

 b^2

$$\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} + \frac{r^2 D \frac{dy}{y^2}}{d\varphi^2} + \frac{zy^2 + \frac{rgydy}{d\varphi} - \frac{b^2}{LQ^2} S \frac{gy^3 d\varphi}{r}}{2FLQ^2 + 2S \frac{gy^3 d\varphi}{r}}$$

$= o$. Terminus ultimus fiat $= \frac{\Omega}{rr}$, ut ſimplicior æquatio exurgat $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} + \frac{r^2 D \frac{dy}{y^2}}{d\varphi^2} + \frac{\Omega}{r^2} = o$.

Poſſem efficere hanc æquationem integrabilem, eam multiplicando per $\frac{dy}{y^2}$; ſed hæc præparatio ſolutionem illam reſtitueret, de qua ſupra loquutus ſum. Quapropter eam integrabilem reddo per multiplicationem alicujus functionis φ. Itaque multiplico per $d\varphi . Cc . \varphi$, pro quo ſubſtituo in primo termino $rdSc.\varphi$, ut ſit $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} . rdSc.\varphi + \frac{r^2 Cc.\varphi}{d\varphi} D \frac{dy}{y^2} + \frac{\Omega dSc.\varphi}{r} = o$, quæ, ſi integretur, præbet $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} . rSc.\varphi + \frac{r^2 dy . Cc\varphi}{y^2 d\varphi} + \frac{\Omega dSc.\varphi}{r} = M$. Ad determinandam conſtantem M, adverto, ſi $y = b$, φ, & $Sc.\varphi = o$, ac $Cc.\varphi = r$, fore $dy : dx : P : Q$; $dx : d\varphi :: b : r$; ergo $dy : d\varphi :: bP : rQ$; qui valores ſubſtituti dant $M = \frac{r^2 P}{bQ}$; igitur $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} . rSc.\varphi + \frac{r^2 dyCc.\varphi}{y^2 d\varphi} + S \frac{\Omega dSc.\varphi}{r} = \frac{r^2 P}{bQ}$, in qua $S \frac{\Omega dSc.\varphi}{r}$ ita accipienda eſt, ut evaneſcat in puncto projectionis. Ultima æquatio multiplicetur per $\frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^2}$, ut naſcatur $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} . \frac{rd\varphi Sc.\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^2} + \frac{r^2 dy}{y^2 Cc.\varphi} + \frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^2} S \frac{\Omega dSc.\varphi}{r} - \frac{r^2 P}{bQ} . \frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^2} = o$; atqui $d\varphi Sc.\varphi = - rdCc.\varphi$, & $\frac{d\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^2} = \frac{dTc.\varphi}{r^2}$; igitur

b^2

$\overline{\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y}} : - \frac{r^2\, d\, Cc.\varphi}{\overline{Cc.\varphi}^2} + \frac{r^2\, dy}{y^2\, Cc.\varphi} + \frac{dTc.\varphi}{r^3} S\Omega\, dSc.\varphi$ $- \frac{P\, dTc.\varphi}{Q} = o$, & peracta integratione $\frac{r^2}{Cc.\varphi} . \overline{\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y}}$ $+ S\, \frac{dTc.\varphi . S\Omega\, dSc.\varphi}{r^3} - \frac{PTc.\varphi}{Q} = M$. Conſtans M facili negotio detegitur $= \frac{rb^3 - 2rLQ^2}{2LQb}$. Hinc peractis congruis tranſpoſitionibus oritur $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} = \frac{b^3 - 2LQ^2}{2rLQ^2 b} . Cc.\varphi +$ $\frac{P.Tc.\varphi.Cc.\varphi}{r^2 bQ} - \frac{\overline{Cc.\varphi\, S\, d.Tc.\varphi\, S\overline{\Omega\, dSc.\varphi}}}{r^5}$; atqui notiſſimum eſt $\frac{Tc.\varphi . Cc.\varphi}{r} = Sc.\varphi$; igitur $\frac{b^2}{2LQ^2} - \frac{1}{y} = \frac{b^3 - 2LQ^2}{2rLQ^2 b}$ $. Cc.\varphi + \frac{P}{rbQ} . Sc.\varphi - \frac{Cc.\varphi . \overline{S\, dTc.\varphi\, S\overline{\Omega\, dSc.\varphi}}}{r^5}$, aut $\frac{2LQ^2}{b^2 y} = 1 - \frac{2LQP}{rb^3} . Sc.\varphi - (\frac{b^3 - 2LQ^2}{rb^3} . Cc.\varphi + \frac{2LQ^2}{b^2}$ $Cc.\varphi\, S\, \frac{\overline{dTc.\varphi\, S\overline{\Omega\, dSc.\varphi}}}{r^5}$. Quoad conſtantium determinationem hoc inter me, & te intereſt, quod ego ad projectionis punctum ſtatuo arcum $\varphi = o$; ubi vero tu in problemate tertio ponis arcum $\nu = \alpha$. Verum ſi hujus diſcriminis ratio habeatur, omnia exquiſite conveniunt.

Æquatio $\frac{2LQ^2}{b^2 y} = 1 - \frac{2LPQ}{rb^3} . Sc.\varphi - (\frac{b^3 - 2LQ^2}{rb^3}$ $. Cc.\varphi$ ſufficit ſectionem conicam, quæ deſcriberetur, niſi exiſterent potentiæ z, g. Si angulus projectionis fuerit rectus, habebitur $P = o$, $Q = b$, unde æquatio $\frac{2L}{y} = 1 - (\frac{b - 2L}{rb}$ $. Cc.\varphi$. In hoc caſu radius vector in puncto projectionis eſt axis ſectionis, & vocatis $= u$ ordinatis orthogonalibus, &

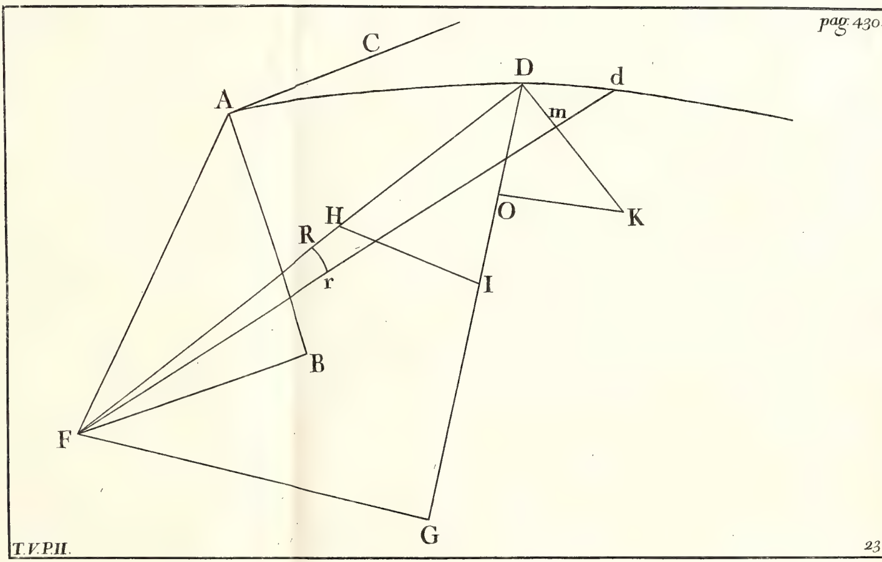
$b - x$

$b - x$ interceptis inter focum ac ordinatas, æquatio hæc proveniet $4Lb^2x + \overline{4LL - 4Lb}\,.\,x^2 = b^2u^2$. Ad inveniendum axem etiam in caſu, ubi angulus projectionis non eſt rectus, ſequens methodus afferet utilitatem. Determinetur ejuſmodi arcus $= \varepsilon$, in quo ſit $Sc.\varepsilon : Cc.\varepsilon :: 2LPQ : b^3 - 2LQ^2$. Determinetur item ejuſmodi quantitas $= n$, quæ efficiat, ut $rnSc.\varepsilon = 2LPQ$; erit etiam $rnCc.\varepsilon = b^3 - 2LQ^2$. Igitur æquatio hanc formam induet $\frac{2LQ^2}{b^2y} = 1 - \left(\frac{nSc.\varepsilon.Sc.\varphi + nCc.\varepsilon.Cc.\varphi}{r^3}\right.$; atqui conſtat $Sc.\varepsilon.Sc.\varphi + Cc.\varepsilon.Cc.\varphi = r.Cc.\overline{\varphi - \varepsilon}$; ergo $\frac{2LQ^2}{b^2y} = 1 - \frac{rnCc.\overline{\varepsilon - \varphi}}{b^3}$. Hæc formula oſtendit, rectam facientem angulum $= \varepsilon$ cum radio vectore in puncto projectionis eſſe ſectionis conicæ axem: hujus autem ſectionis æquatio erit $4LQ^2b^4x + \overline{r^4n^2 - b^6}\,.\,x^2 = b^6u^2$, vocatis axi ordinatis $= u$, interceptis vero inter focum & ordinatas $= \frac{2LQ^2b}{b^3 - r^2n} - x$.

Formula correctionis, quam ego inveni, omiſſo $\frac{2LQ^2}{b^2}$; per quod meum Ω differt a tuo, ad tuam facile reducitur. Perſpicuum eſt $S\,dTc.\varphi.\overline{S\Omega dSc.\varphi} = Tc.\varphi.S\Omega dSc.\varphi - STc.\varphi.\Omega dSc.\varphi$; igitur $Cc.\varphi S\,dTc.\varphi\overline{S\Omega dSc.\varphi} = Cc.\varphi.Tc.\varphi S\Omega dSc.\varphi - Cc.\varphi.STc.\varphi.\Omega dSc.\varphi$; ſed $Cc.\varphi.Tc.\varphi = rSc.\varphi$, & $dSc.\varphi = \frac{d\varphi Cc.\varphi}{r}$; ergo $Cc.\varphi S\,dTc.\varphi\overline{S\Omega dSc.\varphi} = Sc.\varphi S\Omega d\varphi Cc.\varphi - Cc.\varphi S\Omega d\varphi Sc.\varphi$. Quod erat demonſtrandum.

Non alia de cauſſa has nugas tibi, Vir clariſſime, ſcribendas cenſui, niſi ut plane cognoſceres, meam methodum æque ac tuam ad illas formulas perducere, quæ conſtituunt baſim ejus ratiocinii, quo perficis Lunæ theoriam. Opuſculum tuum pergam legere, & nullus dubito, quin inventurus ſim

pag. 430.



T.V.P.II.

ſim mira & recondita in tuis calculis artificia. Sed perſequar pedetentim, tum quia materies ubique attentionem expoſcit maximam, tum quia diuturnis gravibuſque aliis occupationibus diſtineor, quæ otium relinquunt ſatis exiguum. Hoc maxime velim tibi perſuadeas, a me fieri plurimi & te, & ingenii tui monumenta. Vale.

Bononiæ in Italia Non. Junii 1765.

VIN-

VINCENTII RICCATI SOC. JESU.

De quadratura curvarum tradita per ſummas generales ſerierum.

VINCENTIUS RICCATUS

JACOBO MARISCOTTO

Præſidi Bononienſis Academiæ

S. P. D.

ALiquot ante annos quum in publicam lucem emiſi commentarium, in quo novam methodum exhibui accipiendi ſummas generales ſerierum, quæ ſummam generalem non reſpuunt, quæſiſti ex me iterum ac ſæpius, Jacobe ornatiſſime, utrum earum curvarum, quæ algebraice quadrari poſſunt, liceret mihi per ſummam ſerierum quadraturam determinare. Ad rem meam maxime pertinebat, interrogationem tuam non prorſus contemnere, quia eidem ſatisfaciens videbar meæ methodi fœcunditatem non mediocriter illuſtrare. Sæpenumero nihil eſt facilius, quam per ſummam ſerierum quadraturam invenire. Verum in aliis caſibus permultis tanta ſe ſe offert difficultas, quæ inquirentem quemque poſſet deterrere. Rem utramque aperiam exemplo facillimo Parabolæ Apollonianæ.

Sit Parabola Apolloniana AD (*Fig.* 1.), cujus axis ſit AF, tangens autem axi normalis ſit AB, & quæratur ſpatium ABD. Vocato parametro $= a$, AB $= x$, BD $= y$, erit æquatio curvæ, ut cuique conſtat, $xx = ay$. Dividatur abſciſſa AB in partes infiniteſimas æquales Ae, e2e, 2e3e, 3e4e &c., quarum numerus, qui infinitus erit, vocetur $= n$; ſingulæ autem vocentur $= q$, Patet fore $nq = x$. Agantur ordinatæ ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c., quæ analitice per q ita exprimentur $\frac{q^2}{a}$, $\frac{4q^2}{a}$, $\frac{9q^2}{a}$, $\frac{16q^2}{a}$ &c.: ergo rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c. exprimentur per hanc ſe-

ſeriem $\frac{q^3}{a}$, $\frac{4q^3}{a}$, $\frac{9q^3}{a}$, $\frac{16q^3}{a}$ &c., cujus ultimus terminus eſt $\frac{n^2q^3}{a}$. Horum autem rectangulorum ſummam adæquat, ut notiſſimum eſt, area parabolica ABD: ergo hæc area eſt æqualis quantitati $\frac{q^3}{a}$ ductæ in ſummam ſeriei
$1, 4, 9, 16 \ldots\ldots n^2$.

Series hæc, quæ coaleſcit ex quadratis numerorum naturalium, eſt algebraica ſecundi ordinis, quia ejus differentiæ ſecundæ conſtantes ſunt, & habet terminum generalem $= n^2$. Quare per methodum in altero commentarii capite traditam, invenies ejus ſummam $= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2.3}$. Itaque area parabolica $ABD = \frac{q^3}{a} . \overline{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2.3}}$. Verum quum n infinita ſit, n^2, & n evaneſcunt reſpectu n^3: ergo ſpatium parabolicum $ABD = \frac{n^3q^3}{3a}$: atqui $nq = x$: ergo idem ſpatium $= \frac{x^3}{3a}$: ſed $\frac{x^2}{a} = y$: igitur area $ABD = \frac{xy}{3}$; quod veriſſimum eſſe ex aliis methodis conſtat. Methodus autem hæc, ut probe vides, difficultatem habet nullam.

Verumtamen res ſecus ſe ſe habebit, & calculus incurret in difficultatem non levem, ſi parabolam referamus ad axem, ut vocata $AB = x$, (*Fig* 2.) $BD = y$ ſit ejus æquatio $ax = yy$. Namque diviſa AB in partes æquales numero infinitas Ae, e2e, 2e3e, 3e4e &c., quarum ſingulæ $= q$, ut ſit $nq = x$; tum ductis ordinatis ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c., palam eſt, has exprimi per terminos ſequentis ſeriei $\sqrt{aq}$, $\sqrt{2aq}$, $\sqrt{3aq}$, $\sqrt{4aq} \ldots\ldots \sqrt{naq}$. Igitur rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c., quorum ſumma adæquat aream parabolicam ABD, repræſentantur a terminis ſeriei $q\sqrt{aq}$, $q\sqrt{2aq}$, $q\sqrt{3aq}$, $q\sqrt{4aq} \ldots\ldots q\sqrt{naq}$: igitur area ABD æqualis eſt quantitati $q\sqrt{aq}$ multiplicatæ per ſummam ſeriei $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} \ldots\ldots \sqrt{n}$.

Hic difficultas exoritur maxima. Nam ſeries expoſita, cujus terminus generalis $= \sqrt{n}$ caret, ſumma generali algebraica. Quare videtur, per meam methodum capiendi ſummas generales ſerierum non poſſe hoc modo obtineri quadraturam ſpatii parabolici ABD.

Ut me liberem ab hac non contemnenda difficultate, duplicem methodum in uſum traduco. Utramque autem exponam eodem adhibito exemplo Parabolæ Apollonianæ. Quod ſpectat ad primam. Quis me jubet dividere abſciſſam AB (*Fig.* 3.) in partes æquales? Ad rem meam ſatis eſt, ut dividam in partes infiniteſimas. Quare eo modo partibor, ut reſpondentes ordinatæ ejuſmodi valorem induant, qui in terminis ſeriei expellat irrationalia, & ſeriem producat præditam ſumma generali.

In vulgari Parabola voti compos fiam ſumens ſpatiola infiniteſima Ae, e2e, 2e3e, 3e4e &c., in ratione numerorum imparium ita, ut, vocato primo Ae $= q$, ſint ſucceſſive q, $3q$, $5q$, $7q$ &c. Agantur ordinatæ ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c. Ex natura Parabolæ ita per q analytice exprimentur $\sqrt{aq}$, $2\sqrt{aq}$, $3\sqrt{aq}$, $4\sqrt{aq}$ &c. Quare rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c., quæ adæquat area parabolica ABD, repræſentantur ab hac ſerie $q\sqrt{aq}$, $2.3q.\sqrt{aq}$, $3.5q\sqrt{aq}$, $4.7q\sqrt{aq}$ &c. Ergo area Parabolica ABD invenitur æqualis $q\sqrt{aq}$ ductæ in ſummam ſeriei 1.1, 2.3, 3.5, 4.7 &c.

Series hæc formatur a multiplicatione duarum ſerierum
1, 2, 3, 4 &c.
1, 3, 5, 7 &c., quarum prima eſt numerorum naturalium, & habet terminum generalem $= n$; altera eſt numerorum imparium, & habet terminum generalem $= 2n - 1$: ergo ſeries, a cujus ſumma dependet Parabolæ quadratura, habebit terminum generalem $= 2nn - n$. Si hujuſce ſeriei, quæ eſt algebraica ſecundi ordinis, ex mei commentarii capite altero, ſummam quæras, reperies eam eſſe $= \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2.3}n$. Hæc autem facta n infinita, evaneſcentibus duobus ultimis terminis fit $= \frac{2}{3}n^3$. Itaque ſpatium parabolicum ABD $= \frac{2}{3}n^3 q\sqrt{aq}$.

Ve-

Verum obſervandum eſt, abſciſſam x in facta hypotheſi non æquare nq, ſed æquare ſummam ſeriei q, $3q$, $5q$, $7q$ &c. uſque ad terminum n eſimum, quæ ſumma $= n^2 q$: ergo $x = n^2 q$, & $x\sqrt{x} = n^3 q \sqrt{q}$: igitur area parabolica erit $= \frac{2}{3} x \sqrt{ax}$: ſed $y = \sqrt{ax}$: ergo eadem area $= \frac{2}{3} xy$. Quod erat inveniendum.

Quod ſi aveas uti ea ſerie, quæ oritur ex diviſione abſciſſæ AB (*Fig.* 2.) in partes æquales, cujus terminus generalis $= \sqrt{n}$, alia longe diverſa adhibenda eſt methodus, quæ majorem poſcit induſtriam. Etenim ſeries prædita termino generali $= \sqrt{n}$ caret ſumma generali algebraica, ut ex meo commentario ſatis ſuperque conſtat. Quapropter dabo operam, ut eamdem ſeriem, cui eſt terminus generalis $= \sqrt{n}$, conſtituam mediam inter duas ſeries, quæ præditæ ſint conditionibus duabus: primum ut ſummam generalem admittant; deinde ut facta n infinita, ſumptiſque terminis numero infinitis, ſerierum ſummæ æquales evadant, licet generatim ſint inæquales. Quomodo autem hoc præſtare liceat, enitar, ut dilucide exponam.

Adverto quantitatem $\sqrt{n}$, exiſtente n numero integro, & poſitivo, mediam eſſe inter duas haſce quantitates

$$\tfrac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3} . \overline{n - 1}^{\frac{3}{2}}$$

$$\tfrac{2}{3} . \overline{n + 1}^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$$, majorem ſcilicet eſſe prima, minorem altera. Ut hoc cognoſcas ſatis eſt, ut duo binomia $n - 1$, $n + 1$ ad poteſtatem $\frac{3}{2}$ methodo newtoniana eleves. Itaque ſi tres ſeries efformes, quarum prima habeat terminum generalem $= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} . \overline{n - 1}^{\frac{3}{2}}$, ſecunda habeat terminum generalem $= \sqrt{n}$, tertiæ terminus generalis ſit $= \frac{2}{3} . \overline{n + 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$, ſinguli termini ſecundæ ſeriei medii erunt inter ſingulos aliarum: ergo etiam ſumma ſecundæ ſeriei erit media inter ſummas aliarum.

Præterea ſumma ſeriei primæ, cui eſt terminus generalis

 =

$= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} . \overline{n - 1}^{\frac{3}{2}}$, per ea, quæ docui in primo commentarii capite, eſt $= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$; tertiæ vero, cujus terminus generalis $= \frac{2}{3} \overline{n + 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$, ſumma eſt $= \frac{2}{3} . \overline{n + 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$: igitur inter duas haſce quantitates $\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$, $\frac{2}{3} . \overline{n + 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$ media eſt ſumma ſeriei, quam gignit terminus generalis $= \sqrt{n}$. Quantitates iſtæ duæ inæquales ſunt, donec n finitus fuerit numerus, ſed facto n infinito evadunt æquales, & utraque $=$ $\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$: ergo ſeriei mediæ præditæ termino generali $= \sqrt{n}$, ſumma fiet $= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$.

Quoniam autem paullo ante inveni, ſpatium parabolicum A B D æquale quantitati $q^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}$ ductæ in ſummam ſeriei $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ &c....... $\sqrt{n}$, erit area A B D $= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$ $q^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}$; ſed $nq = x$: ergo area A B D $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \sqrt{a} = \frac{2}{3} x \sqrt{ax}$: atqui $\sqrt{ax} = y$: ergo area A B D $= \frac{2}{3} xy$.

Ne autem videar ſola conica parabola contentus, modum hunc quadrandi curvas per ſummam ſerierum altioribus omnibus Parabolis, & Hyperbolis applicabo excepta Hyperbola Apolloniana. Verum quando methodus hæc noſtra hoc duntaxat poſtulat, ut accipiantur ſummæ ſerierum poſito numero terminorum infinito, neceſſe eſt, ut ad evitandam calculi prolixitatem, atque moleſtiam doceam modum, quo ſeries in infinitum producta facilius colligatur in ſummam. Loquimur hic de illis ſeriebus, quarum terminus generalis, qui datus ſupponitur, ſit functio algebraica integra. Harum ſerierum ſummæ, ſi bene memoria tenes ea, quæ primo, atque altero commentarii capite declaravi, in hunc modum inveniri poſſunt. Formetur formula algebraica data per n, quæ ſpecies numerum indicat terminorum, uno gradu altior, quam ſit terminus generalis, prædita terminis omnibus excepto ultimo, quorum coefficientes determinandi ſint in operationis progreſſu. In hac pro n ſcribatur $n - 1$, & quæ exurgit formula a ſupe-

pe-

periore detrahatur. Facta deductione nova ſe prodit formula ejuſdem gradus, ac terminus generalis, atque cum hoc identica ſit oportet. Itaque comparatione rite inſtituta fit coefficientium determinatio, atque ſeriei ſumma detegitur.

Hujuſce analyſeos progreſſum opportunum erit exemplo illuſtrare. Invenienda ſit ſumma generalis ſeriei, cujus ſupra mentionem fecimus, & cujus terminus generalis $= 2nn - n$. Finge hujus ſummam eſſe $= An^3 + Bn^2 + Cn$, quæ formula & caret ultimo termino, & eſt uno gradu altior, quam terminus generalis. In hac pro n ſcribe $n - 1$, & novam, quæ exoritur, formulam fac deducas ex ſuppoſita, ut ſit

$$\begin{array}{llll} An^3 + Bn^2 & + Cn & & \\ -An^3 + 3An^2 & - 3An & + A & \\ \quad\; - Bn^2 & + 2Bn & - B & \\ & - Cn & + C. & \end{array}$$

Facta actuali ſubductione reliqua eſt formula

$$\begin{array}{lll} 3An^2 - 3An & + A & \\ \quad + 2Bn & - B & \\ & + C, & \end{array}$$

quæ ad determinandos valores coefficientium A, B, C conferenda eſt cum termino generali: quæ collatio dabit $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{-1}{2 \cdot 3}$: ergo ſumma ſeriei erit $= \frac{2}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} n$: quemadmodum antea ſuppoſita eſt.

In hoc progreſſu ex formula ſummæ ſuppoſita, ſi deducatur ea, quæ oritur ex ſubſtitutione $n - 1$ pro n, ſemper evaneſcit primus terminus ex contrarietate ſignorum, & formula deſcendit ad eum gradum, in quo ſitus eſt ſeriei terminus generalis. In altero termino licet ſecundus terminus formulæ ſuppoſitæ cum ſuo coefficiente elidatur; tamen reliquus eſt ſecundus terminus binomii $n - 1$ elati ad poteſtatem, & affecti coefficiente primi termini formulæ ſuppoſitæ mutato ſigno. Si autem n fiat infinitus, reliqui termini omnes reſpectu hujus evaneſcunt. Quare ad inveniendam ſummam ſeriei in infinitum productæ, ſatis erit terminum hunc, qui reſiduus eſt, comparare cum termino primo termini generalis, & determinare coefficientis valorem.

Ita in exemplo adducto facta deductione evaneſcit terminus An^3; in ſequenti termino evaneſcit Bn^2, & ſolum re-

remanet $3An^2$; qua de re coefficiens B ex ſecundo termino abit. Qui reliquus eſt $3An^2$ nihil eſt aliud quam ſecundus terminus binomii $A.\overline{n-1}^3$ ſigno mutato. Quare ſi $3An^2$ conferatur cum $2n^2$, inveniemus $A=\frac{2}{3}$. Igitur ſumma ſeriei in infinitum productæ erit $=\frac{2}{3}n^3$, exiſtente n infinita.

Quæ quum ita ſint, hæc ſtatuatur regula ad inveniendam ſummam ſeriei in infinitum productæ ex dato termino generali. Eleva binomium $n-1$ ad poteſtatem uno gradu altiorem, quam ſit poteſtas termini generalis: terminum alterum mutato ſigno multiplica per indeterminatam A, tum compara cum termini generalis termino primo, & determina valorem A. Hunc multiplica per poteſtatem n uno gradu altiorem, quam ſit poteſtas termini generalis; & invenies quæſitam ſummam ſeriei in infinitum productæ.

His explicatis redeo in viam. Ex tribus methodis, quas ſupra applicavi Parabolæ Apollonianæ, ajo, primam inſervire quadrandis omnibus parabolis, quæ hac æquatione continentur $a^{m-1}y=x^m$, exiſtente m numero integro, & poſitivo. Sit hæc Parabola A D, cujus abſciſſa A B $=x$, (*Fig.* 1.) ordinata B D $=y$. Diviſa A B in infinitas partes æquales, retentiſque ſuperioribus denominationibus conſtat, ſucceſſivas ordinatas fore

$\frac{q^m}{a^{m-1}}$, $\frac{2^m q^m}{a^{m-1}}$, $\frac{3^m q^m}{a^{m-1}}$, $\frac{4^m q^m}{a^{m-1}}$, &c. ...... $\frac{n^m q^m}{a^{m-1}}$. Igitur ſucceſſiva rectangula, quorum ſumma adæquat aream parabolicam A B D, erunt

$\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}$, $\frac{2^m . q^{m+1}}{a^{m-1}}$, $\frac{3^m q^{m+1}}{a^{m-1}}$, $\frac{4^m . q^{m+1}}{a^{m-1}}$ ...... $\frac{n^m q^{m+1}}{a^{m-1}}$: ergo area A B D æquabit quantitatem $\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}$ ductam in ſequentem ſeriem $1, 2^m, 3^m, 4^m \ldots\ldots n^m$.

Itaque ſi quis hujuſce ſeriei ſummam invenerit, aream parabolicam obtinebit. Series autem eſt algebraica ordinis $m^{eſimi}$, cujus ſcilicet differentiæ $m^{eſimæ}$ conſtantes ſunt, & habet pro termino generali n^m. Facta n infinita ſummam ex præcedenti animadverſione ita invenies. Eleva ad poteſtatem $m+1$ binomium $n-1$, ſecundus terminus erit mutato ſigno

m

$\overline{m+1}.n^m$. Hunc multiplica per A, & compara cum n^m primo, imo unico termino termini generalis, & invenies $A = \frac{m+1}{1}$: ergo ſumma ſeriei in infinitum productæ fiet $= \frac{n^{m+1}}{m+1}$: ergo area parabolica ABD $= \frac{n^{m+1}q^{m+1}}{\overline{m+1}.a^{m-1}}$: ſed $nq = x$: ergo area ABD $= \frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}.a^{m-1}} = \frac{xy}{m+1}$. Q. E. I.

Secunda methodus inſervit quadrandis omnibus parabolis, quibus eſt æquatio $a^{m-1}x = y^m$ exiſtente m numero integro, & poſitivo. Etenim abſciſſa AB (*Fig.* 3) non dividatur in partes æquales, ſed ita ſucceſſive creſcentes, ut ſervent inter ſe eam rationem, quam termini ſequentis ſeriei

$1, 2^m - 1, 3^m - 2^m, 4^m - 3^m \ldots\ldots n^m - (\overline{n-1}^m$, ita ut vocata prima parte A e $= q$, A e, e 2 e, 2 e 3 e, 3 e 4 e &c., ſucceſſive exprimantur per terminos ſeriei

$q, \overline{2^m - 1}.q, \overline{3^m - 2^m}.q, \overline{4^m - 3^m}.q \ldots \overline{n^m - (\overline{n-1}^m}.q$.

Manifeſtum eſt, abſciſſas integras A e, A 2 e, A 3 e, A 4 e &c. fore $q, 2^m q, 3^m q, 4^m q \ldots\ldots n^m q$. Quapropter ordinatæ e i, 2 e 2 i, 3 e 3 i, 4 e 4 i &c., invenientur

$\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}, \overline{a^{m-1}.2^m q}^{\frac{1}{m}}, \overline{a^{m-1}.3^m q}^{\frac{1}{m}} \ldots \overline{a^{m-1}n^m q}^{\frac{1}{m}}$, ſive

$1.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}, 2.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}, 3.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}} \ldots n.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}$.

Itaque rectangula i e A, 2 i 2 e e, 3 i 3 e 2 e, 4 i 4 e 3 e &c., quibus area parabolica per adæquationem æquivalet, fient ſucceſſive æqualia

$q.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}, 2.\overline{2^m - 1}.q.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}, 3.\overline{3^m - 2^m}.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}$

$4.\overline{4^m - 3^m}.q.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}} \ldots n.\overline{n^m - (\overline{n-1}^m}.q.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}$.

Qua de re area parabolica invenitur æqualis quantitati

$q.\overline{a^{m-1}q}^{\frac{1}{m}}$ ductæ in ſummam ſeriei

$1, 2.\overline{2^m - 1}, 3.\overline{3^m - 2^m}, 4.\overline{4^m - 3^m} \ldots n.\overline{n^m - (\overline{n-1}^m}$.

Series hæc, cujus terminus generalis eſt $=$ $n.n^m - (\overline{n - 1}^m$, quamquam primo aſpectu videtur eſſe gradus $m + 1$; tamen quia terminus n^{m+1} ex ſignorum contrarietate eliditur, eſt tantum gradus m, & primus terminus ejus termini generalis eſt $m.n^m$. Ut itaque ſeriei in infinitum productæ invenias ſummam, ex ſuperiori animadverſione eleva ad poteſtatem $m + 1$ binomium $n - 1$, ejuſque ſecundum terminum $\overline{m + 1}.n^m$, in quo ſignum mutatum eſt, multiplica per A, & confer cum $m.n^m$ primo termino termini generalis, & invenies $A = \frac{m}{m+1}$: ergo ſeriei in infinitum productæ ſumma $= \frac{m}{m+1} n^{m+1}$: igitur area parabolica ABD $= \frac{m}{m+1} n^{m+1} q.\overline{a^{m-1} q}^{\frac{1}{m}}$.

Nemo unus non videt abſciſſam x æqualem eſſe quantitati q ductæ in ſummam ſeriei $1, 2^m - 1, 3^m - 2^m, 4^m - 3^m \ldots\ldots n^m - (n - 1^m$. Hujus autem ſeriei ſumma $= n^m$: ergo $x = n^m q$. Igitur facta ſubſtitutione fiet area parabolica ABD $= \frac{m}{m+1} x.\overline{a^{m-1} x}^{\frac{1}{m}}$: ſed $\overline{a^{m-1} x}^{\frac{1}{m}} = y$: ergo area ABD $= \frac{m}{m+1} xy$. Q. E. I.

Methodus tertia utilis eſt ad quadrandas Parabolas omnes, & Hyperbolas cujuſcumque gradus excepta Hyperbola Apolloniana. Harum curvarum omnium æquatio eſt $\frac{x^m}{a^{m-1}} = y$, in qua m poteſt eſſe quilibet numerus poſitivus, vel negativus, integer vel fractus. Si m poſitivus ſit, æquatio eſt ad Parabolas, ſi m ſit negativus, æquatio eſt ad Hyperbolas, & ſi $m = -1$, æquatio eſt ad Hyperbolam Apollonianam. Diviſa abſciſſa AB (*Fig.* 2, 4) in partes minimas æquales, quarum ſingulæ ſint $= q$. Reſpondentes ordinatæ

ei,

ei, 2e2i, 3e3i, 4e4i &c., erunt

$\frac{q^m}{a^{m-1}}, \frac{2^m q^m}{a^{m-1}}, \frac{3^m q^m}{a^{m-1}}, \frac{4^m q^m}{a^{m-1}} \ldots\ldots \frac{n^m q^m}{a^{m-1}}$: ergo rectangula ieA, 2i2ee, 3i3e2e, 4i4e3e &c., quorum ſummæ æqualis eſt area curvilinea, fient

$\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{2^m q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{3^m q^{m+1}}{a^{m-1}}, \frac{4^m q^{m+1}}{a^{m-1}} \ldots\ldots \frac{n^m q^{m+1}}{a^{m-1}}$: ergo area curvilinea æquabit quantitatem $\frac{q^{m+1}}{a^{m-1}}$ ductam in ſummam ſeriei $1, 2^m, 3^m, 4^m \ldots\ldots n^m$, cujus terminus generalis $= n^m$. Hujus ſeriei ſumma invenienda eſt pro hypotheſi n infinitæ.

Hanc ob rem præmittendum eſt theorema. Quicumque ſit numerus n, dummodo integer, & poſitivus, quantitas n^m ſemper media eſt inter duas quantitates

$$\frac{1}{m+1} n^{m+1} - \frac{1}{m+1} . (n-1)^{m+1}$$

$$\frac{1}{m+1} (n+1)^{m+1} - \frac{1}{m+1} . n^{m+1}.$$

Si m ſit poſitiva, n^m ſemper major eſt prima ex duabus hiſce quantitatibus, minor ſecunda; ſi vero m ſit negativa, minor eſt prima, major altera.

Ex hoc theoremate conſtat, omnes terminos ſeriei, cui eſt terminus generalis $= n^m$, medios eſſe inter reſpectivos terminos ſerierum, quarum termini generales ſunt

$$\frac{1}{m+1} n^{m+1} - \frac{1}{m+1} . (n-1)^{m+1}$$

$$\frac{1}{m+1} (n+1)^{m+1} - \frac{1}{m+1} n^{m+1}:$$

quod item dicendum eſt de ſummis. Atqui conſtat ex primo capite mei Commentarii, ſeriei, quæ habet terminum generalem $= \frac{1}{m+1} n^{m+1} - \frac{1}{m+1} . (n-1)^{m+1}$, ſummam eſſe $=$ $\frac{1}{m+1} n^{m+1}$; ſeriem autem, quæ prædita eſt termino generali

$\frac{1}{m+1}\cdot\overline{n+1}^{\,m+1} - \frac{1}{m+1}\,n^{m+1}$, habere ſummam $=$ $\frac{1}{m+1}\cdot\overline{n+1}^{\,m+1} - \frac{1}{m+1}$: igitur ſumma ſeriei, cujus terminus generalis $= n^m$, media eſt inter ſtatutas quantitates $\frac{1}{m+1}\cdot n^{m+1}$, $\frac{1}{m+1}\cdot\overline{n+1}^{\,m+1} - \frac{1}{m+1}$.

Quæ duæ quantitates, donec n finita eſt, ſunt ſemper inæquales. Verum ſi n creſcat in infinitum, æquales fiunt, & ſingulæ evadunt $\frac{1}{m+1}\,n^{m+1}$: ergo pro hac hypotheſi n infinitæ, ſeries termini generalis n^m habet ſummam $=$ $\frac{1}{m+1}\,n^{m+1}$: igitur area curvilinea ABD $= \frac{n^{m+1}q^{m+1}}{\overline{m+1}\,.\,a^{m-1}}$: ſed $nq = x$: ergo area curvilinea ABD $= \frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}\,a^{m-1}}$: ſed $\frac{x^m}{a^{m-1}} = y$: ergo area curvilinea ABD $= \frac{xy}{m+1}$. Q. E. I.

Quod ſpectat ad Parabolas, hæc ſufficiunt, neque quidquam addendum eſt. Sed aliqua adnotanda ſunt de Hyperbolis, quæ negotium non leve facere poſſunt. Æquatio propoſita pertinet ad Hyperbolas, ſi m ſit negativa. Si m negativa minor eſt unitate, nihil mutandum eſt in calculo, & omnia rite procedunt ſicut in Parabolis. Verum ſi m negativa unitatem ſuperet, multa adnotatione indigent. In hoc caſu mutato ſigno ſpeciei m, ut ex negativa fiat poſitiva, termini generales duarum ſerierum, quæ inventam mediam tenent, ſunt hujuſmodi

$$\frac{-1}{\overline{m-1}\,.\,n^{m-1}} + \frac{1}{\overline{m-1}\,.\,\overline{n-1}^{\,m-1}}$$

$$\frac{-1}{\overline{m-1}\,.\,\overline{n+1}^{\,m-1}} + \frac{1}{\overline{m+1}\,.\,n^{m-1}}.$$

Harum vero ſerierum ſummæ ex methodo commentarii inveniuntur

$$\frac{1}{\overline{m-1}\,.\,o^{m-1}} - \frac{1}{\overline{m-1}\,.\,n^{m-1}}$$

$$\frac{1}{m-1} - \frac{1}{\overline{m-1}\,.\,\overline{n-1}^{\,m-1}}.$$

Advertere neceſſe eſt, formulas haſce ita eſſe inæquales, ut etiamſi n infinita evadat, inæquales remaneant, quia termini conſtantes, & independentes ab n inæquales ſunt, reliquis præ iſtis evaneſcentibus. Qui termini, facta n infinita, ad æqualitatem ultra quemcumque limitem accedunt, hi duo ſunt $\frac{1}{\overline{m-1}\,.\,n^{m-1}}$, $\frac{1}{\overline{m-1}\,.\,\overline{n+1}^{\,m-1}}$, qui a conſtantibus quantitatibus deducuntur. Quare etiam ſumma ſeriei, quæ media eſt, & quæ habet terminum generalem $= \frac{1}{n^m}$, coaleſcet ex termino conſtante, a quo deducendus erit terminus variabilis dependens ab n, qui facta n infinita $= \frac{1}{\overline{m-1}\,.\,n^{m-1}}$. Terminus conſtans, quicumque ſit, vocetur $= B$: ergo ſumma ſeriei in infinitum productæ exprimetur a formula $B - \frac{1}{\overline{m-1}\,.\,n^{m-1}}$.

Itaque area hyperbolica ABD (*Fig.* 4.) fiet $= \frac{B\,.\,a^{m+1}}{q^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{\overline{m-1}\,.\,n^{m-1}\,q^{m-1}}$; ſed $nq = x$: ergo eadem area $= \frac{B\,.\,a^{m+1}}{q^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{\overline{m-1}\,.\,x^{m-1}}$. Atqui facta $x = o$, area hæc debet evaneſcere: ergo fiet $B = \frac{q^{m-1}}{\overline{m-1}\,.\,o^{m-1}}$: quo valore ſubſtituto habebimus aream ABD $= \frac{a^{m+1}}{\overline{m-1}\,.\,o^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{\overline{m-1}\,.\,x^{m-1}}$. Hæc vero formula clariſſime indicat aream eſſe infinitam.

Quod ſi, poſita $AB = a$, velis invenire aream DBFG, quæ evaneſcat facta $x = a$; tum per eamdem methodum determinabis $B = \frac{q^{m-1}}{\overline{m-1}\,.\,a^{m-1}}$, & facta ſubſtitutione obtinebis

aream DBFG $= \frac{a^2}{m-1} - \frac{a^{m+1}}{\overline{m-1} \cdot x^{m-1}}$. Quum autem ſit $x^m = \frac{a^{m+1}}{y}$, fiet area ABD $= \frac{a^{m+1}}{\overline{m-1} \cdot o^{m-1}} - \frac{xy}{m-1}$, & DBFG $= \frac{a^2}{m-1} - \frac{xy}{m-1}$.

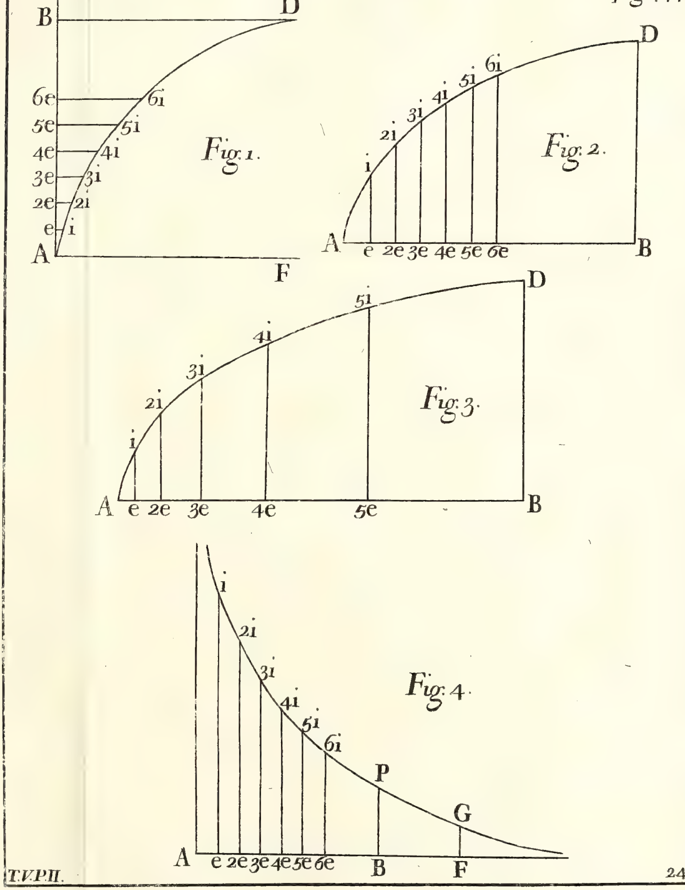
Ex his apparet, regulam ſupra traditam ad inveniendam ſummam ſeriei in infinitum productæ, quoties m eſt numerus integer, & poſitivus, eodem pacto valere, etiamſi m ſit negativus, & fractus. Nempe accipiendus eſt ſecundus terminus binomii $n - 1$ elati ad poteſtatem $m + 1$; tum mutato ſigno multiplicandus per A, & comparandus cum primo termino termini generalis, ut determinetur valor A: & ſumma ſeriei erit $A n^{m+1}$. Quod ſi contingat, ut ſumma hæc proveniat negativa, tunc præmittenda ei eſt quantitas conſtans, ut ſupra fecimus.

Superfluum eſt adnotare, methodum hanc eſſe omnino inutilem quadrandæ Hyperbolæ Apollonianæ, in qua mutato ſigno ſpeciei m invenitur $m = 1$.

Attamen hoc ſilentio præterire non poſſum, quod, ſi $m > 1$, ſumma ſeriei $1, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{3^m}, \frac{1}{4^m} \ldots\ldots \frac{1}{n^m}$ in infinitum productæ obtinetur quidem, quantum ſatis eſt ad inveniendam Hyperbolæ quadraturam, ut patet ex calculo, quia non eſt neceſſe, definire valorem indeterminatæ B per quantitates finitas. Verum ſi abſolute ſeriei ſummam quæras, fruſtra præſenti methodo uteris: numquam enim per quantitates finitas licebit tibi indeterminatæ B valorem invenire, cui valori ſumma quæſita æqualis eſt.

Hanc autem ſummam ſeriei in infinitum productæ, ſi $m = 2$, invenit primum Joannes Bernoullius, poſt Leonardus Eulerus, atque longe diverſam methodum adhibentes demonſtrarunt eam dependere a circuli quadratura: quod idem demonſtravit Eulerus, ſi m ſit numerus par. Verum ſi impar ſit, multo magis ſi fractus, nondum conſtat, quo pacto ſeries etiam in infinitum producta colligatur in ſummam. Sed hæc ad rem præſentem minime pertinent.

Vides


Fig. 1.
B
D
6e
5e
4e
3e
2e
e
A
F
6i
5i
4i
3i
2i
i
Fig. 2.
A
e 2e 3e 4e 5e 6e
B
D
i
2i
3i
4i
5i
6i
Fig. 3.
A
e 2e 3e 4e 5e
B
D
i
2i
3i
4i
5i
Fig. 4.
A
e 2e 3e 4e 5e 6e
B
F
i
2i
3i
4i
5i
6i
P
G

Vides itaque, Jacobe clariſſime, me quadratis omnibus Parabolis, ac Hyperbolis, conica excepta, per ſummam ſerierum integraſſe formulam generalem $x^m\, dx$, excepto caſu $m = -1$. Quum autem omnes formulæ, quotquot ſunt integrabiles, ad hanc redigantur, ut earum ſummatoria detegatur, palam eſt, a me per methodum ſummandi ſeries demonſtrata in præſens fuiſſe principia calculi integralis. Hæc, quæ ut ſatisfacerem petitioni tuæ, in mentem mihi venerunt, accipe perhumaniter, & cura diligenter valetudinem tuam.

Ex Col. S. Luciæ XV. Kal. Februarii 1760.

JOAN-

JOANNIS BAPTISTÆ SCARELLÆ CLERICI REGUL.

De Principiis Viſionis Directæ, Reflexæ, & Refractæ.

1. CLariſſimus Alembertus in nono Opuſculo inſcripto *Doutes ſur différentes queſtions d' Optique* operis in duo volumina diviſi Pariſiis editi anno 1761, inſcriptique *Opuſcules mathémat.* plura proponit adverſus communes opticæ leges, ex quibus colligit in hac ſcientia fere nihil etiam num factum fuiſſe. Ipſius autem difficultatum aliæ verſantur circa principia viſionis directæ, aliæ circa principia reflexæ, aliæ denique circa refractæ. Mihi autem in hoc commentario propoſitum eſt hæc eadem principia firmius, quam huc uſque factum fuerit, novis tum experimentis atque obſervationibus, tum inde elicitis rationibus conſtituere, & ab iis, quæ a clariſſimo Viro contra dicta fuerunt, quam accuratiſſime vindicare. Id, quod jam exequar quatuor capitibus, in quorum primo de principiis viſionis directæ, in altero de reflexæ, in tertio de refractæ, in quarto demum de aliis viſionis reflexæ & refractæ principiis diſputabo.

CAPUT PRIMUM.

De principiis viſionis directæ.

2. LAudatus Auctor primum hæc differit articulo primo. Præter axem opticum, qui omnes oculi humores in linea recta trajicit, & ſine ulla refractione ad feriendum retinæ punctum pervenit, omnes alii radii, qui ex lateribus objecti venientes in oculum oblique incurrunt, ſæpius refringuntur, & illa eorum pars, quæ retinam proxime laceſſit, non eſt in eadem linea recta, in qua eſt illa pars, quæ ab objecto ad corneam pertingit. In qua ergo directione cernitur ob-

objecti punctum? Experientia comprobare videtur id fieri in directione radii ab objecto ad corneam profecti, aut ſaltem hæc eſt communis opticæ ſcriptorum opinio. Sed primo valde eſt difficile, hoc experimentum ita accurate inſtituere, ut nullum ſuperſit dubium; eo quod omne punctum extra axem opticum collocatum nos ſemper relinquit ancipites in definiendo loco, in quo eſt: quod comprobatur ex difficultate trajiciendi ex. cauſa anulum, quem oculus in directione axis optici non videat; & ex altera difficultate id præſtandi, cum unum tantum oculum in eodem defigimus; quo in eventu punctum in concurſu duorum axium minime videtur. Præter quam quod quo medio certi fieri poſſumus in accurata radii viſibilis directione non obrepere errorem aliquorum minutorum aut etiam unius fere gradus? ſed etiam dato punctum viſibile percipi in directione partis radii inter objectum, & corneam intercepti, res inexplicabilis eſſe videtur. Non enim hæc portio viſionem gignit, ſed ea, quæ in fundum oculi incurrit, poſtquam fuit refracta, ideoque abſcedit ab alterius directione. Quomodo & quo principio anima percipit objectum non eſſe in directione radii, qui proxime gignit ſenſationem, ſed in altera, ſecundum quam ipſa vere non afficitur? Dicet aliquis objectum videri in directione perpendicularis ductæ ab illo retinæ puncto, in quod radius incidit refractus: quod veriſimillimum eſt, quia cum radius oblique incidit in retinam, hæc ex mechanicæ legibus vere non afficitur niſi ſecundum perpendicularem. Sed primo cum hæc perpendicularis multum deflectere poſſit a directione radii incidentis, cum in oculum ingreſſus eſt, inde ſequeretur viſibilia puncta extra opticum axem collocata alibi percipi, quam revera ſunt, itaque objecta oculo propiora, de quibus certius judicari poteſt, viſum iri magnitudinis valde diſcrepantis ab ea, quam revera habent. Deinde quoniam objectum duobus cernitur oculis, perpendicularis, qua de agitur, alia pro alio oculo foret, & fere ſemper alia in alio plano. Ita viſibile punctum extra opticum axem collocatum tunc deberet apparere duplex. Id quod non uſuvenit. In eaſdem difficultates incurreret ſententia, quæ poneret objectum videri in ipſamet radii in retinam incidentis directione, & in illam etiam, quod ob allatam rationem ojectum intueri debemus potius in directione perpendicularis.

3. Ita

3. Ita Alembertus, qui hæc omnia rationibus diligenter ſubductis enucleatius explicat, atque confirmat articulis ſecundo, & tertio. Tum quarto hæc diſſerit. Secundum quam lineam percipiuntur viſibilia objectorum puncta, quæ in axe optico non reperiuntur? Id quod difficillimum eſt, & quantum fieri poteſt, ſubtiliter definire. Veruntamen quoniam experientia docet objecta parvæ extenſionis, quæ ſub aſpectum cadunt, non apparere ad ſenſum majora, quam re ipſa ſunt, conſequens eſt objecti A L (*Fig.* 1.), cujus punctum A videtur per radium irrefractum A Z uſque ad retinæ X D punctum Z recta tendentem, punctum L, quod cernitur per refractum L S *u* V X ad X pervenientem, videri ſecundum directionem radii L S ab objecto ad corneam Q S pertinentem, non autem ſecundum directionem aut portionis V X ad retinam oblique pervenientis, aut perpendicularis X Y, quia per ſecundam & multo magis per tertiam valde majus appareret, quam reipſa eſt, & reipſa apparet. Qua vero de cauſa id fiat, negat Auctor ſe aggreſſurum explicare.

4. Demum hæc alia ſcribit: huc uſque monſtratum eſt objecta, quæ in optico axe non ſunt, non ſatis ratum habere locum, in quo appareant, atque eſſe dubium, an hic locus ſit accurate in radio, qui ab objecto proficiſcitur ut perveniat ad oculum. Nunc vero ajo ipſamet objecta, quæ ſunt in optico axe, non ſemper in eodem videri. Sit enim ſtella in E (*Fig.* 2.) duo oculi A, & B longiſſime abſint ab eadem, eorumque optici axes ſint A E, B E. Hæc ſtella certe videtur in loco valde propiori ut in *e e*, cujus diſtantia ab A, & B ſine ulla proportione ſit minor diſtantia ejuſdem ab E. Quare oculi viderent duas ſtellas *e*, *e*, & apparens alterius ab altera diſtantia *ee* eſſet fere æqualis A B; veruntamen experientia docet, eam videri in puncto fere medio ε ſecundum lineas A ε, B ε a lineis A E, B E diſcrepantes. Verum quidem eſt has lineas parum deflectere ab axibus opticis, ſed deflectunt tamen; hocque experimentum ſatis eſt ad comprobandum objecta eminus poſita non videri in optico axe, tametſi oculorum obtutum in illa dirigamus. Ergo univerſe conficitur nihil eſſe minus certum hoc opticæ principio, quod objecta videntur in directione radiorum, quos ad oculum tranſmittunt.

5. Mitto nunc alias eaſque graviſſimas hujus auctoris difficul-

cultates adverſus principia communiter uſurpata viſionis reflexæ, & refractæ, quas in poſterum examinabimus; & ſatius nunc arbitror meam exponere ſententiam circa principia viſionis directæ. Primum itaque ſtatuo imaginationem magnitudinum, figurarum, ſituum, ac diſtantiarum, & judicia inde pendentia diſtingui oportere a viſione earumdem rerum, & a judiciis, quæ inde proficiſcuntur. Viſio enim eſt ex genere ſenſationum, quæ ſunt valde clariores, atque fortiores imaginationibus, in quibus anima eaſdem quidem res, quæ ſenſus aliquando perculerunt, ſibi repræſentat, ſed valde obſcurius, atque debilius, eo quod in imaginatione cerebrum concutitur valde minus, quam cum anima ſenſationibus qualitatum, quæ ſenſus externos laceſſunt, afficitur: exempli cauſa non video veram ſolis magnitudinem, ſed tantum imaginor eam eſſe innumeris partibus majorem, quam apparet; lunam autem prope finitorem majorem aſpicio, quam cum eſt in meridiano. Quo conſtituto quæſtionem, quam hic tractamus, verſari moneo circa viſiones hujuſmodi qualitatum. Nec enim ob eas rationes, quas Condillacus in libro inſcripto *Traité des ſenſations* magno acumine protulit, Anglorum ſententiam circa viſionis principia ſecutus, revocari poteſt in dubium hujus diſtinctionis fundamentum in eo poſitum, quod eædem ſub viſus ſenſum cadere poſſint. Ut ut enim res ſe habeat de hiſce rationibus, quas alio loco accurate examinamus, quibuſque mihi is videtur non aliud voluiſſe, quam viſiones earumdem qualitatum non poſſe niſi adminiculo tactus obtineri, mihi certe ſum conſcius inter illam perceptionem, qua intelligo lunam eſſe valde majorem ea magnitudine, quæ mihimetipſi apparet, dum nudis oculis eam aſpicio, interque alteram, qua pariter noſco dicta magnitudine majorem, dum oculis teleſcopio armatis intueor, intercedere valde latum diſcrimen; primam eſſe valde debilem, & imaginationis propriam, alteram autem claram, & fortem non minus, quam ſint quælibet aliæ ſenſationes, & ipſæmet viſiones colorum, quas ad ſenſum oculorum pertinere nemo inficiari poteſt. Hoc mihi in præſenti ſatis eſt ad ea, quæ ſum dicturus.

Quo vero faciliorem mihi viam ad eadem muniam, in medium produco vulgare quoddam experimentum, quod toti huic obſcuriſſimo loco magnam afferet lucem, & ſub oculos ponet, quemadmodum oculi totum aliquod corpus ſua defi-

nitum figura complectantur. Rationes reddidi in Pſychologia, cur ſenſationes etiam, poſtquam corpus illas excitans ab agendo ceſſaverit, durent per aliquod tempus, tametſi ſenſim obſcuriores fiant, & tandem omnino evaneſcant, ac abeant in imaginationes; idque confirmavi experimento carbonis candentis, qui ſi ante oculos ultro citroque magna velocitate ducatur, apparet continuata, & oblonga ignea ſemita, & veluti candens vitta, eo quod carbo propter magnam, qua ducitur, velocitatem prius redit ad eum locum, in quo paulo ante ſui viſionem ad eumdem relatam excitaverat, quam commotio in retina, & viſio in anima extinguatur. Ita enim fit ut in anima ſint eodem tempore ſimul omnes viſiones carbonis, quatenus ad omnia contentæ ſemitæ puncta refertur, perinde ac ſi in omnibus hiſce punctis totidem carbones æquales continenter exſtarent. Quod confirmatur ex eo, quia contingit id ipſum, quod eſſe debet: nempe in extremo, a quo carbo receſſit, colores apparent dilutiores, quam in extremo, in quo eſt. Clariſſimus Hallerus in adnot. ad prælect. Acad. Boerhavii adnot. 2. ad §. 541. plures enumerat hac de re tractantes auctores, & inter alios Nevtonum, qui quæſt. Opt. num. 16. durationem ſenſationum ad unum minutum definit.

6. Idem auctor ſtatuit eodem tempore nos unum tantum objecti punctum videre, & fortaſſe cum Scheinero pag. 218. unice videre in fine axis optici, ubi certum eſt fortiſſimam, & maxime diſtinctam imaginem pingi; maxima vero celeritate, qua mobiliſſimi oculi totum aliquod corpus breviſſimo tempore luſtrant, fieri, ut magna corpora eodem tempore videamus, eo quod ante oculus a prima corporis particula, in quam obtutum ſive axem opticum defigit, ad alias omnes circumquaque pervenit, quam imago primæ particulæ deleatur. Sed præſtat afferre integrum auctoris locum, quo hæc, & ſuperiora non parum confirmantur. *Oculus non videt eodem tempore plus quam unum objectum. Hoc quidem multis inſigniter paradoxum videbitur, cum veriſſimum ſit, & quilibet in propria viſione id ſibi demonſtrare queat. Sume librum. Totum, inquies, video; ſed lege; non potes ſimul totius paginæ lineas legere; verum aliam diſtincte videbis, aliam confuſe: ſed neque unam lineam; nam & ibi in una ſerie alias litteras languide videbis, alias vividius. Adverte animum; unica littera eſt,*

quam

quam vere vides, quam diſtinguis, ut accurate legere poſſis; reliqua omnia vides, ſed confuſe. Quare videmur nobis multa ſimul videre, quia oculus mirabili velocitate multa citiſſime percurrere natus eſt. Neque enim objecta ſenſuum continue evaneſcunt, neque prima littera ideo tibi perit, quod ad alteram melius advertis. Hactenus Hallerus, qui rem confirmat exemplo titionis jam expoſito, & altero turbinis rubente macula notati, qui, dum a pueris flagello agitatur, ita ut velociſſime circumrotetur, totus ruber apparet, concluditque mentem a duratione imaginum & ab oculi velocitate decipi, ut credat eodem tempore ſimul excitari ſenſationes, quarum aliæ poſt alias excitantur.

7. Cæterum ut omnes vitemus difficultates, & ea tantum, quæ certa ſunt & explorata, principia ſtatuamus, ad claram atque diſtinctam alicujus, vel minimæ partis objecti viſionem neceſſarium eſſe ajo in eamdem obtutum defigere. Nam ſi, cum oculum ex. gr. converto ad longum vocabulum, aciem dirigo in mediam ejuſdem litteram ut in *a* vocabuli *aliquantiſper*, & immotum oculum, quantum poſſum, ſervare contendo, claram habeo viſionem litteræ *a*, duarum vero, quæ hinc inde proximæ ſunt, valde minus claram; cæterarum vero longius diſtantium afficior ita obſcura & confuſa notione, ut quales ſint litteræ prorſus ignorem. Ex quo duo colligo, alterum ſaltem cum maxima veriſimilitudine, alterum autem tamquam omnino certum, ut mihi quidem videtur.

Primum eſt, veriſimillimam videri ſententiam, quæ ſtatuit obſcuram illam & confuſam partium objecti ab ea, in quam axis opticus dirigitur, aliquantiſper diſtantium viſionem non pendere ab axe optico, qui in eaſdem directus antea fuerit, & poſtea receſſerit; propterea quod difficile videtur, ut nobis inſciis & invitis oculum in eas dirigamus, & alioquin, ſi res ita ſe haberet, valde clariorem earumdem viſionem experiremur. Nam experientia conſtat, cum oculum magna velocitate dirigimus in ſingulas objecti partes, omnes totumque objectum uti longum vocabulum, non parum claram ſui viſionem excitare. Cujus communis ſententiæ veritatem mihi videor poſſe colligere ex iis, quæ mihimetipſi uſuveniunt in tentando celebri experimento Mariotti tom. 2. ipſius operum edit. Hagæ anno 1740. pag. 496. Nam in albo pariete ad altitudinem oculorum pono exiguum nigrum chartæ

circulum, & verſus meam dexteram in diſtantia duorum circiter pedum alterum pariter nigrum, & aliquantum infra hunc tertium rubri coloris. E regione primi circuli me colloco, & clauſo lævo oculo in eum aciem dextri defigo, & nihilominus duos alios obſcurius pergo videre. Tum verſus ſiniſtrum paulatim me retraho in eadem a pariete diſtantia ſemper tamen oculum dextrum in primum circulum dirigens: emenſo aliquo ſpatio diſparet circuli rubri viſio; quod obliquitati radiorum tribuendum non eſt, quia ut ſibi quoque uſuveniſſe fatetur Mariottus, alia objecta longius poſita, ideoque radios magis obliquos in oculum dextrum reflectentia ſaltem confuſe intueor. Tum conſiſto & immoto capite aciem converto verſus alterum circulum nigrum, & continuo apparet etiam tertius demiſſior, & ruber. Quod argumento eſt objecta remotiora & magis obliqua prius fuiſſe viſa non per axem opticum, qui verſus eadem per inſenſile tempus directus fuerit, ſed aliis radiis obliquis; quia ſi primum contigiſſet, multo magis conſpici debuiſſet propior & interpoſitus circulus ruber, quemadmodum video, cum axem opticum ad ſecundum circulum tertio impoſitum converto. Ergo ſaltem ad verum quam proxime accedit obſcuram illam, & confuſam viſionem partium remotiorum ab illa, in qua axis opticus defigitur, ab aliis radiorum faſciculis oriri.

8. Alterum vero, quod colligo, eſt claram illam atque diſtinctam alicujus finiti objecti viſionem, qua fit, ut omnes ipſius partes aſpiciam clare, & diſtincte aut æqualiter, aut cum parvo diſcrimine, pendere a directione axis optici in ſingulas ipſius partes ea facta celeritate, quæ nec nimis magna ſit, ne partes eædem nimis levem impreſſionem in retina faciant, nec nimis exigua, ne cum ultimarum partium viſio excitatur, primarum jam prorſus ceſſarit. Nam innumerabilibus experimentis compertum ſit nos, cum hujuſmodi afficimur viſione, perpetuo dirigere obtutum in alias atque alias objecti partes, & ex aliis experimentis, cum obtutum in una ejuſdem particula ita defigimus, ut, quantum poſſumus, contendamus eumdem non convertere ad alias, viſionem aliarum excitari nimis obſcuram atque confuſam, & claritate atque diſtinctione a viſione primæ nimis diſcrepantem. De quo certe non video quemquam poſſe jure ac merito dubitare.

9.

9. Nec minus certum eſt non brevi, & mediocri oculorum exercitio opus eſſe ad oculos certa ratione, & convenienti celeritate pro nutu voluntatis dirigendos. Id oſtendunt fere omnes alii voluntarii motus, ad quos certa ratione, facilitate, & velocitate perficiendos diuturnum, & ſæpe repetitum muſculorum, quibus perficiuntur, exercitium eſſe neceſſarium comperimus; & in hoc ipſo muſculorum oculi negotio præſertim commonſtrant exempla cæcorum ab ortu, quos magnam difficultatem, poſtquam cataractæ depreſſæ fuerunt, in dirigendis atque conjicendis oculis, quo vellent, expertos fuiſſe, & non ſuperaſſe niſi poſt longum tempus, & continuatum uſum ex Chezeldeno narrat Condillacus libro ſupra citato.

10. Quibus expoſitis propius accedo ad id, quod mihi maxime propoſitum eſt, & ajo, hac celeri oculorum in ſingulas objecti partes converſione fieri, ut magnitudinem corporum, figuram, ſitum, diſtantiam, motum, & quietem videamus. Nam quod attinet ad magnitudinem, eo major idea & repræſentatio corporis, ex. gr. rubro colore tincti, excitatur, quo majus corpus oculis dicta celeritate luſtramus. Siquidem primæ viſiones durant in anima, dum aliæ continuate gignuntur, nec tamen tota viſio fit magis intenſa, ſive clarior atque diſtinctior. Ergo major apparere debet, quo corpus eſt majus ideoque extenſionem repræſentare. Etenim qualitates, uti eſt viſio, ſi augeantur, hoc augmentum eſſe debet, aut in intenſione aut in extenſione; id eſt ſi ponamus decem partes in ſuperficie rubro colore æqualiter tincta ab oculo percurri, ideoque decem excitari viſiones, quæ omnes ob allatam rationem eodem tempore animam afficiunt, ſecunda conjuncta cum prima, tertia cum prima & ſecunda, quarta cum omnibus antegreſſis, animæ apparere debent aut inter ſe diſſimiles, & diſcrepantes, aut ſimiles. Primum autem nequaquam eſſe poteſt, eo quod nullum in ſuperficie diſcrimen eſt nec in gradu coloris, nec in genere claritatis. Ergo ſimiles appareant neceſſe eſt. Nihilo tamen minus decima apparere debet major quam ſecunda, eo quod in decima afficitur decem ſimilibus, & æqualibus ſenſationibus, & in ſecunda ſolum a duabus. Ergo anima illam experiatur oportet majorem in extenſione, in qua ſunt plures ſimiles partes, quæque ipſa per ſe diſſimiles non deſiderat.

11. Quam ideæ, ſuperficiem aliquam repræſentantis, magni-

gnitudinem eſſe debere proportionalem angulo, quem faciunt optici axes a ſingulis duobus contrariis extremis objecti punctis prodeuntes, facile eſt ex dictis colligere. Nam quo major eſt extremorum diſtantia punctorum, ideoque extenſionis interpoſitæ magnitudo, eo plures viſiones gignuntur, & genitæ per aliquod tempus ſimul durant, & eo major eſt angulus, ad quem ſinguli axes optici a ſingulis punctis objecti prodeuntes concurrunt. Quo vero plures ſunt partiales viſiones, eo major viſio ex iis compoſita & extenſio ab eadem repræſentata eſſe debet. Ergo quo major eſt diſtantia extremorum, ideoque objecti magnitudo, eo major eſt angulus, quem faciunt axes optici ab extremis profecti.

Scriptores opticæ magnitudinem objecti non repetunt ab angulo, quem faciunt axes optici, dum oculus ab uno extremo ad alterum continenter dirigitur, ſed a radiis, qui ab eiſdem extremis ad oculum tendunt extra pupillæ centrum, eodem tempore ac axis opticus ad hoc centrum contendit. Verum hi radii ab axe optico diſcrepantes non ſunt attendendi in magnitudine corporum definienda. Nam primo hic agimus de magnitudine clare & diſtincte viſu percepta, non de illa, quæ obſcure, & confuſe percipitur. Jam vero prima a ſolis axibus opticis oritur & oriri poteſt, atque ab eorum in oculi fundo impreſſione. Ergo magnitudo objecti non ex quibuſcumque radiis, ſed tantum ex opticis axibus pendet. Tum ob rationem Alemberti ſuperius expoſitam, & ex eo ductam, quod pars radii in retinam incurrens, non parum deflectit a radio, qui ab objecto in retinam ita incurrit, ut in oculi humoribus refringatur, iidem radii ſunt inepti ſingulis objecti punctis in ſuo, quem revera habent, ſitu, & diſtantia repræſentandis, ſed in majori intervallo, ideoque objecta majora, quam ſunt, repræſentare deberent. Quod cum non accidat, id argumento eſt veræ corporum magnitudinis repræſentationem axibus opticis acceptam ferri oportere. Tandem ob hanc a perpendiculari deflexionem radius refractus & proxime retinam feriens, non eſſet ut plurimum in eodem pro duobus oculis plano (n. 2.) atque idcirco duplex objectum repræſentaret. Quod pariter experientiæ adverſatur.

Optici autem axes, ut qui nullam refractionem patiuntur, ideoque in retinam ad angulos rectos incurrunt, & ad claram ac diſtinctam viſionem excitandam, & ad veram corpo-

porum magnitudinem, ac ſitum, eumdemque unum, & in eodem plano ab utroque oculo exhibendum accommodati ſunt. Quamvis autem non uno eodemque tempore retina ab axibus opticis hac illac ſe dirigentibus concutiatur, nihilominus, quia toto illo brevi tempore, quo oculus ſingula objecti puncta perluſtrat, nervorum commotio durat, ideoque etiam illi reſpondens in anima viſio tamdiu perſeverat; inde fit ut ſine iis incommodis inexplicabilibuſque difficultatibus, in quas incurrit communis opticorum ſententia, commoda ejuſdem, nempe magnitudinem imaginis in oculi fundo depictæ, & reſpondentis in anima excitatæ viſionis in proportione anguli, quem faciunt radii ab extremis objecti punctis profecti, & quidem accuratius, & melius quam in eadem habeamus. Ceterum omnibus miſſis rationibus quiſque hoc uno experimento perſuadere ſe poteſt. Oculis clauſis introducatur in inſtructum cubiculum, quod antea non viderit, & in diſtantia duorum aut amplius pedum ab uno ex quatuor parietibus e regione collocatus repente aperiat oculos, & recta in objectum parietem dirigat. Is clare videbit ac diſtincte ea, quæ ſunt in pariete, ſed in linea recta; alia vero hinc inde, præſertim ſi non adeo parum diſtent, ita obſcure, & confuſe, ut vix dignoſcat quid ſint, eorumque magnitudinem, figuram, ſitum, atque diſtantiam nullo pacto deffinire poſſit. Quid ergo magis perſpicuum quam claram illam atque diſtinctam objecti, quod oculis luſtramus, viſionem acceptam ferri oportere axibus opticis, aut ad ſummum iis quoque radiis, qui ab axibus ita parum deflectunt, ut quod attinet ad ſenſum, & ad phœnomena ſenſui repræſentanda pro axibus accipi debeant.

12. Quo motu oculorum tota aliqua ſuperficies breviſſimo tempore luſtratur, eodem quoque excitatur ejuſdem figuræ viſio. Nam pro natura, & qualitate figuræ, qua objectum definitur, alia atque alia ratione oculi ſunt dirigendi ad ſingula ſuperficiei puncta, & ſimiliter alia atque alia ratione, & diſpoſitione puncta retinæ ferienda ſunt, & alia atque alia aliterque diſpoſita imago in eadem retina inſculpenda eſt. Pro varia autem diſpoſitione punctorum, quorum alia poſt alia concutiuntur, & pro varia diſpoſitione imaginis in retina delineatæ, rationi conſentaneum eſt, ut aliæ quoque & aliæ aliterque diſpoſitæ extenſionis imagines in anima excitentur. Quamvis enim nervorum commotiones tamquam efficientes

cau-

cauſæ vim non habeant excitandarum in anima ſenſationum; tamen hæ ſenſationes iiſdem ut cauſis occaſionalibus, perinde ac ſi forent effectrices, reſpondent. Quamobrem opus eſt, ut commotiones optici nervi vario ordine factas variæ quoque aliterque affectæ viſiones ſequantur. Quod profecto idem eſt, ac viſu percipere figuram ſive terminos extenſæ ſuperficiei.

13. Venio ad diſtantias, & ajo eſſe aliud imaginari duo corpora inter ſe diſtare, aliud autem videre eo ſenſu, quem ſupra explicavimus (n. 5.). Tunc ſolum videmus, cum in oculos incurrit aliqua extenſio inter duo corpora diſtantia eodem illo tempore, quo illa intuemur. Quod ſi aut numquam viderimus interpoſitam extenſionem, aut ſi ante viderimus, quam corpora cernamus, diſtantiam quidem imaginari poſſumus, non autem videre. Siquidem diſtantia eſt relatio, quæ tria deſiderat, duo corpora, quæ dicuntur diſtantia, & interpoſitam extenſionem. Quare ſi anima non videt interjectam extenſionem, nullam re ipſa videt diſtantiam, ſed ſolum imaginatione ſibi repræſentare poteſt tamquam poſſibilem, quatenus in aliquibus circumſtantiis intelligit inter duo corpora, tametſi quieta permaneant, ut inter montem & lunam e monte orientem poſſe alia corpora interjici. Uno verbo videre diſtantiam inter duo corpora eſt idem ac videre totum aliquod corpus, quod conſtet ex corpore interiecto, & ex corporibus, quæ appellantur diſiuncta, quæque ſunt quodammodo interjecti corporis termini, ſive principium, & finis. Jam vero ad totum aliquod corpus videndum ſingulæ ipſius partes videantur oportet ea ratione, quam numero antegreſſo explicavimus. Ergo ad videndam inter duo corpora diſtantiam neceſſe eſt eodem pacto videre interpoſitam extenſionem. Quemadmodum enim totum aliquod corpus clare, & perſpicue videri non poteſt, niſi oculi ad ſingulas ejuſdem partes ſe convertant, & eaſdem ea celeritate percurrant, ut viſio primarum adhuc in anima perſeveret, cum excitatur ultimarum; ſimiliter ut viſio diſtantiæ excitetur, neceſſe eſt corporum diſtantium, & interceptæ extenſionis partes oculis ita cito luſtrare, ut omnium partium viſiones eodem tempore in anima ſint.

14. Cum autem aliquod corpus valde magnum eſt, quod dictum intellige etiam de magna diſtantia, duo contingere poſſunt; primum, ut primorum punctorum, in quæ oculos

con-

conjecimus, viſio perſeveret quidem, cum excitatur ultimarum, ſed valde debilitata ideoque obſcura, & confuſa: ſecundum ut, quia inter excitationem viſionis primorum, & viſionis ultimorum nimium tempus interfluit, illorum viſio prorſus evanuerit, & in puram abierit imaginationem, cum anima viſionibus horum pulſatur. In primo eventu totum quidem corpus videmus & totam ipſius magnitudinem, ſed ipſius alias partes obſcure, & confuſe, alias clare, & diſtincte. In altero nequaquam totum corpus videmus, ſed eas tantum ipſius partes, quarum viſio permanet, alias vero ſolum imaginamur, freti memoria, quod eas paulo ante viderimus. Cum autem jam obſervaverimus, videre diſtantiam duorum corporum eodem revolvi, ac cernere corpus ex interpoſita extenſione, & ex duobus corporibus tamquam terminis compoſitum; per ſe patet in maximis diſtantiis poſſe illa duo, quæ monuimus, uſuvenire.

15. Sed antequam ulterius procedam, ſolvenda eſt maxima difficultas adverſus theoriam magnitudinis corporis viſi, quæ magnitudini anguli ab extremis radiis intercepti, ſive imaginis in retina delineatæ, proportione reſpondeat, a pluribus propoſita, & in eo ſita, quod duo globi æquales, alter poſitus in diſtantia ab oculis decem pedum, alter in diſtantia viginti, apparent æquales; quod eſſe nequiret, ſi apparens objecti magnitudo penderet ab angulo, propterea quod angulus, ſub quo videtur globus duplo remotior, eſt duplo minor angulo, ſub quo ſimiliter propior. Condillacus aliique auctores, qui Anglorum ſententiam ſequuntur, ajunt animam incæpiſſe judicare de magnitudine, figura, & diſtantia objectorum adminiculo tactus; habitum acquiſiviſſe judicandi majora, quæ ſcit, & videt eſſe longius diſiuncta; magis diſiuncta vero, quæ minori luce perfuſa videt; & hoc habitu fieri, ut cum ſcit aliqua corpora eſſe æqualia, & videt alterum in majori intervallo poſitum, alterum in minori, tamquam æqualia ſibi repræſentet. Quam rationem in Tranſact. philoſ. ad an. 1736. Deſagulerius confirmat hoc experimento. Duos globos eburneos, & æquales ponit, alterum AB (*Fig.* 3.) in diſtantia 20. pedum ab oculo E, alterum CD in diſtantia duplo majori 40. Certum eſt ex opticæ regulis, oculum in E aut F videre globum AB, ſub duplo majori angulo quam æqualem CD; atque idcirco CD non oportere videri majorem globo

o p, qui e regione globi A B videtur ſub eodem angulo *o* F *p*, ac globus C D. Cum autem in cubiculo aperto oculo nudo conſpiciuntur duo globi A B, C D, ſi revera animum attendimus ad duplo majorem diſtantiam globi C D, judicamus C D ejuſdem eſſe, ac A B craſſitiei, ut reipſa eſt, quamvis angulus ſit duplo minor. Si cum ſpectator terga vertit, aut cum nihil ſuſpicatur, globus C D removetur, & alter *o p* diametri minoris in eadem linea e regione A B ſubſtituitur, ſpectator denuo converſus ad globos putans adhuc reſtare globum C D, globum *o p* imaginatur, & videt eſſe magnum ut C D, eo quod eumdem ac prius angulum facit.

16. Ut veram hujus difficultatis ſolutionem præbeam, adverto corpora æqualia poſita in variis diſtantiis apparere æqualia, ſi hæ diſtantiæ non ſint valde magnæ, ut 10, 20, & 40 pedum; at ſi non parum magnæ ſint, quod corpus eſt eminus, etiam conſtanter minus apparet eo, quod cominus, tametſi eſſe utrumque æquales certo noverimus. Ut mittamus ingentes planetarum diſtantias, non ne id evidenter apparet in longa porticu, in qua tametſi ante viderimus ſolum eſſe in eodem plano, & columnas æquali intervallo alias ab aliis abeſſe, dum illam tranſcurreremus, tamen ubi ad finem venerimus, converſi ſolum paulatim aſſurgere, & fornicem deprimi, columnas ad ſe viciſſim accedere, & porticum in anguſtum deſinere obſervamus. Hujus rationem diſcriminis in dicta ſententia non invenio, quia non video cur in breviori porticu ob acquiſitum habitum judicandi de objectorum magnitudine ex tactu, & ob certam æqualitatis cognitionem poſſim corrigere errorem, in quem anguli me inducere poſſint, non autem poſſim in aliquantum longiori. Nec mihi ſatisfacit reſponſio, quam ſignificare videtur Caillius *Leçon Elem. d'optiq.* §. 100; in eo poſita, quod habitus acquiritur ſolum intra confinia ordinaria viſionis, & familiaris in vita uſus. Nam longam porticum, in qua id experimur, eſſe intra hujuſmodi confinia, videtur perſpicuum, cum intra eadem is ponat diſtantiam 120 pedum, qua non parum minor erit longitudo porticus, in qua dictum Phœnomenon obſervatur. Deinde ſive remum in aqua ex parte demerſum, ſive valde exigua corpora oculis microſcopio armatis, ſive remota engyſcopio, ſive proxima teleſcopio obſervas, primum vides inflexum, ſecunda valde majora, tertia multum propiora, quarta e contrario

mul-

multum remotiora intueris, nec ullo pacto errorem, cujus es conſcius, corrigere potes. Quamobrem alio nos convertamus oportet, ſi veram hujus differentiæ rationem cupimus invenire. Quod ſic exequor.

17. Qui acutis, & valentibus oculis utuntur, ii ſatis clare & diſtincte vident corpora tum in diſtantia multorum pedum, tum in diſtantia minori uno pede; pro iis vero, quorum oculi vitioſi ſunt, eſt aliquod claræ, & diſtinctæ viſionis ſpatium, tametſi valde minus eo, quod modo ſignificavimus. Quod attinet ad viſionem maxime diſtinctam hæc habet Hallerus loco ſupracitato adnot. 3. ad §. 539. *Punctum viſionis diſtinctæ eſt finis diſtantiæ, in quo objectum poni debet in ſingulo homine, ut omnium diſtinctiſſime perſpiciatur. In præsbita eſt a duobus cum dimidio pedibus & ultra ad ſeſquipedem. S. Yves cap. 9. pag 48. viſus optimus eſt a ſemipede paulo ſupra pedem. Idem in Hugenio, & Volphio* §. 408. *ad octo pollices fuit, & in D. Portarfields ad ſeptem l. c. p.* 168. *In myopibus eſt a ſemipede ad uſque fere naſi contactum. S. Yves. Aliqua equidem eſt latitudo hujus puncti viſionis diſtinctæ ob mobilitatem lentis cryſtallinæ, ſed definita. Porterf. p* 206; *idemque limites ſuæ viſionis ponit inter ſex & octo pollices p.* 168. *denique hoc punctum in utroque oculo diverſum eſſe ſolet non ſine naturæ beneficio*. Cum vero ex altera parte clara, & diſtincta viſio inde oriatur, quod radii ab iiſdem objecti punctis profecti poſt refractionem in oculi humoribus in totidem retinæ punctis colliguntur, & ex altera radii ab objectis vicinis provenientes citius, quam profecti a remotis coeant, Hallerus aliique plurimi ſcriptores ab eodem citati, tamquam rem certam, & exploratam inde concludunt, muſculos oculi a natura comparatos fuiſſe ad oculos ita mutandos, ut reddantur apti ad radios pro majori vel minori diſtantia, non quacumque ſed definita, tardius aut citius colligendos. Quæ mutatio poſita eſt in aliquo ex his, aut in pluribus, ut idem obſervat. Vel in objectis vicinis globoſior fit cornea, & lens cryſtallina; vel illa, & hæc a retina removentur; vel compreſſione denſiores fiunt humores, nam his omnibus fit, ut radii citius coeant: in remotis autem his contraria ſuccedunt, ut radii tardius conjungantur. Sed vis muſculorum oculi aut iridis in his omnibus præſtandis certis ultro citroque continetur limitibus ita ut in objectis aut nimium proximis, aut nimium diſtantibus

non poſſit oculum ita conformare, ut radii in ipſa retina concurrant, & ita viſio ſatis clara, & diſtincta efficiatur.

18. Eſt etiam aliud in oculis diſcrimen, cum objecta remota, & vicina videmus. In remotis pupilla, per quam radii ingrediuntur, dilatatur, in vicinis conſtringitur, advertente eodem Hallero poſt alios Auctores, cujus ratio eſt poſita in vividiori luce, quam proxima ad oculum mittunt, in debiliori, quam remota. De hac mutatione hæc ſcribit Hallerus in adnot. 9. ad §. 544. *Verum pupillæ mobilitas omnibus conſentientibus perfectæ neceſſitatis eſt. Nam ad propinqua objecta pupillam anguſtare neceſſe eſt. Tunc enim diminuto numero radiorum imago minor, ſed accuratiſſima fit, perinde uti notum eſt, proximorum confuſas imagines per foramen exiguum conſpiciendo corrigi*. Rohaulitus S. c. 35. *viciſſim ad remota videnda egemus quam maxima luce, ideoque dilatata pupilla clariorem eorum viſum efficimus*. Hactenus Hallerus, qui quamvis internam oculi mutationem ad objecta in variis diſtantiis diſtincte videnda tamquam omnino neceſſariam multorum auctoritate ſcriptorum, & rationibus prope evidentibus ab iiſdem allatis confirmaſſet, tamen obſervat, Gallos aliquos in contrariam abiiſſe ſententiam, & præſertim Hirium oppoſuiſſe notum experimentum, quo per chartam duobus foraminibus exiguis pertuſam objectum in puncto diſtinctæ viſionis ſimplex, extra id punctum duplex videri ſolet, propterea quod ſi anima vi polleret oculos in variis diſtantiis mutandi, etiam hic ea vi uteretur, & efficeret, ut in mutata diſtantia pariter diſtincta viſio foret, ideoque objectum pariter unum appareret: atque ad hoc experimentum reſpondiſſe Porterfields animam hunc conatum ad mutandum oculum non edere, quando per anguſta foramina videt.

Ceterum allatæ rationes adeo perſpicuæ multis eſſe videntur, ut de hujus ſententiæ veritate nulli dubitare poſſint ob dictum experimentum, quod ad ſummum in uno tantum eventu animam hac facultate carere conficit, aut ob alia minoris momenti; præſertim cum iiſdem alia poſſis opponere, & in primis illud ab Hallero memoratum ad §. 539. oculi, qui defatigatur, cum longe diſtans objectum accurate inſpicimus, & anterioris ipſius partis, quæ in majorem convexitatem aſſurgit, ut videre licet, ſi oculos inſpexeris amici, qui talem edit conatum. Nihilo tamen minus Vinslowius in Comm.

Acad. R. P. ad an. 1721. pag. 414. edit. Amſtel. cum ex altera parte obſervaſſet muſculos globi nullam in hoc negotio ſymbolam poſſe conferre, & neminem adhuc monſtraſſe fibras, quas aliqui in ciliaribus ligamentis commenti ſunt, & ex altera iridem cryſtallino impoſitam a ſuis muſculis contrahi in objectis claris, & vicinis, diduci in obſcuris, & remotis, veriſimile judicat contractionem iridis pellere lentem introrſum aut complanare, & diductionem efficere ut ſuo ſe loco reſtituat. D. autem le Roy ſententiam Hirii ad diſtinctam objectorum in variis diſtantiis viſionem ſolum varias pupillæ diductiones neceſſarias exiſtimantis tam acriter a Porterfields impugnatam, ut ab omnibus communiter explodi videretur, in Comm. Acad. ad an. 1755. defendere aggreſſus, primum negat fibras proceſſociliares eſſe aptas cryſtallino exterius promovendo; deinde experimentis in camera optica inſtitutis comprobat, diminutionem foraminis, per quod radii ingrediuntur, ſatis eſſe ad eum finem, ut objecta in proportione diſtantiarum depingantur, habitaque conſtructionis oculi ratione motum contractionis, & diductionis pupillæ ad oculum variis objectorum remotionibus accommodandum ſufficere, quia revera pupilla contrahitur in proportione acceſſus objectorum ad oculum. Verum præter dilatationem, & conſtrictionem pupillæ ſaltem ipſius majorem aut minorem a retina diſceſſum ex modo allato experimento paulo poſt colligemus.

19. Quibus conſtitutis primum ajo, ſi pupilla maneat ejuſdem latitudinis, & in eadem a retina diſtantia, imaginem objecti propioris in fundo oculi ſive in retina depictam eſſe longe majorem imagine ejuſdem objecti in majori a pupilla intervallo collocati, quicumque ſit humorum oculi ſitus, & forma. Nam ex iis, quæ ſupra diſſeruimus, magnitudo imaginis, quæ claram efficit & diſtinctam viſionem, pendet ab iis extremis objecti punctis, a quibus radii prodeuntes per ſua quique contraria pupillæ extrema ingrediuntur, ſeque interſecantes ad contrariæ retinæ puncta contendunt. Quod ut perſpicuum fiat, ſit oculus CMNO (*Fig.* 4) cornea CO, pupilla DH, objectum AB; duo puncta, B extremum objecti AB, & D extremum pupillæ contrarium extremo B conjungantur recta BD, quæ producatur ad fundum oculi in M: ſimiliter jungantur duo extrema A, & H recta AH, quæ producta tendet in N punctum aliquod retinæ. Dico imaginem ab

ob-

objecto A B depictam in oculo eſſe M N. Nam etſi directa pupilla in medium S objecti, radii prodeuntes a punctis A, B irrefracti non tranſeant uſque ad oculi fundum, tamen in ſententia ſuperius expoſita perinde eſt ac ſi hoc pacto tranſirent. Cum enim oculus totum objectum clare videt, pupilla ſuum non dirigit axem verſus unum tantum objecti punctum, ſed continenter in omnia ab A verſus B (n. 8.). Unde eſt perinde ac ſi conſiderata pupilla ut quieta, radii extremi B D, A H irrefracti pervenirent ad M, & N propterea quod dum claram ſui viſionem in punctis N, & M impreſſerunt, non erant quilibet radii, ſed tantum optici axes. Quo conſtituto a qualitate & ſitu humorum oculi, & præſertim cryſtallinæ lentis non pendebit imaginis M N magnitudo, eo quod cum irrefracti tranſmittant, extrema imaginis puncta M & N, ſi maneat eadem pupillæ magnitudo, & diſtantia a retina, æqualiter diſtabunt, quæcumque ſit humorum, & cryſtallinæ lentis qualitas, & diſpoſitio; pendebit tantum ejuſdem claritas, & diſtinctio, quia ab horum qualitate, ſitu, & diſpoſitione oritur, ut alii radii prodeuntes ab extremis A & B, & a ſuis quique radiis perpendiculariter incidentibus, ſive axibus opticis declinantes & in oculos oblique ingreſſi propter refractionem cum ſuis axibus coeant in ipſiſmet retinæ punctis M, & N, uti & alii radii inter A, & B in aliis punctis retinæ inter M, & N concurrant, in quo poſita eſt clara, & diſtincta viſio; aut eo perveniant vel antequam coeant, vel poſteaquam cojere; in quo obſcura, & confuſa. Si vero objectum A B ad majorem transferatur diſtantiam, ut in *a b*, & latitudo pupillæ D H eadem perſtet, quemadmodum & ipſius ab oculi fundo diſtantia, iiſdem, ut antea, conſtitutis extremi radii *a* H *n*, *b* D *m*, minorem in oculi fundo retinæ portionem *m n* intercipient, ideoque imago *m n* valde minor erit imagine M N. Quod ſi latitudo D H pupillæ ratione objecti A B, & *a b* pro nulla ſive pro puncto haberi poſſit, tunc radii A H, B D ſe non interſecabunt in puncto *d* per ſenſile ſpatium diſtante a pupilla; nec radii *a* H, *b* D in ſimili puncto *e*, ſed omnes in tam parva ab eadem diſtantia, ut perinde foret ac ſi ſe in pupilla interſecarent. Quo in eventu magnitudo imaginis M N objecti A B ad magnitudinem *m n* objecti æqualis *a b* proxime foret in ratione directa angulorum, quos extremi radii intercipiunt, & in inverſa diſtantiarum S P, *s* P ab eadem pupilla.

20.

20. Quare ut objectum *a b* (*Fig.* 4.) poſitum in diſtantia *s* P ex. gr. 20. pedum, æquale objecto A B poſito in diſtantia S P duplo minori æqualem afficiat retinæ portionem M N, & ideo formet æqualem imaginem, neceſſe eſt ut vel pupilla latior evadat, vel ab oculi fundo M N longius recedat, vel uſuveniat utrumque. Hoc enim pacto, & non aliter, ob ſupra allatam rationem fieri poteſt, ut in objecto remotiori *a b* extremi optici axes *a n*, *b m* incidant in puncta N, & M, ideoque objectum *a b* formet imaginem æqualem imagini ab objecto A B æquali ſed propiori, formatæ. Primum uſuvenire in objectis remotioribus ſupra vidimus (n. 18.), ſecundum autem colligi poteſt ex illo experimento; quod in conatu aſpiciendi objecta remota oculi turgeſcunt, & ſe exporrigunt, hacque ratione magis apti redduntur ad eadem diſcernenda: in quo ipſam quoque pupillæ cum aliis oculi anterioribus partibus protuſionem antrorſum, & remotionem a retina mihi videre videor, quia cum id accidit, globus oculi producitur ſecundum extrema contraria, anterius, in quo eſt pupilla, & poſterius in quo retina, ideoque ipſamet extrema cum ſuis partibus a ſe viciſſim recedunt.

21. Horum alterutrum aut utrumque eſſe cauſam, cur anima videat duo æqualia objecta in diverſis collocata diſtantiis, ſed tamen mediocribus, tamquam æqualia; propterea quod hæc duo tantum idonea ſunt ad æqualiter magnas in extenſione impreſſiones in ſenſorio viſus faciendas; & æqualiter in extenſione magnæ impreſſiones in ſenſorio factæ ſolum idoneæ ſunt ad æqualiter magnas ſenſationes viſus in anima excitandas. Quod enim idoneæ ſint, conſtat ex iis, quæ ſupra diſſeruimus; quod autem ipſæ tantum, nunc oſtendo ea diſtinctione, quam ab initio propoſui, quod cum altera hujus phœnomeni cauſa ab aliquibus collocetur in eo, quod anima aſſueſcit judicare majora, quæ longius diſtantia, aut minori luce colluſtrata videt, hoc judicium ipſum per ſe aptum quidem eſt ad imaginationem majoris extenſionis, non vero ad ſenſationem ejuſdem, qualis eſt viſio, ut pluribus exemplis ibidem declaravi: eatenus vero juvat, quatenus anima in hiſce variis objectorum magis diſtantium circumſtantiis paulatim ita aſſueſcit aut dilatare pupillam, aut a retina removere, aut utrumque præſtare. Ex quo intelligitur ratio illius experimenti, quod numero 15. expoſuimus. Cum duo globi æquales, A B

(*Fig.* 3.)

(*Fig.* 3.) in diſtantia 20. pedum ab oculo E, CD in diſtantia 40. ab oculo F ponuntur, anima in aſpiciendo globo remotiori C D ſuum oculum ita conformat, ut idem C D æqualem ac B A in retina imaginem formet alterutro vel utroque modorum, quos explicavimus. Si dum oculi a globis avertuntur, aliquis nobis inſciis, & imprudentibus tollat globum C D in diſtantia 40. pedum collocatum, & duplo minorem *p o* in diſtantia F P 20. pedum ſubſtituat, credens anima eumdem eſſe globum C D, & in diſtantia duplo majori ſitum eumdem ac antea conatum exerit in dilatanda pupilla, & removenda a retina, ut ob allatas rationes globus *p o* æqualem in F depingat imaginem, & ſub eodem angulo appareat ac major A B ratione oculi, cujus pupilla ſit anguſtior, & a retina abſit minori intervallo.

At enim in præſenti eventu caret anima illo medio, quo pupillam dilatet, nempe minus vivida luce, quæ ab objecto *o p* reflectatur, propterea quod duo globi A B, & *o p* ſunt re ipſa in eadem ab oculo diſtantia. Id vero eſt, quod advertente citato ſcriptore difficilem reddit experimenti ſucceſſum, adeo ut fateatur ſe quidem decepiſſe incautos, ſed difficulter potuiſſe fallere eos, qui ad ingentes diſtantias clare vident, atque ad certum ſucceſſum opus eſſe, ut ſic diminuatur lux globi propioris *o p* quemadmodum poſtulat major diſtantia F D. Quamobrem in iis, qui viſu non utuntur acuto, in quibus experimentum facilius e voto ſuccedit, præjudicata opinio, quod ſit idem ac antea globus C D, & in eadem diſtantia F D collocatus, eametipſa eſt cauſa, quæ determinat animam ad pupillam aperiendam, aut a retina removendam, quantum neceſſe eſt ut globus minor *o p* ſub æquali angulo ac globus major A B appareat, & æqualem in oculi fundo imaginem imprimat.

Ex quibus fit manifeſtum diſcrimen inter meam ſententiam, & Deſagulerii aliorumque, quod alii putant corpora, & eorum diſtantias ſub tali angulo definito in oculum intrare, talemque in ipſius fundo definitam imaginem delineare, ſed præjudicatas opiniones a tactus experimentis, quæ cum variis ſenſationibus lucis conjunguntur, profectas, & habitus inde acquiſitos efficere ut anima ſub aliis angulis atque diſtantiis, & ſub aliis eorum magnitudines atque poſituras repræſentantibus imaginibus intueatur: ego vero exiſtimo varias ani-

mæ

mæ viſiones tamquam a cauſa proxima, pendere a variis in retina factis impreſſionibus, adeo ut æquales ab æqualibus, diſpares a diſparibus proficiſcantur; ſed eaſdem præjudicatas opiniones, & acquiſitos habitus eſſe cauſas, cur anima ita conformet oculos, quemadmodum neceſſe eſt ad eum finem, ut in oculi fundo depingantur imagines ad eas varias viſus ſenſationes efficiendas accommodatæ.

22. Quæ mea ſententia perſpicuam continet rationem, cur hæc phœnomena contingant in aliquibus determinatis diſtantiis, non in majoribus, neque cum vera corporum magnitudo nimis augetur aut minuitur, aut cum corpora a vero ſitu nimis diſtorquentur. Siquidem determinata ſunt tum maxima, & minima pupillæ ab oculi fundo diſtantia, quas eadem ope muſculorum finitæ virtutis acquirere poteſt, tum diductio, & contractio ejuſdem pupillæ, tum varia ceterarum oculi partium diſpoſitio, quas ad augendas aut diminuendas objectorum imagines aliter pro aliis diſtantiis multi conformari volunt. Inde fit ut quantumcumque conetur anima, non poſſit efficere ut vel planetæ nimium remoti, corpuſcula exigua microſcopio amplificata, magna corpora alio vitro nimis imminuta, uti & intervalla nimium aut contracta, aut producta ſub ſuis quæque veris magnitudinibus appareant, vel corpora longe diſtantia ſuis ſub figuris, vel corpora partim in aqua demerſa partim extantia cum vero partium ſitu, vel quæ a ſpeculo polyedro multiplicantur, ut unum; tametſi hæc omnia prius jam noverit, qualia ſint. Ex quo fit perſpicuum in noſtra ſententia quam optime explicari allatum diſcrimen, eamdemque hoc pacto mirifice confirmari.

23. His innixus principiis in alio meo longiori de opticæ principiis commentario, qui Deo dante lucem propediem videbit, dirimo celebrem illam de majori lunæ, & ſolis ſpecie in horizonte, quam in meridiano quæſtionem, de qua inter ſe acerrime digladiati ſunt cl. viri, cujuſque hiſtoriam refert Bremundus in adnotationibus ad dictum Deſagulerii commentarium; explico rationem, qua fit, ut anima veniat in cognitionem figuræ ſolidorum, motus, & quietis; & præſertim examino Condillaci ſyſtema circa viſionem, rationibus, & obſervationibus a cl. viro allatis ſatisfacio, & meis ſolutionibus, iis præſertim, quibus explico phœnomena cæcorum ab ortu, meum expoſitum ſyſtema luculenter confirmo. Sed ne

in præſens orationem in loca hæc omnia inducam, hujus commentarii anguſtiis excludor.

24. Quamobrem his omnibus miſſis venio ad ſolutionem difficultatum Alemberti, quas ab initio propoſui. Liquet autem in iis multum eſſe momenti in communi ſententia, nullum in mea. Siquidem vel agitur de illa obſcura, & confuſa viſione, quæ fit penicillis radiorum, qui ab uno objecti puncto profecti per commune humorum centrum non tranſeunt, ideoque omnes refringuntur; vel de clara, & diſtincta, quæ fit penicillis axium opticorum, qui ſine ulla refractione ad retinam uſque perveniunt, ea ratione, quam ſupra expoſuimus, in eo poſita, quod totum aliquod objectum clare, & diſtincte non videtur, niſi oculi ſuos opticos axes ad omnia objecti puncta exiguo tempore dirigant. Si primum, ſupervacaneum eſt in iiſdem obliquis radiis atque refractis rationem inveſtigare, quomodo fiat, ut appareant tam magna, ut ſunt, & in ſuis veris diſtantiis, figuris, & ſitibus. Siquidem hiſce radiis, Alemberto aſſentiente, tam obſcuram atque confuſam horum viſionem acquirimus, ut eorum ope radiorum, & viſionis ab iiſdem excitatæ nihil horum definiri queat. Sin vero agitur de axibus opticis, quorum ope tantummodo claram, & diſtinctam totius cujuſdam objecti viſionem acquiri docuimus, jam per ſe patet primas Alemberti rationes nihil efficere; ſiquidem totæ in eo poſitæ ſunt, ut propter refractionem pars radii, quæ proxime retinam laceſſit, multum deflectat ab ea, quæ a puncto viſibili objecti ad corneam tendit. Id quod locum non habet in axibus opticis, qui ab eodem objecti puncto uſque ad aliquod retinæ punctum irrefracti tranſmittunt. Ergo primis Alemberti rationibus nihil efficitur adverſus certitudinem principiorum viſionis directæ, ſed quatenus a nobis conſtituuntur.

25. Ut vero ad alterius rationis ſolutionem mihi viam muniam, prius referam facillimum quoddam, & a nemine, quod ſciam, etiamnum animadverſum experimentum, quod mihi impoſterum maximo erit in hac diſputatione uſui. Eſt autem hoc: pono calamum in ſitu perpendiculari ante accenſam lucernæ facem in tali ſitu inter oculos & facem, ut duobus oculis videam facem in duas utrimque partes diviſam; capite immoto manens, quod ſemper in hiſce experimentis eſt obſervandum, ſiniſtrum, quo utor debiliori, claudo: nihil-

hilominus in eodem ſitu calamus ratione habita facis, & aliarum lucernæ partium apparet: clauſo vero dextro acutiore fax cum aliis remotioribus lucernæ partibus ita ad ſiniſtrum oculum accedit, & a dextro recedit, ut totum calamum videam extra facem verſus dexteram non exiguo ſpatio intercepto, & ad alias dexteras lucernæ partes intervallo plurium linearum diſtantes a primis referam. Deinde clauſo dextro oculo pono calamum in eo ante facem ſitu, ut facem in duas utrimque portiones ab eo diviſam lævo oculo aſpiciam: tum aut utrumque oculum aut ſolum dextrum valentiorem aperio, & continuo lucernam intueor propiorem dexteræ, & calamum ad alias ſiniſtram verſus partes refero. Ex quibus apparet calamum, facem, & lucernam in eodem loco apparere duobus oculis, & dextro valentiori, in alio vero ſiniſtro debiliori, ſive calamum, qui eſt propius objectum, ad unum & eumdem locum ſiniſtræ propiorem referri duobus oculis, & dextro valentiori, ad alterum locum dexteræ propiorem ſolo oculo ſiniſtro infirmiori. Aliis corporibus & in aliis tum ab oculo, tum inter ipſa intervallis ſum uſus, & ſemper experimentum ita ſucceſſit, niſi quod quo calamus eſt propior faci & remotior ab oculis, intervallum inter facem & calamum oculo ſiniſtro infirmiori viſum eſt eo minus; quo vero calamus eſt remotior a face & oculis propior, intervallum eſt eo majus, adeo ut in diſtantia calami a face duorum pedum ab oculo unius pollicis, oculo ſiniſtro videatur calamus in loco verſus dextram plures pollices diſtanti ab eo verſus ſiniſtram, in quo duobus oculis aut dextro valentiori obſervatur. Multos alios adhibui fere ad quinquaginta omnis ætatis, puerorum, adoleſcentum, ſenum, qui prorſus idem ſibi uſuvenire faſſi ſunt, cum hoc tamen diſcrimine, ut qui ſiniſtro valentiore utebantur, plures autem fuerunt, ii duobus oculis & ſiniſtro ſolo valentiore viderent objectum in eodem loco verſus dexteram; ſolo vero dextro debiliore in altero verſus ſiniſtram. Soli vero duo adoleſcentes, quorum alter ajebat ſe æqualiter videre utroque oculo, idque mihi confirmabat, eadem, ut videbatur, facilitate legendo librum plures pedes diſtantem alterutro oculo, alter vero uno valde debiliori utebatur, ut difficulter legeret, hoc aliud ſibi uſuvenire affirmabant. Calamum in ſitu perpendiculari ita ponebant ante oculos, ut oculo utroque illum recta referrent ad determinatum quoddam

parietis punctum, clauſo dextro, ſiniſtro aperto, ad aliud verſus dextram longe diſtans a primo; ſiniſtro vero clauſo, & aperto dextro ad aliud verſus ſiniſtram, ſed valde parum diſtans a primo. Eadem experimenta ſuccedunt, ſi alteruter oculus non claudatur, ſed aliquo impediatur interpoſito corpore. Nam pono calamum ante oculos ita ut illum videam parum extra facem verſus ſiniſtram, tum corpus interpono inter calamum, & oculum dextrum, ut eodem dextro minime cernam, ſed ſolum ſiniſtro: tunc calamum video extra facem ſed verſus dexteram, & quidem non levi intervallo; interpono corpus inter ſiniſtrum oculum, & calamum, tuncque intueor in eodem prorſus loco ac duobus oculis amoto corpore interiecto. Adverto etiam, duobus aliis adoleſcentibus, qui videbantur eadem facilitate legere in magna diſtantia, eadem contigiſſe experimenta ac mihi.

26. Ex his colligitur reſponſio ad difficultatem Alemberti n. 4. propoſitam. Duo oculi A, B (*Fig.* 2.) non vident ſidus E in ε puncto medio inter *e*, & *e*, ſed fere ſemper in alterutro ex punctis *e*, prout vel A, vel B, eſt valentior, & aliquando ad ſummum in loco aliquo valde propiori uni puncto, in quorum primo eventu, qui eſt communis, videmus ſtellam in fine axis optici oculi firmioris, ut quod attinet ad opticum axem vult communis opticorum opinio; in altero, qui eſt rarus, videmus in puncto ita parum diſtanti a fine unius axis optici, ut hæc diſtantia haberi pro nulla jure, ac merito poſſit.

27. Ex his etiam experimentis colligi poteſt vera ratio, cur duobus oculis non duplex, ſed unum objectum videamus, quæ in eo poſita eſt, ut utriuſque imaginem oculi ad unum referamus locum, in quo altera cum altera veluti compenetrata ſit. Nam primo ii, quorum eſt maxima pars, qui uno debiliore utuntur, eodem non poſſunt objectum ad ſuum verum locum referre, eoquod ut id faciant, neceſſe eſt diſtantiam inter objectum, & oculum (n. 13.) obſervare. Hanc autem videre nequimus, niſi ſpatium interceptum uſque ad objectum oculis paulatim luſtremus radiis, qui ab objecto & ab omnibus intercepti ſpatii partibus in pupillam ingrediuntur. Sed experimenta narrata, & ratio a minori impreſſione, quam radii faciunt in oculo debiliore, deprompta commonſtrant animam non videre objectum in directione radiorum,

qui

qui in debiliorem intrant, ſed ſolum in directione eorum, qui contendunt ad fortiorem. Ergo cum utroque oculo intuemur objectum, debiliore ad ſuum non referimus locum, ſed tantum ad locum fortioris. Igitur in hoc primo eventu unum tantum objectum viſione directa intueri debemus. Alii vero pauci, quorum oculi fere ſunt æqualis virtutis, tametſi aliqui ex iis objectum accurate non referant ad locum unius oculi, referunt tamen ad unum ſolummodo locum, eumque valde propiorem loco, in quo illud uno oculo intuentur. Quamobrem etiam in iis eſt eadem ratio, cur binis oculis unum videant. Arbitror autem, etiam in his eſſe aliquod inter utriuſque oculi vires diſcrimen, ſed valde exiguum & valde minus eo, quod communiter eſſe ſolet. Nam ex altera parte certum eſt experientia duobus oculis objectum clarius apparere, quam uno, ſive multum ſive parum differentiæ ſit in utriuſque virtute: ex altera ſi ob majorem ſolis claritatem prorſus diſparet ipſamet ſyderum imago, vel ſaltem imago lunæ valde obſcuratur, multo magis ad præſentiam fortioris diſparere poteſt ipſa imaginis obſcurioris oculi debilioris directio, quæ eſt pura imaginis affectio, vel ſaltem ita debilitari, ut ad directionem fortioris quam proxime accedat. Atque hæc eſt recondita ratio, cur anima objectum non videat in directione oculi debilioris, tametſi eodem debiliori illud intueatur. Quamobrem ſi quis foret oculis prorſus æqualiter fortibus, quod eſt difficillimum, quia æqualitas uno tantum modo eſſe poteſt, diſparitas infinitis, nullus dubito eum duobus oculis viſum ire objectum in loco accurate medio inter locum ad ſiniſtram, in quo ſolo dextro videret, interque locum ad dexteram, in quo ſolo ſiniſtro. Sed neminem invenire potui qui ſic objecta videret.

Antequam hoc caput concludam, reſtat graviſſima difficultas, quæ in hoc poſita eſt. Bremundius in adnotationibus ad memoratum in ſuperioribus Deſagulerii commentarium, qui extat in Tranſact. Philoſ. ad an. 1736. refert Gaſſendum ex majori reſtrictione pupillæ, quæ fit a vividiori luce ſolis ac lunæ in meridiano, ex minori, quæ a debiliori eorumdem luce in horizonte, rationem repetiviſſe, cur in meridiano minores appareant ob minorem in oculi fundo depictam imaginem, majores in horizonte propter majorem. Pardium autem prorſus evertiſſe hanc ſententiam, ac liquido monſtraſſe majori

pu-

pupillæ dilatatione non fieri, ut imago major appareat; ſed ſolum ut major tranſmittatur copia lucis, & objectum dilucidius videatur. Quod confirmatur experimento ſubobſcuri cubiculi, in quo pupilla magis eſt aperta quam in plena ſolis luce, & nihilominus objecta æqualis, ac ſub dio, magnitudinis conſpiciuntur. Hæc autem adverſantur iis, quæ in anteceſſum ſtatuimus.

Ut his ſatisfacerem me contuli ad experimenta. In folio craſſioris, & opacæ chartæ coloris cærulei aperui foramen rotundum diametri 13 linearum, atque illud tenens in ſitu perpendiculari ad altitudinem oculorum adeo ut feneſtram laminis vitreis clauſam abſconderet, ad foraminis partem feneſtræ obverſam admovi lentem convexam, ad alteram oculo chartam albam ſubtilem, & tranſparentem; quo factum eſt, ut circularis chartæ portio foramini æqualis illuminata ſine ulla ſingularum laminarum, & plumbeorum cujuſcumque laminæ extremorum diſtinctione ex adverſo appareret: tum paulatim removi albam chartam, atque obſervavi portionem illuminatam eo magis creſcere, quo plus charta removebatur, & eo fieri magis diſtinctam, ac eo propius accedere ad rectangularem feneſtræ & laminarum figuram, adeo ut in quadam determinata diſtantia ſingulæ laminæ cum ſuis quæque plumbeis extremis diſtinctæ quantum fieri poteſt apparerent; quod comperiebam ex eo quia in minori diſtantia minores & minus diſtinctæ obſervabantur, in majori majores quidem ſed etiam magis obſcuræ & confuſæ. Deinde collocavi foramen cum lente ad diſtantiam a feneſtra duplo majorem prima, vidique imaginem feneſtræ maxime diſtinctam eſſe valde minorem ſimili imagine in diſtantia duplo minori. Hæc eadem experimenta tentavi cum alio foramine duplo minoris diametri, id eſt lin. 6, 1 : 2. & ſimiliter ſucceſſerunt, niſi quod imago maxime diſtincta eſt ad diſtantiam albæ chartæ a foramine & lente valde minorem, quam in primo eventu, eadem imago eſt valde minor & valde obſcurior imagine maxime diſtincta ejuſdem primi eventus; quæ tres differentiæ multo majores obſervabantur, cum utebar foramine diametri quadruplo minoris, nempe lin. 3, 1 : 4.

Ex quibus experimentis non ſolum a me ſed ab aliis etiam ſumma cum diligentia inſtitutis colligitur, ad eum finem ut aliquod objectum a lente, & foramine remotius æqualem,

ſe idem propius, diſtinctam quantum fieri poteſt imaginem in papyro depingat, neceſſarium eſſe ut foramen ſit amplius, & diſtantia papyri a foramine major ſit. Si hæc ad oculum transferantur, mihi videntur omnino ſatisfacere Pardii difficultatibus, & diſſentientes conciliare philoſophos, quorum alii volunt majus foramen ad magnitudinem imaginis conferre, alii negant. Siquidem ex allatis experimentis compertum ſit, primorum ſententiam ſi univerſe intelligatur, eſſe falſam, atque eſſe veram ſolum in eo ſenſu, ut cum foramen eſt majus, imago maxime diſtincta in papyro depicta, ſit quidem major maxime diſtincta minoris foraminis imagine, ſed illa in majori quoque chartæ a foramine & lente diſtantia formetur. Cum autem in oculo ſint ex altera parte pupillæ, quæ locum habet foraminis, lens cryſtallina, per quam colliguntur radii per pupillam intrantes, & nervea retina, in qua imagines depinguntur; & ex altera certum ſit pupillam contrahi, & dilatari, illud in objectis vicinis & in multa luce, hoc in remotis & in exigua, & ad verum quam proxime accedat eſſe quoque idoneos muſculos, quibus pupilla, & lens a retina plus vel minus removeatur: facile eſt inde colligere animam talem in movendis oculi muſculis conatum exercere, quo imaginem objecti, quantum fieri poteſt, diſtinctam conſequatur, atque ad id conſequendum ſic dilatare pupillam, & eam ſimul cum cryſtallina lente ſic a retina removere, prout eſt neceſſe, ut diſtincta imago in retina formetur; & cum agitur de objecto intra duas diſcrepantes, ſed mediocres diſtantias collocato, ſic variare dilatationem atque receſſum, prout neceſſarium eſt non ſolum ad diſtinctam in retina imaginem depingendam, ſed etiam ad circiter æqualem, quo objectum ab iis duobus intervallis conſpectum circiter æquale videatur. Quamobrem ex propoſita a Pardio difficultate nihil colligitur, quod noſtram evertat ſententiam de æqualitate imaginum cum objecta æqualia videntur, & diſparitate, cum diſparia, deque eo, quod dilatatio pupillæ ad imaginis magnitudinem confert.

Quod pertinet ad experimentum ſubobſcuri cubiculi duo reſpondeo, primum non raro uſuvenire, quod ex noſtro ſyſtemate colligitur. Nam ut vulgari conſtat experientia, & advertit Caillus in lect. optic. §. 100. Phantaſmata noctu & objecta iis, qui itinerantur, proxima, uti domus, & arbores, val-

valde majora & valde majori, quam ſunt, intervallo diſiuncta, apparent: alterum in tenebris, & in loco debilis lucis magis quidem ipſam per ſe aperiri pupillam, ſed mentis conatu fieri poſſe, ut ejuſdem & cryſtallinæ lentis a retina diſtantia minor fiat; quorum primo ita augeri poteſt imago, & ſecundo ita diminui, ut æqualis illi, quæ in plena luce, & ideo referens objecta æqualia formetur. Nos enim non negamus judicium mentis aliunde ſcientis idem objectum eſſe in diverſis intervallis atque in diverſa luce ad æqualitatem imaginis multum conferre, ſed ſtatuimus id non facere ipſum per ſe, ſed ſolum ope diverſæ diſpoſitionis, quam in oculi partibus inducit, & adminiculo imaginum, quæ inde exiſtunt. Et revera in dicto experimento major ſolita arborum, & domorum ſpecies diſparet, & gignitur conſueta, ſi oculos aliquantum intendamus; quo non ſolius judicii correctionem, ut contrariæ ſententiæ contendunt patroni, ſed aliam quoque partium oculi diſpoſitionem alii formandæ imagini accommodatam haberi ipſamet oculi inſpectio declarat.

CAPUT SECUNDUM.

De principiis viſionis reflexæ.

28. NUnc ingredior in difficilem locum phœnomenorum viſionis reflexæ. In ſpeculis planis, & in eventu quod objecta videantur radiis ad oculos oblique reflexis, facile eſt rem definire. Sit enim ſpeculum planum BZ (*Fig.* 5.) duo oculi in G, & in V, objectum R; ducaturque RO perpendicularis ad ſpeculum; producatur uſque in N, ut ſit ON = OR. Ex proprietate lucis faciendi angulum reflexionis æqualem angulo incidentiæ facile eſt monſtrare radios RC, RD, RB parum deflectentes, & in valde exiguam ſpeculi portionem BC incidentes, indeque cum parva declinatione reflexos in radios CH, DG, BF, qui in oculum in G collocatum intrent, ſi in alteram partem producantur, concurrere in N, atque idcirco oculo G repræſentare objectum perinde ac ſi foret in N; ſimiliterque radium RP, & proximos reflexos ad oculum in V, & in contrariam partem productos incidere in idem punctum N, & ideo objectum in eodem puncto exhibere, atque idcirco unum, tametſi binis oculis, conſpici. Ex quo auctores opticæ colligunt, quod ex-

pe-

perientia confirmatur, objectum & quidem unum ultra ſpeculum videri in catheto incidentiæ, & in eadem ultra ſpeculum diſtantia, ac eſt objectum citra ſpeculum.

29. Sed difficile eſt utrumque explicare in ſpeculis convexis & concavis, de quibus paulo poſt diſſeram, & quod attinet ad unitatem objecti, etiam in planis, cum homo ſe ipſum, vel alteram rem, videt per radios ad perpendiculum reflexos. Nam ex his colligitur non exiguum eſſe debere ſpatium ſpeculi DP interceptum inter axem opticum DG a ſpeculo reflexum, in cujus directione oculus G videt punctum R in N, & inter axem opticum PV in cujus directione alter oculus V pariter videt punctum R in N. Cum enim diſtantia GV utriuſque oculi non exigua ſit ratione habita RQ, quod parum diſtet a ſpeculo, non exigua eſſe debet ſpeculi portio DP inter puncta D & P, quæ ſint hujuſmodi, ut tam angulus incidentiæ RDO ſit æqualis angulo reflexionis GDZ, quam angulus RPO æqualis angulo VPZ. Res confirmatur experimentis, quæ quiſque inſtituere poteſt. Speculum cooperui charta, in qua reliqueram foramen duarum, trium, quatuor & amplius linearum diametri, obſervavique ſæpiſſime objectum uno oculo clauſo eadem claritate altero videri; ſecundo vero clauſo & primo aperto interdum nullam ipſius partem apparere interdum vero aliquam tantum. Ergo id plane commonſtrat dictam ſpeculi portionem, ex qua radii ad utrumque oculum reflectuntur idonei ad objectum utroque oculo conſpiciendum, non exiguam eſſe oportere. At ſi res ita foret, cum tam objectum, quam oculi diriguntur per lineam eamdem ad ſpeculum perpendicularem, binæ imagines repræſentari deberent. Id quod conſtanti experientiæ adverſatur.

30. Quo huic ſatisfaciam objecto, nonnulla referam a me inſtituta experimenta ſimilia iis, quæ feci in viſione directa. Ad ſpeculum planum ante oculos poſitum in eo ſitu, ut radii a ſpeculo reflexi perpendiculariter, quantum fieri poſſet, in oculos inciderent, admovi facem accenſam inter utrumque oculum ad eorum altitudinem, itaque locavi, ut aperto utroque oculo imaginem facis in ſpeculo viderem aliquantiſper extantem ex face verſus oculum dextrum, qui adeo valentior eſt ſiniſtro, ut illo facile legam, hoc difficulter: tum clauſo ſiniſtro imago ſolo dextro conſpecta in eodem ſitu manebat; clauſo dextro imago ad alteram partem facis verſus ſiniſtram

commeabat, ſed obſcurior apparebat. Si fax ita collocabatur, ut imago in ſpeculo duobus oculis appareret in directum cum face, quæ aliquanto demiſſior oculis foret aut altior, vel ab eadem abſconderetur, cum erat in eadem oculorum altitudine; clauſo ſiniſtro res perinde ſe habebat ac utroque oculo aperto; clauſo vero dextro verſus ſiniſtrum imago tranſibat, duas treſve lineas, & amplius a face diſcedens. Tum accepi clavem cum manubrio oblongo in anulum ellipticum deſinente, itaque poſui inter ſpeculum & oculos, ut planum anuli plano ſpeculi foret parallelum, & duobus oculis apertis imaginem manubrii & anuli per ipſummet anulum viderem. Tum clauſo ſiniſtro imago in eodem prorſus ſitu permanſit; clauſo vero dextro videbam imaginem tum manubrii, tum anuli prorſus verſus ſiniſtram, adeo ut imago ſex & amplius linearum ſpatium verſus ſiniſtram confeciſſe videretur. Deinde clauſo dextro acutiori clavem ita collocavi, ut ſiniſtro viderem ejuſdem imaginem per anulum medium: aperto utroque oculo cernebam imaginem prorſus extantem ex clavi verſus dexteram, & in eodem ſitu apparebat clauſo ſiniſtro. Eadem omnino experimenta ſucceſſerunt quatuor aliis, qui oculo dextro meliore utebantur quam lævo; tribus vero aliis, qui acutius videbant lævo quam dextro, ſimiliter evenerunt, ſed ex parte contraria. Ex quibus omnibus experimentis luculenter efficitur imaginem a ſpeculo reflexam duobus oculis videri in eodem loco, in quo videtur ſolo fortiore; debiliori autem videri in alio ſitu, qui ad oculi debilioris partem propius accedit. Iiſdem vero experimentis a me tentatis nec non ab aliis, quos adhibui, compertum fit objectum duobus oculis clarius videri, quam uno tantum licet fortiori. Ex quo colligitur viſionem imaginis aliqua ex parte etiam oculo debiliori acceptam ferri oportere. Ii vero duo adoleſcentes, qui in viſione directa utroque oculo videbant objectum in uno puncto, ſolo fortiore in altero puncto, ſed valde parum diſtanti verſus contrarium oculi latus, ſolo infirmiore in altero verſus alteram plagam ſed multum diſtanti, ſimilia experiebantur in viſione reflexa, adeo ut imago clavis, quæ duobus oculis appareret in medio anuli, uni valentiori appareret aliquanto, ſed parum, propior lateri oculi, alteri vero oculo valde propior lateri ejuſdem.

31. Ex his vero apparet quid ſit reſpondendum ad pro-

po-

poſitam difficultatem. Nam ſi punctum videndum ſit accurate medium inter utrumque oculum, ut punctum in medio naſo in eadem recta, quæ centra pupillarum conjungeret, tunc videri debet radiis oblique in ſpeculum incidentibus, & inde ad utrumque oculum reflexis; idemque contingere debet, ſi punctum ſit uni pupillæ propius: facile autem oſtendemus, illud ab utroque oculo, ut a fortiori ſolo, videri debere in illo catheti incidentiæ puncto, quod tantumdem in alteram partem abſit a ſpeculo, quantum ex altera idem viſibile punctum abeſt. Sin autem punctum ſit in ipſamet pupilla unius oculi, ab hoc videbitur imago radiis perpendiculariter reflexis, niſi ſit adeo magnum ut impediat radios quominus uſque ad pupillam reflectantur: ſed propter conſuetudinem utrumque oculum verſus idem punctum dirigendi imago ab altero oculo videbitur radiis oblique reflexis, qui cum radiis perpendiculariter reflexis ultra ſpeculum concurrent in eo puncto, quod a ſpeculo æqualiter ac punctum viſibile, abſit. Ex quo fiet, ut imago duobus oculis in eodem loco, atque idcirco ut una videatur. Sed in his omnibus eventibus bini oculi propter expoſita experimenta videbunt imaginem in directione radiorum, qui ad oculum valentiorem contendunt.

32. Sed veniamus ad ſpecula convexa, & concava. Alembertus enim in commentario ſupracitato plures proponit difficultates adverſus principia viſionis reflexæ, cum agitur de hujuſmodi ſpeculis. Primo enim art. 5. advertit, antiquiores opticos voluiſſe objectum videri in concurſu reflexi cum catheto incidentiæ, ideſt cum illa perpendiculari, quæ ad ſuperficiem reflectentem aut convexam, aut concavam ducitur, quemadmodum uſuvenit in planis ſuperficiebus. Ad quod primum monet potius ſtatui debuiſſe objectum videri in puncto concurſus radii reflexi cum perpendiculari ad tangentem puncti reflexionis. Cujus hæc poteſt afferri ratio. Sit ſpeculum convexum QBR (*Fig. 6.*) cujus centrum C, ſit objectum in O, & ad quodlibet ſpeculi convexi punctum B ducatur a centro C perpendicularis CBN; tum erigatur SBE perpendicularis ad radium CB, quæ eſt tangens ſpeculi in B; ex objecto O ducatur normalis OE ad tangentem BE, productaque ut fiat $ED = EO$, puncta O & B, D & B jungantur rectis OB, DB, quæ DB producatur in M. Ex iis, quæ in reflexione ex ſpeculo plano confecimus, conſtat angulum inci-

dentiæ OBE eſſe æqualem angulo reflexionis MBS, atque ideo radium profectum ab O & incidentem in punctum B reflecti debere per BM, & ſi oculus ſtatuatur in M, objectum O viſum iri in D. Nam valde exigua portio circuli cum recta tangente, & ſphæræ cum plano pariter tangente congruit. Quare innumerabiles radii profecti ab O, & ab OB parum deflectentes & in exiguam circa punctum B ſphæræ portionem incidentes perinde ſe habebunt ac ſi in planum inciderent, ideoque ita reflectentur undequaque ſecundum rectam BM, ſed ab ea parum deflectentes ut in contrariam partem producti cum radio MBD, qui tamquam axis opticus ponitur, concurrant in puncto D, tametſi non ita exacte, ut in exacto plano, punctique O imaginem depingant in D, & oculum ad illam ad punctum D referendam determinent. Si accipiatur alterum objecti punctum valde proximum *b*, mutatis literis majoribus in minores objectum O videbitur in *d* ab oculo poſito in *m*.

33. Adverſus antiquorum principium art. 6. monet Tacquetum, tametſi illud aſciverit, fateri experientiam in aliquibus eventibus eidem adverſari. Nam ſi objectum ponatur ultra centrum ſpeculi concavi, oculus inter centrum & ſpeculum collocatus illud videt in ſitu erecto. At ſi videret in cathetis incidentiæ, cernere deberet inverſum, quia radii ab objecti punctis profecti, & ad rectos angulos in ſpeculum incidentes per centrum tranſmittunt, atque idcirco ſe interſecant.

Hoc exploſo principio tranſit articulo 7. ad veriſimilius Barrovii, Gregorii, & Nevtoni, quod eſt hujuſmodi. Punctum viſibile non reflectit unum tantum radium, ſed verſus ſuperficiem reflectentem aut refringentem plures ejaculatur, quorum certus numerus ingreditur in pupillam, eo quod hæc non eſt mathematicum punctum, ſed certam habet latitudinem. Ita radii *o*F, *of* (*Fig.* 6.), qui a viſibili puncto *o* objecti proficiſcuntur, quique prius reflectuntur aut refringuntur, quam perveniant ad oculum, & in pupillam NL ingrediantur, ſic perveniunt perinde ac ſi directe proficiſcerentur ab H puncto, in quo radii FL, *f*N concurrerent, ſi producerentur. Quoniam vero radii FL, *f*N, ob parvam pupillæ latitudinem proximi ſunt, punctum concurſus H eſt ad ſenſum idem, ac ſi forent infinite proximi, nempe punctum H eſt illud, in quo FL tangit cauſticam curvam reflexionis aut

re-

refractionis. Hoc itaque punctum eſt illud, in quo objectum videtur ſecundum laudatos ſcriptores, quorum ſyſtema eleganter expoſuit multiſque illuſtravit conterraneus meus, mihique, dum viveret, conjunctiſſimus Ramirus Rampinellius Congregationis Montis Oliveti Cl. in gymnaſio Ticinenſi matheſeos profeſſor in ſuis lectionibus opticis editis Brixiæ an. 1760.

34. Qua expoſita ſententia Alembertus primo advertit ipſum Barrovium in fine ſuarum lectionum opticarum monere experientiam eidem eſſe contrariam: quod accidit in eventu, in quo FL, fN (*Fig. 6.*) ob reflexionem aut refractionem ad ſemetipſos accederent. Tunc enim, ſi oculus in parva a ſpeculo diſtantia collocatur directus verſus F & f, radii non conjungerentur in H ultra ſpeculum & ante oculos, ſed extra ſpeculum, & poſt caput: inter alia exempla ad id confirmandum afferre exemplum Tacqueti, atque fateri hanc difficultatem ſibi videri inexplicabilem. Deinde monet hanc ſibi talem non videri, propterea quod ex altera parte viſio clara perfici non poteſt radiis, qui viciſſim inclinati ingrediuntur, & ex altera principium pertinere non poteſt niſi ad radios qui deflectentes in pupillam ingrediuntur, quique ſoli cum in retina conjungi poſſint, pariter ſoli claram, & diſtinctam puncti, a quo projiciuntur, imaginem depingere queunt.

35. Ex quo colligit his rationibus non infirmari principium Barrovii, ſed addit aliis labefactari. Nam hæc ſcribit art. 9. Poſitio oculorum eſſe poteſt hujuſmodi, ut qui radii reflexi, aut refracti in ſingulos oculos intrant, quique ab eodem puncto proficiſcuntur, ii valde diſcrepent, & inter ſe angulum valde magnum conficiant. Quare ſi hos radios inter ſe concurrere ponamus, neceſſe foret hunc concurſum eſſe in eodem puncto H (*Fig. 6.*) cauſticæ pro quolibet radio. Id quod per raro contingit; in aliis omnibus eventibus forent duo puncta H ſive duo loca imaginis valde inter ſe pro quolibet oculo diſcrepantia, ideoque imago duplicata appareret, quod experimentis adverſatur. Ergo imago in puncto H non videtur.

36. Has alias rationes ſubjungit art. 10., & 11. Si oculi ita ſint collocati, ut qui radii in ſingulos intrant, nunquam concurrant, eo quia ſinguli cujuſque oculi radii aut ſunt paralleli, aut in diverſis planis reperiuntur, in neutro ex duobus radiis imaginem, viſum iri manifeſtum eſt. Quod ni ita fo-

ret,

ret, aut duplex appareret, aut uno tantum oculo cerneretur, quod falſum eſt. Inde vero obiter colligitur falſum quoque eſſe Volphium, qui contendit imaginem videri in puncto concurſus radiorum, qui in utrumque oculum ingrediuntur, ubi enim apparebit objectum, cum, quod ſæpius uſuvenit, hoc concurſus punctum nuſquam eſt? Quid quod ſi non ſolius longitudinis LN (*Fig. 6.*), ſed etiam latitudinis pupillæ ratio habeatur, ut haberi oportere conſtat, fieri poteſt, ut radii, qui ad hanc latitudinem pertinent, quam nunc pono eſſe LN, in puncto colligantur valde diverſo, nempe in illo, in quo radius LF incidit in cathetum incidentiæ? quo poſito radii plura haberent incidentiæ puncta, inter quæ non poſſet determinari illud, ad quod potius præ aliis oculus imaginem referre deberet. Præterea oculi ita ſiti eſſe poſſunt, ut pro ſingulis ſint duæ imagines diſtinctæ, ideoque pro duobus quatuor, & in aliquo ſitu ad minimum tres habebuntur, una in catheto incidentiæ, aliæ duæ in cauſticis.

37. Hactenus Alembertus, cui primum aſſentior falſam eſſe antiquorum opticorum ſententiam, quæ nullo pacto defendi poteſt ob allatum Tacqueti experimentum, & ob alias rationes, quas, ut breve faciam, omitto. Nec tamen admitti poteſt alterum principium, quod, ut a nemine obſervatum, inſinuat Alembertus. Nam punctum viſibile primo videri debet in directione radii reflexi; deinde in eo radii reflexi, ſi opus ſit producti, puncto, in quo magna radiorum ab aliquo viſibili puncto promanantium, & aliquantiſper a ſe viciſſim deflectentium concurrunt. Quod hæc duo ſervantur ratione habita illius puncti, in quo radius reflexus ultra ſpeculum productus, cum perpendiculari ad ſuperficiem planam reflectentem concurrit, idcirco oculus in aliquo radii a ſuperficie ſpeculi reflexi puncto collocatus objectum videt in puncto concurſus ejuſdem cum perpendiculari. At in ſpeculis convexis, & concavis res non ita ſe habet. Nam in ſpeculo ſatis accurato, & continuæ ad ſpeciem curvitatis, adeo ut nulla diſcerni queat plana ſuperficies, ſingulæ hujuſmodi planæ ſuperficies innumeris partibus minores ſunt plano pupillæ, cujus diameter ſub ſenſus cadit, & illa quoque baſi faſciculi radiorum, qui ſimul cum axe optico in pupillam ingrediuntur, poſtque varias refractiones in ipſa colliguntur retina ad viſibilia corporum puncta alia poſt alia eo depingenda modo,

quem

quem numero 8. accurate expoſuimus. Unde qui radii a puncto viſibili deflectentes in unam tantum ex hujuſmodi ſuperficiebus circa B (*Fig.* 6.) collocatis incurrunt, & ita reflectuntur per BM, ut producti cum OED ad tangentem BE perpendiculari concurrant in eo puncto D, ut ſit DE = OE; ii pariter innumeris partibus pauciores ſunt iis, qui totum dictum faſciculum componunt: alii omnes incidunt in alia innumera circa planum B poſita plana, quæ aliter ac B ſunt inclinata, & idcirco tangentes habent a tangente BE deflectentes. Quare quod attinet ad ſenſilem alicujus puncti objecti impreſſionem in retina faciendam, non ſunt attendendi primi, nec illorum concurſus, ſed eſt habenda ratio ſecundorum & puncti, in quo hi omnes majori ex parte conveniunt. Hoc autem punctum eſt valde remotum ab eo, quod ex concurſu radii reflexi cum perpendiculari ad tangentem definimus. Nam in ſuperficie convexa QBR (*Fig.* 6.) duo radii OB, O*b*, ita reflectuntur per BM, *bm*, ut poſt ſpeculum concurrant in X puncto valde remoto a D. Id quod ex natura curvæ cauſticæ colligitur, & comprobatur experimentis. Siquidem in axe mei ſpeculi convexi vitrei, quod retro habet ſuperficiem planam ſtanno, & mercurio obductam, poſui facem accenſam, duaſque obſervavi imagines alteram æqualem faci, ſed obſcuriorem, quæque certo reflectitur a plana mercurii, & ſtanni ſuperficie; alteram minorem ſed claram, quæque a convexa vitri regeritur. In removenda face a ſpeculo prima ſemper longius retro diſcedebat, ut tanto plus ſpatii retro diſceſſiſſe videretur, quanto plus ſpatii antrorſum fax remota fuerat. Sed altera longe aberat a prima, & ſpeculo valde propior obſervabatur. Hoc autem punctorum concurſus utriuſque generis intervallum multo magis conſtabit ex iis experimentis, quæ ſpeculis concavis infra inſtituemus. Interim hoc unum aio, quod per ſe ſatis eſt ad id efficiendum, puncta concurſus radiorum reflexorum cum perpendicularibus ad tangentes in iiſdem punctis ſemper haberi poſt concavam ſuperficiem, ut ex ſe patet. Bernullius autem tom. III. oper. ſect. 29. & 30. concurſum radiorum, infinite proximorum ex aliquo puncto in ſuperficiem concavam ſphæricam incidentium, invenit ex parte ejuſdem concavæ ſuperficiei citra ſpeculum; de quo paulo poſt accuratius; & experimenta, quæ afferam, id comprobabunt.

38. Ex quibus ſimul conficitur, objectum non videri in concurſu radii reflexi cum perpendiculari ad tangentem curvæ in puncto reflexionis, & apparere in eo loco, in quo ſecundum causticæ naturam radii concurrunt. Nec difficultates Alemberti, & Barrovii hoc ſyſtema labefactant. Quod ut doceam, prius exponam aliqua ex iis experimentis, quæ feci in ſpeculis concavis, alia plurima, & magna ex parte nova impoſterum expoſiturus. 1. Objecta interpoſita inter focum, & ſpeculum cavum recta apparent, ut in ſpeculis plano, & convexo; ſed majora quam ſunt, & eo majora, quo propius ad focum accedunt; qui focus, ut notum eſt, reperitur in diſtantia a centro ſuperficiei concavæ quartæ partis diametri ſphæræ, ad quam pertinet eadem ſuperficies. 2. Collocata vero ultra focum apparent inverſa, ſi oculus quoque longe diſtet. 3 Sed ſi objectum a locis, ubi rectum apparet, paulatim retrahatur ad locum, in quo inverſum, idem obſcuratur primo & confunditur, deinde prorſus evaneſcit, ut nuſpiam inveniri queat. 4. Quotieſcumque apparet rectum, ſemper manifeſte videtur ultra ſpeculum cavum, quemadmodum uſuvenit in plano & convexo; cum autem inverſum, citra ſpeculum eſſe creditur vel ſaltem in ipſa ejuſdem ſuperficie. 5. Hæc experimenta cum eodem prorſus ſucceſſu ſæpiſſime tentavi duobus ſpeculis, altero, quod eſt portio ſphæræ valde majoris diametri, altero, quod eſt valde minoris. Illud autem obſervavi diſcrimen, quod in valde majoribus a ſpeculo diſtantiis imago confunditur, obſcuratur, evaneſcit, & renaſcitur in ſpeculo, quod eſt portio ſphæræ majoris diametri, quam in ſpeculo, quod minoris, in quibus tamen illa languidior, & objecto æqualis imago, quam a ſtannea plana ſuperficie ſupradiximus reflecti, ſemper recta manebat, dum vividior, & major invertebatur. 6. Prope ſpeculum majoris diametri poſui objectum, nempe inter ſpeculum & focum, hujuſque imago ſemper apparuit ultra ſpeculum in ſitu recto, ſive oculus prope ſpeculum foret, ſive in quacumque a ſpeculo diſtantia. 7. Longe a ſpeculo poſui objectum & oculo pariter eminus poſito objectum apparebat in ſitu inverſo vel citra ſpeculum, vel in ejuſdem ſuperficie, ut dixi; ſed ſi oculus foret prope ſpeculum inter focum & ſpeculum, objectum viſum eſt rectum, & in eo majori a ſpeculo ultra idem intervallo, quo major eſt objecti a ſpeculo diſtantia, quod apparens ultra ſpeculum intervallum vi-

videbatur circiter æquale intervallo objecti a ſpeculo. 8. Unde ut objectum in ſitu inverſo & citra ſpeculum, vel in ejuſdem ſuperficie videatur, duo neceſſaria ſunt, tum objecti, tum oculi diſtantia a ſpeculo major diſtantia foci ab eodem, vel potius puncti concurſus radiorum reflexorum, ut infra explicabimus.

39. His poſitis experimentis ſit ſemicirculus H A L (*Fig.* 7.) cujus diameter H L, centrum C; ex centro C ducatur radius C A ad quodlibet punctum A curvæ ſuperficiei, cujus radii accipiatur dimidium AV: circa AV tamquam diametrum deſcribatur circulus A S V Z; ex puncto A ducatur quælibet recta A B ſecans circulum minorem in β. Ex puncto quolibet B tamquam luminoſo extra circulum A S V Z ſumpto ad ſemicirculum H A L ducantur radii infinite proximi B A, B*a* cum ſuis reflexis A M, *am* ad angulos reflexionis æquales angulis incidentiæ. Dico reflexos A M, *am* concurrere ex parte concava ſemicirculi ex. gr. in puncto F: ſin autem ex puncto *b* intra circulum A S V Z ſumpto ducantur radii *b* A, *ba*, dico ipſorum ea lege reflexos A M, *ad* deflectere a ſe ipſis ex parte concava, & concurrere ex parte convexa, ut in *f*: tandem ſi ex puncto B in peripheria ſumpto ducantur radii βA, βa, ajo ipſorum reflexos A M, *a*D eſſe parallelos, ideoque nulla ex parte concurrere. Quæ omnia colliguntur ex iis, quæ monſtrat cl. Hoſpitalius in *Analyſe des Infin. Pet. art.* 116, *&* 120; ex quorum primo deducitur etiam radios infinite proximos *o*F, *of* (*Fig.* 6.) a puncto luminoſo *o* incidentes in ſpeculum convexum Q B R ita reflecti, ut F L, *f*N ſemper deflectant a ſe ipſis ex parte convexa, & verſus concavam producti ibidem, ut in H, concurrant.

40. Ex qua theoria primo comperta ſit ratio, cur, cum objectum eſt ſpeculo vicinum, ut in *b*, oculus poſitus in M *d* in quacunque vel parva vel magna a ſpeculo diſtantia ſemper objectum videat ultra ſpeculum in puncto concurſus *f* radiorum reflexorum A M, *ad*, qui cum a ſe invicem deflectentes in oculum ingrediantur, & ob refractiones in retina colligantur, oſtendere debent objectum perinde ac ſi foret in *f*. 2. Percipitur qua de cauſa, cum objectum eſt remotum, ut in B, oculus pariter diſtans ut in M*m*, videat objectum citra ſpeculum, & ſitu inverſo, quia cum radii concurrant in puncto F propiori, quam ſit oculus, ideoque poſt F ſitum

alternent ex. gr. ſummi in imorum locum, & imi in ſummorum migrent, oculus objectum videt perinde ac ſi foret in F citra ſpeculum, & radiis decuſſatis, ideoque objectum in ſitu inverſo repræſentantibus. 3. Intelligitur etiam, cur in retrahendo objecto, & oculo a ſpeculo, antequam objectum ex recto fiat inverſum, perveniatur ad locum, in quo imago prius turbatur atque confunditur, & deinceps deletur, quia cum oculus eſt nimis prope punctum concurſus radiorum, radii ab objecto in ſpeculum incidentes, & a ſpeculo ad oculum reflexi, non ſunt idonei diſtinctæ objecti imagini in retina depingendæ. Nam cum oculus eſt in *eo* prope punctum F, ſed inter F & ſpeculum, radii A*o*, *ae* nimis inclinati in oculum ingrediuntur. Radii autem nimis inclinati in oculum intrantes apti non ſunt ad eum finem, ut in oculi fundo concurrant, & quemadmodum ad diſtinctam imaginem conſequendam neceſſarium eſt, punctum B in uno retinæ puncto, ut & alia objecti puncta in aliis diſtinctis punctis depingant. Siquidem oculi humores ita comparati ſunt, ut ex radiis ab uno objecti puncto manantibus eos tantum ope refractionis in retina colligant, qui aut a ſe viciſſim deflectunt in objectis vicinis, aut paralleli ſunt in remotiſſimis, aut ad ſummum inter ſe parum inclinati ſunt, & a parallelis parum differunt. De quo tamen infra enucleatius. Si vero oculus ſit quidem prope F, ſed ultra ut in *nr*, tunc quia imago objecti depingitur in F, perinde eſt ac ſi objectum videndum ſit in F. Oculus autem nimis objecto vicinus illud aut non videt, aut videt ſolum obſcure & confuſe. Cujus phœnomeni hæc altera ratio poteſt afferri. Cum ex altera parte quantitas ab alio ad alium ſtatum tranſire non poſſit, niſi fiat infinite magna aut parva, ut docuimus tom. II. phyſ. gen. §. 434., & ex altera in acceſſu ad F imagines augeantur, atque tranſacto F ex rectis inverſæ appareant, neceſſe eſt, ut in puncto F in infinitum creſcant. Imagines autem in infinitum creſcentes ob nimiam lucis diſperſionem primum obſcurentur, & deinceps diſpareant. Sed etiam de hoc alibi accuratius.

41. Sed antequam in explicatione phœnomenorum procedam, alia ſunt exponenda experimenta, quæ feci. Qua in re primum adverto experimenta ſpeculis rotundis & vitreis inſtituta id habere incommodi, quod ipſorum effectus non ſolum oriuntur a duplici reflexione, altera in ſuperficie anterio-

ri rotunda, altera in interiori plana, verum etiam a duplici refractione lucis, dum ab aere in vitrum ingreditur, & pervenit uſque ad ſuperficiem metallicam, & dum ab ea repulſa rurſus a vitro in aerem tranſmittit. Quamobrem ut aliquid certius definirem, me converti ad ſpecula metallica, aut alius opacæ materiæ, in quibus certum eſt eſſe unam in ſuperficie reflexionem. Sumpſi ſpeculum concavum diametri pol. 4. lin. 4. fere, ex metallo lucidiſſimum ac politiſſimum, quali utimur in teleſcopio catoptrico neutoniano; ex foco, in quo radii ſolares in ipſum recta incidentes colliguntur, quique eſt ad diſtantiam pol. 8. lin. 7. a ſpeculi centro, collegi diametrum ſphæræ, cujus eſt portio, utpote dicta diſtantia quadruplo majorem, eſſe 34. pol., & 4. lin., ideſt ped. 2. pol. 10. lin. 4. Ante ipſum in ſitu ad horizontem perpendiculari locatam poſui clavem in diſtantia a ſpeculo, quæ foret minor dicta 8. pol., & 7. lin. cumque primum poſt plura tentamina unam tantum eamque claram, & directam imaginem clavis vidiſſem, tandem ſæpius claudendo debiliorem oculum, & aperiendo mihi contigit duas videre inter ſe parum diſtantes, & aliqua ex parte confuſas, alteram clariorem & verſus oculum ſiniſtrum, quam ſolo dextro fortiore videbam, alteram obſcuriorem verſus oculum dextrum, & aliquanto altiorem, quam ſolo oculo ſiniſtro; adeo ut ſi clauderem ſiniſtrum, ſolam primam aſpicerem; ſi dextrum, ſolam ſecundam. 2. Si me ſimul cum clavi collocabam in diſtantia majori dicta pol. 8. lin. 4. in eo ſitu, in quo objecta inverſa videntur, tunc ſtans fere in axe cum clavi erecta paulo verſus ſiniſtram, duas imagines clavis inverſæ videbam in ſpeculo ſine ulla difficultate; alteram prope oram ſiniſtram ſpeculi, & verſus oculum ſiniſtrum, alteram aliquanto obſcuriorem prope oram ſpeculi dextram, & verſus oculum dextrum; primam intuebar ſolo dextro, ſecundam ſolo ſiniſtro, adeo ut ſi clauderem ſiniſtrum, ſola prima appareret, ſi dextrum, ſola ſecunda. Si clavem aliquantum retrahebam verſus ſiniſtram, imago viſa oculo dextro a ſiniſtra ſpeculi verſus medium procedebat, altera viſa ſiniſtro ſe intra ſpeculum verſus dexterum latus inſinuabat, & abſcondebatur, adeo ut imago in medio ſpeculo ſolo oculo dextro cerneretur, quia ſi claudebam ſiniſtrum, eam intuebar, ſi dextrum, nihil prorſus. Idem penitus uſuveniebat in imagine viſa oculo ſiniſtro, ſi clavem retrahebam verſus

dextram. Si vero cooperiebam ſpeculum verſus latus ſiniſtrum, primo diſparebat imago illi vicina, quæ oculo dextro conſpicitur; ſi corpus operiens ducebam ſupra ſpeculum verſus latus ſive oram dextram, tunc diſparebat imago illi reſpondens, & oculo ſiniſtro viſa.

42. Quamvis autem, cum objectum & oculus ſunt fere in axe & in eo ſitu, in quo imago recta videri debet, binæ imagines obſervari non poſſint, niſi aliquo artificio aut preſſionis oculi ſiniſtri, ope digiti, aut illum claudendo & aperiendo, quæ in viſione quoque directa objectum aliquando duplicant, tamen hac altera ratione obtinui, ut binas ſine ulla difficultate intuerer. Ad dicti ſpeculi ad horizontem perpendicularis latus dextrum in ſitu valde obliquo collocavi clavem in diſtantia 5. aut *6.* pollicum, meos oculos valde prope admovi ad ſpeculi latus ſiniſtrum, ibique vidi duas clavis imagines, alteram valde claram prope oram dextri lateris ſolo oculo dextro, qui eidem lateri propior erat, alteram parum diſtantem & valde obſcuram, laterique, & oculo ſiniſtro propiorem ſolo oculo ſiniſtro, ut claudendis alternatim oculis comperiebam. Si incipiendo a ſiniſtro latere, & oculo corpus opacum ſupra ſpeculi ſuperficiem dextram verſus oculum ducebam, primum diſparebat obſcurior oculi ſiniſtri imago, deinde clarior dextri.

43. Si objectum ſtatuebam ad duorum, trium, & amplius pedum diſtantiam, & oculum ad exiguam, quo in eventu ſemper objectum vidi in ſitu recto, numquam videre potui duas objecti imagines, etſi me in ſitu valde obliquo collocarem. Cujus phœnomeni certam perſpexi rationem. Nam in quadam ſpeculi obliquitate ita videbam imaginem clavis & corporis etiam latioris ſolo oculo dextro, ut ſi clauderem ſiniſtrum, æqualiter eam viderem; ſi dextrum, non cernerem, imo neque magnam feneſtram ſex & amplius pedes diſtantem. Si clauſo dextro ita invertebam ſpeculum ut clavem cernerem atque feneſtram, quod conſequi non poteram, niſi converſione ſpeculi per arcum plurium graduum, tunc clauſo ſiniſtro & aperto dextro nec clavem nec feneſtram videbam. Ex quo apparet illam cavam ſphæræ diametri 34. pol. & 4. lin. portionem diametri pol. 4. lin. 4., qualis erat meum ſpeculum concavum, non fuiſſe idoneam ad recipiendos ab objecto tam remoto radios, quos ſervata catoptricæ lege æqualitatis inter an-

angulos incidentiæ, & reflexionis, ad utrumque oculum refle- ćteret. Unde ſequitur, ſi ingentem ſphæræ diametri majoris portionem habeamus, futurum, ut binas objećti quoque remo- ti imagines intueamur.

44. Ut experimenta inſtituerem ſpeculis convexis, ſumpſi pyxidem ligneam nigram cum operculo rotundo, polito, & lucenti, parum convexo, & diametri pollicum 2. lin. 8; 1 : 2. facem accenſam poſui ad ſiniſtrum latus ipſius & oculos ad dextrum ita ut ſiniſter oculus propior foret ſiniſtræ ſpeculi. Continuo vidi unam tantum in ſpeculo imaginem face mino- rem, ſæpius clauſo ſiniſtro debiliori, & ſtatim aperto tandem cœpi videre duas faces diſtantes, alteram clariorem, & oculo ſiniſtro propiorem, alteram languidiorem, & propiorem dex- tro: clauſo ſiniſtro denuo apparebat ſola clarior & ſiniſtro pro- pior; rurſus aperto ſiniſtro duæ, ut prius, videbantur; clauſo dextro diſparebat fortior, & ab eo longius diſtans, & reſta- bat ſola languidior, & ipſi propior. Cum aliquando perge- rem duas intueri duobus oculis imagines, languidior repente ſe ſubducebat; tunc clauſo ſiniſtro, & continuo aperto duæ redibant imagines. Illud etiam eſt dignum, quod animadver- tatur, in apertura oculi ſiniſtri initio per breve tempus duas videri imagines, ſed mox languidiorem magna celeritate for- tiorem verſus accurrere, & cum ea deinde confundi. Si in hiſce experimentis inſtituendis oculos conſpicillis armabam, eaſdem duas imagines obſervabam, ſed clariores interque ſe magis diſiunćtas. Ut obſervarem a qua ſpeculi parte fieret reflexio radiorum ad ſingulos oculos, initio capto a latere ſiniſtro, & propiori pariter oculo lævo, dućtoque paulatim corpore operiente verſus latus & oculum dextrum, primo evaneſcebat imago oculi ſiniſtri, reſtabatque dextri, adeo ut dextro clauſo nullam viderem: promoto corpore diſparebat quoque imago dextri, donec eodem dextrum verſus latus ad- huc promoto, imago ſiniſtri rurſus appareret, & continuata promotione dextri quoque rediret. Ex quo colligitur, radios pertinentes ad oculum ſiniſtrum reflećti a parte ſpeculi, quæ ſit propior ſiniſtro lateri, & oculo; radios autem ad dextrum regeri a parte ſpeculi, quæ ſit remotior a latere ſiniſtro, & oculo dextro propior. Si facem ponebam ad dextrum ſpeculi latus, & oculos ad ſiniſtrum, eadem omnia, ſed in contrario ſitu contingebant; quemadmodum & uſuveniebant, ſi pro fa-

ce objectum uſurpabam opacum. Quod attinet ad alios, valde paucos offendi, qui has binas imagines viderent. Multi tamen fatebantur, ſe, cum primum aperirent oculos, breviſſimo temporis ſpatio videre hanc alteram imaginem, quæ magna celeritate ad alteram oculo fortiore conſpectam accurrebat, & cum illa confundebatur, ut mihi quoque uſu non raro veniſſe ſupra notavi.

45. Hac de cauſa nondum his contentus experimentis rem hujuſmodi tot in partes verſavi, ut tandem aliquando conſtantem, eamque ab oculi preſſione debilioris minime pendentem, obtinerem duarum viſionem imaginum non ſolum mihi, ſed etiam omnibus aliis, iis quoque, qui binas in ſuperiori experimento videre non potuerant. Poſui clavem horizonti ad perpendiculum inſiſtentem ad latus ſiniſtrum ſpeculi convexi ſimiliter erecti in ſitu valde obliquo, ideoque multo magis, quam in præcedenti experimento; me ad latus dextrum in ſitu pariter valde obliquo collocavi, eumque ſitum elegi, in quo imaginem ſpeculi utroque oculo viderem, quod colligebam ex eo quia nunc unum, nunc alterum oculum claudendo, ſemper imaginem clavis intuebar. In eo ſitu poſt pauca tentamina majoris aut minoris inclinationis oculorum ad ſpeculum duas imagines clavis, alteram clariorem, & lateri ſpeculi atque oculo ſiniſtro propiorem videbam ſolum oculo dextro, quia ſi hunc clauderem, eadem continuo diſparebat; alteram obſcuram & propiorem oculo & lateri dextro cernebam ſolo ſiniſtro; id quod ſimili experimento comprobabam. Quod ſi clavem huc illuc ducebam, imagines quoque motum clavis ſequebantur, ſemper tamen inter ſe plus, vel minus diſtantes. Si ſpeculi ſuperficiem aliquo corpore cooperiebam incipiendo a latere & oculo ſiniſtro, & corpus ducendo verſus dextrum, idem uſuveniebat, quod in ſuperiori experimento, in quo ad binas videndas imagines quadam oculi preſſione, quæ præcederet, opus fuit.

46. Plures vero duabus utroque oculo, & unam uno numquam videre potui in hujuſmodi ſpeculis concavis aut convexis, quæ ex metallo aut alia materia opaca confecta fuerint. Unde cum Graveſſandus §. 3333. Elem. phy. hæc ſcribat de reflexione ope ſpeculi cavi *ſi oculus detur in puncto, in quo radii reflexi pertinentes ad diverſa curvæ crura ſeſe mutuo interſecant, duplex aut triplex dari poteſt objecti apparentia, ſed hoc*

hoc contingere non poteſt, ſi ſpeculum ex nimium exigua ſphæræ portione efficiatur; ajo me neſcire primum, an haſce duas, aut tres imagines ipſe viderit, an ex ſua cauſticæ curvæ theoria collegerit videri oportere: deinde ſi vidit, utrum duobus oculis, an uno tantum, quia ſi non uno, ſed duobus obſervavit, non efficit ad diverſa hujus curvæ puncta, & crura referri radios, qui ab uno objecti puncto profecti ad unum oculum reflectuntur, ſed ſolum eos, qui ad utrumque. Tum an uſus fuerit ſpeculis vitreis ex parte poſtica hydrargiro indutis, an vero metallicis, quia §. 3304. ſolum poſtulat dari alterutrum ſpeculorum genus; & aliunde ſi primis eſt uſus, nihil certi colligi poſſe ſupra docuimus, & conſtat etiam ex hoc experimento. Me & facem collocavi in magna a meo ſpeculo cavo vitreo diſtantia in axe: vidique duas ante ſpeculum imagines facis inverſas, quas certum eſt reflecti a ſuperficie anteriori cava, & duas retro valde diſtantes rectas, quas ab interna plana; cujus duplicis rectæ ratio ex eo petenda eſt, quod antequam radii ab ea reflexi ad duos oculos perveniant, refringuntur in exitu a cava ſuperficie, & ob rationes allatas, atque ob experimenta, quæ in lentibus inſtituta infra narrabuntur, idonei fiunt ad duas diſtantes imagines in utroque oculo quibuſdam in circumſtantiis depingendas. Et revera unam tantum in medio rectam aliquando videbam. Meum autem ſpeculum cavum metallicum non eſſe nimis exiguam ſphæræ portionem ex eo colligo, quod ipſe §. 3309 ponit ſuum ſpeculum habere chordam 15. pol., & ſphæram, cujus eſt portio, habere radium 36. pol. meum autem habet chordam pol. 4. lin. 4., & ſphæra, cujus eſt portio, habet radium pol. 17. lin. 2.

47. Quibus ſumma cum diligentia & ſexcenties obſervatis non ſolum a me, ſed etiam a quamplurimis in hiſce rebus verſatis, qui meis experimentis adfuerunt & præfuerunt, & preſertim a Joanne Baptiſta Suardo Comite ob præclaros de rebus ad matheſim pertinentibus libros in republica literaria celebri; a nobili viro Aloyſio Chizzola matheſeos, & phyſicæ ſtudiis addictiſſimo; a Franciſco Cagiada docto geometricæ & hydroſtaticæ profeſſore, & a duobus eximie indolis adoleſcentibus Joanne Baptiſta Guadagni, & Joanne Maria Carminati Cl. R. philoſophiæ lectore, utroque in rebus ad phyſicam atque ad analyſim recentiorum pertinentibus apprime verſatis; his

his, inquam, ajo penitus ſatisfieri præcipuis Alemberti difficultatibus. Re etenim vera, cum radii ad oculum utrumque reflexi ad loca valde inter ſe diſtantia concurrunt, experientia docet, contra quam is affirmat, nixus experimentis non ea, quæ neceſſaria foret, diligentia inſtitutis, duas imagines ejuſdem objecti alteram altero oculo videri. Siquidem ex radiis ab eodem objecti puncto prodeuntibus illi, qui ad oculum dextrum contendunt ab alia ſpeculi concavi, aut convexi parte reflecti debent, ab alia qui ad ſiniſtrum, ut nempe ſinguli faciant angulum reflexionis æqualem angulo incidentiæ, quemadmodum facere debent. Rurſus in objecto remoto radii concurrunt non ultra ſpeculum concavum, ſed citra in duobus punctis aliquantum diſtantibus, quæ ſint oculo propiora quam ſpeculum. Ergo eorum diſtantia ratione habita tum oculorum, quibus ſunt propiora, tum ſuperficiei ſpeculi, in qua ut plurimum apparent inverſæ imagines perinde ac ſi in ea forent, non exigua debet videri. Mirum igitur non eſt, ſi ſemper duæ videantur, altera oculo dextro, altera ſiniſtro. Cum vero directæ apparent aut in ſpeculo convexo in quacumque oculi & objecti ab eodem diſtantia, aut in concavo, cum aut objectum eſt ſpeculo proximum, aut ſi remotum, tamen oculus prope eſt, tunc magna objecti, & oculi obliquitate obtinetur ea duarum imaginum diſtantia, quæ neceſſaria eſt, ut altera altero oculo in diverſis locis conſpiciatur, atque idcirco tamquam binæ repræſententur. Quod ſi in aliis ſupra expoſitis eventibus una tantum apparet, id non pugnat cum Barrovii theoria, propterea quod tres ſunt cauſæ, quæ id poſtulant, quin aliquid præfata theoria inde capiat detrimenti. Prima eſt in iis eventibus, in quibus uno tantum oculo imaginem videri obſervavimus, quod theoriæ conſentaneum eſt, quia propter alterius oculi ab altero non mediocrem diſtantiam fit, ut radii ab objecto profecti ad unum tantum oculum reflectantur. Et revera cum in ſpeculo concavo adhibetur accenſa fax, viſibile lumen facis reflexum ad unum tantum oculum ab aliis in me, a me in aliis obſervatum eſt. Quare fallitur Alembertus, dum id falſum eſſe univerſe ſtatuit (n. 36.). In his autem eventibus ſemper, & ab omnibus una tantum videtur, ſi ſpeculum ſit confectum ex opaca materia.

48. Altera cauſa eſt in iis aliis, in quibus imago videri de-

debet utroque oculo in eodem loco, ut concedit ipſe Alembertus (n. 35.) utque accidit cum objectum eſt in axe prope ſpeculum concavum, & oculi quoque prope eumdem axem. Quo pariter in eventu ſemper & ab omnibus una imago videtur, ut pluribus experimentis compertum feci.

49. Tertia vero cauſa locum habet in iis eventibus, in quibus imagines parum inter ipſas diſtant, & altera eſt valde obſcurior, quæ oculo debiliori videtur, atque repetitur ab ea doctrina, quam ſupra tradidimus (n. 27.) videndi objectum duobus oculis in ſola directione radiorum, qui ad oculum fortiorem contendunt. Hanc ob cauſam a maxima hominum parte hæ binæ imagines non videntur; ab iis vero, quibus apparent, non id ſtatim & ſine difficultate obtinetur, ſed aliquo artificio eſt opus, ut preſſione oculi vel digito, vel claudendo, & ſtatim aperiendo, qua oculi pauliſper ab eo diſtorquentur ſitu, quem ob habitum acquiſitum affectant, collineandi in idem objecti punctum, & cum obtinetur, perſæpe fit ut ſolum a principio eas videant, & ſtatim debiliorem ad fortiorem accurrere obſervent; in quo imaginis debilioris ad fortiorem acceſſu mihi videre videor directionem oculi debilioris ad directionem fortioris accurrere, & cum ea confundi, ac miſceri ad unius imaginis repræſentationem. Quæ cum ita ſint, nemo non videt hanc maximam Alemberti difficultatem a duabus imaginibus repetitam nullo pacto labefactare theoriam Barrovii, nec opticæ principia circa viſionem reflexam.

50. Reſtat una Barrovii difficultas, repetita ex eo, quod cum objectum eſt citra focum ſpeculi concavi in majori, quam ſit focus, a ſpeculo diſtantia, oculus prope ſpeculum poſitus videt objectum ultra ſpeculum, tametſi radii ante ſive citra ſpeculum colligantur poſt hominis caput. Ad quam primum adverto repetitis ſæpius experimentis mihi compertum factum fuiſſe, cum oculi prope ſpeculum ſunt, ſatis clare intueri imaginem objecti in ſitu recto ultra ſpeculum, & in eo majori a ſpeculo diſtantia, quo objectum longius a ſpeculo abeſt, ut etiam monui n. 38., cum vero oculos ab eodem removeo, & ad curvam cauſticam, ſive ad locum, in quo radii colliguntur, propius admoveo, rectam objecti imaginem obſcuriorem fieri atque etiam majorem, adeo ut in aliqua ſenſili ſed exigua ab eodem diſtantia, poſtquam maxima facta eſt, omnino evaneſcat, itaque permaneam etiam in aliqua exigua ultra di-

ctum locum diſtantia, poſt quam rurſus apparet imago, ſed inverſa, & initio quidem obſcura, & magna, paulatim vero oculos removendo clarior fit, & minor, donec fiat objecto æqualis, & oculos amplius removendo etiam minor. Ex hoc primum colligo adverſus Alemberti reſponſionem (n. 34.) radios a ſpeculo ita reflexos, ut ſint inter ſe inclinati, non eſſe abſolute ineptos viſioni excitandæ, ſed ſolum ſi valde ſint inclinati. Qua enim de cauſa cum objectum ex. gr. eſt in B (*Fig.* 7.), & oculus propior ſpeculo A *a*, & remotior a puncto concurſus F radiorum reflexorum A M, *a m*, videt objectum, non autem cum eſt valde prope punctum F, niſi quia, cum radii ſunt parum inclinati, adhuc apti ſunt, ut poſt varias refractiones in diverſis retinæ punctis colligantur, qui a diverſis objecti punctis procedunt, & in iiſdem qui ab iiſdem, itaque viſionem efficiant; cum autem nimis ſunt inclinati, non item? Et ſane ſi ad id præſtandum apti ſunt paralleli, ut in radiis a ſole, & a ſtellis profectis uſuvenit, quid ni apti ſint ii, qui minimo intervallo abſunt a parallelis, quemadmodum ſunt radii A F, *a* F ob minimum inter ipſos intervallum A *a*, & magnum inter punctum concurſus F, & puncta A & *a*?

Qua vero de cauſa fiat, ut objectum ultra ſpeculum videatur in dicto intervallo; facile eſt afferre rationem, cur ultra ſpeculum, difficile autem, cur in dicto intervallo. Primum enim aperte colligitur ex habitu, quem anima acquiſivit videndi objecta tamquam ante oculos poſita, & in directione axium opticorum, qui ad oculum contendunt. Alterius ratio hæc fortaſſe eſt. Ratio cur anima in ſpeculo plano videt objectum ultra ſpeculum in diſtantia eo majori, quo major eſt objecti a ſpeculo diſtantia, non ſolum in eo poſita eſt, quod radii a ſingulis objecti punctis profecti in iis ultra ſpeculum colliguntur punctis, quæ n. 28. definivimus, ſed etiam in eo quod ita debilitati ad oculum perveniunt, ac ſi ab iiſdem punctis profecti fuiſſent. Hoc autem ſecundum in re, qua de agimus, locum habet. Nam quo punctum B longius diſtat a ſpeculo A *a*, eo magis fracti radii perveniunt ad oculum inter A *a* & F collocatum. Ergo hæc poteſt eſſe phœnomeni ratio. Verum hoc miſſo, de quo propter quaſdam rationes, quas hic ſilentio prætereo, certum judicium nunc proferre non auſim, certius in conſequentibus prolaturus, addo rationem, cur oculus

lus poſitus inter M*m*, & F punctum concurſus in nimis parvo ab F intervallo, imaginem objecti B aut non videt, aut valde obſcuram intuetur, eſſe eamdem ac rationem, cur aut nullo pacto, aut valde obſcure cernit objectum nimis vicinum, quia tunc perinde eſt ac ſi objectum B foret in F, ut etiam adverti n. 40; atque ex his omnibus concludo in Barrovii principio faciendam eſſe exceptionem eventus, in quo imago objecti ante ſpeculum depingitur, ſive radii infinite proximi ab objecto profecti, & a ſpeculo reflexi in punctis ante ſpeculum collocatis concurrunt, & oculus in minori, quam ſint imago, & puncta concurſus, diſtantia a ſpeculo collocatur.

CAPUT TERTIUM.

De opticæ principiis in viſione refracta.

51. QUoniam Alembertus eaſdem adverſus Barrovianum principium rationes in eventu refractionis contorſit, operæ pretium arbitror hic referre experimenta, quæ variis lentibus inſtitui. Accepi quinque lentes, tres convexo convexas, quartam plano convexam, quintam denique concavo convexam. Quatuor primarum, quæ ſunt portiones magnæ ſphæræ, focus radiorum ſolarium eſt in ſufficienti diſtantia inter quatuor, & ſeptem pollices, focus ultimæ in valde exigua, eo quod eſt valde convexa, & concava, & portio valde exiguæ ſphæræ. Cum eas ante facem accenſam ponebam in diſtantia a face minori, quam eſſet diſtantia foci, una tantum apparebat imago facis, & recta, ſive oculus poneretur in parva a lente diſtantia, ſive in magna; & dum oculus a lente removebatur; imago numquam confundebatur, nec diſparebat, ſed ſemper clare & diſtincte in ſitu recto conſpiciebatur. Quod valde notandum eſt; id enim indicat radios a ſingulis punctis objecti profectos, & lentem tranſmittentes, poſt lentem in locis inter oculos, & lentem interpoſitis a ſe viciſſim deflectere, & ſi producantur, concurrere ex altera parte, nempe inter objectum, & lentem, & ibidem facis viſionem excitare; itaque fieri, ut oculi ſemper ultra lentem videant facem, ut revera eſt, habita ratione oculorum, & in ſitu recto, quia nunquam radii ad oculum decuſſati perveniunt. Advertendum eſt etiam, quod una quidem imago ſemper duobus oculis obſervatur, cum eo alias obſervato diſcrimine, quod clau-

clauſo ſiniſtro debiliori imago conſpicitur in eodem loco, in quo videtur utroque oculo aperto; clauſo autem dextro, in alio, & prope latus lentis ſiniſtrum, & apertum oculum pariter ſiniſtrum, ſed radiis refractis diverſis; quod colligebam ex eo, quia ſi clauſo ſiniſtro ita me collocabam, ut dextro viderem imaginem facis proxime oram lentis ſiniſtram, tunc clauſo dextro & aperto ſiniſtro eam amplius non cernerem; & contra ſi clauſo dextro ita me collocabam ut ſiniſtro viderem facem prope oram dextram, clauſo ſiniſtro & aperto dextro eamdem amplius non intuerer.

52. Tum ſtatui facem in diſtantia a lente valde majori, quam ſit diſtantia foci ab eadem lente; tunc oculus ex altera parte collocatus in valde minori a lente, quam ſit focus radiorum ſolarium, diſtantia, videt unam tantum imaginem erectam facis, ſed unus tantum oculus, ut dexter, quia clauſo dextro, ſiniſtro aperto nihil video, & alium ſitum eligere debeo, ut aſpiciam ſiniſtro: quod cum accidit, ſi ſiniſtrum claudo, tunc dextero nihil intueor. Dum oculos paulatim removeo a lente, imago recta mirifice augetur, idque continuatur, donec in aliqua oculi a lente diſtantia imago confunditur primum, & deinceps evaneſcit, tuncque tota lens illuminata apparet. Quorum phœnomenorum eſt eadem ratio, ac ſimilium ſpeculi concavi, cum objectum ponitur in magna a ſpeculo diſtantia, & oculus primum in parva, & deinde removetur verſus punctum, in quo radii a dato objecti puncto profecti, & a ſpeculo reflexi colliguntur; nam ex natura curvæ cauſticæ per refractionem colligitur radios infinite proximos a dato objecti puncto manantes & per lentem refractos, ſi objectum valde diſtet a lente, ab hac egredi non deflectentes ſed inclinatos, & concurrere in puncto aliquo inter oculos & lentem poſito, quod magis diſtet a lente quam focus radiorum ſolarium, ideoque parallelorum, ſi objecti diſtantia finita ſit. Oculis longius a lente remotis, imago facis incipit rurſus apparere, ſed inverſa; & ſi verſus medium lentis apparet, unus tantum oculus videt aut dexter, aut ſiniſter pro ratione ſitus in quo reperiuntur; id quod claudendis alternatim oculis, ut in imagine recta feceram, comperio. Quod ſi in eo ſitu me colloco, ut oculo dextro videam inverſam imaginem prope ſiniſtram lentis oram, tunc ſi lens non ſit valde exigua, oculo ſiniſtro alteram conſpicio inverſam imaginem pro-

prope oram dextram; cujus rei certior fio, quia claudendo dextrum, diſparet imago lateris ſiniſtri, claudendo ſiniſtrum, imago dextri. Si lens ſit nimis exigua, videtur quidem una tantum imago, ſed unoquoque oculo, ut oculis alternatim claudendis comperio, & ad eam videndam alius pro alio oculo mihi ſitus eſt deligendus. Imo cum unam tantum obſervo, verſus alterum latus non video quidem facis imaginem, ſed internum magnum ſplendorem veluti facis abſconditæ, & per radios ſolum reflexos ad oculum pervenientis. Id quod etiam in ſpeculo concavo mihi uſuveniebat.

53. Ex quibus evidens colligitur ſolutio difficultatis Alemberti in anteceſſum propoſitæ. Nam primo duplex imago revera obſervatur in iis omnibus eventibus, quos modo notavi; deinde in iis, in quibus una tantum, vel ea videtur utroque oculo, ut colligitur ex alterna ipſorum clauſione, quod accidit, cum lens ſive utrimque concava aut convexa, aut alius formæ ponitur prope facem; & tunc ratio conſtat, cur appareat una tantum, jam in ſuperioribus explicata, & in eo poſita, quod ex altera parte exiguum eſt intervallum inter ſitum, in quo videtur oculo fortiori ut dextro, interque illum in quo ſiniſtro debiliori, & ex altera anima imaginem duobus oculis viſam refert ad eumdem ſitum, in quo clariorem obſervat oculo fortiori, itaque fit ut tamquam unam intueatur: vel ea videtur uno tantum oculo, quemadmodum uſuvenit, cum oculus eſt in parva a lente diſtantia, & objectum in magna, aut imago inverſa in medio lentis conſpicitur, tametſi falſum id putet Alembertus (n. 36.), qui in hoc negotio aliorum experimentis, aut fortaſſe aliquibus a ſe craſſa minerva inſtitutis nimium fidit; tuncque unius imaginis viſio pendet ex eo, quod qui radii profecti a ſingulis objecti punctis ad ſingula pariter puncta in oculo depingenda accommodati, per vitrum permeant & refringuntur, ii ad unum tantum oculum contendunt, & aut valde major ſphæræ portio, aut alius ejuſdem portionis ſitus poſtulatur ad tranſmittendos ſimiliter aptos radios, qui ad alterum oculum tendant. Quod in ipſoſmet oculos incurrit; nam his in eventibus non minus in refractione per lentes, quam in reflexione a ſpeculis (n. 43.) cum alii hæc experimenta tentabant, ſplendorem accenſæ facis obſervabam in unum tantum oculum incidere, cum in aliis, in quibus imago oculo videtur utroque, ſplendore facis utrum-

que

que pariter oculum illuminari viderem. Quibus cumulatiſſime ſatisfit propoſitæ ab Alemberto difficultati.

Verumtamen urgeri poteſt: in eventibus lentis poſitæ in parva a face diſtantia, & in quacumque ab oculo, aut poſitæ in magna a face, & in parva ab oculo, una tantum facis imago obſervatur. Nihilo tamen minus ſi principium Barrovii tenet, duplicem imaginem in diverſis locis a duobus oculis videri oportere Alemberti ratione conficitur. Quo hanc difficultatis partem luculentius refutarem, ſuſpicatus facis aut forficum, quibus interdum utebar, magnitudinem etiam a lentibus amplificatam cauſam eſſe, cur duæ rectæ imagines confundantur, ideoque appareat una, eadem tentavi experimenta ſubtili acu ad perpendiculum erecta, mihique contigit, ut duplicem in ſitu recto clare viderem, alteram clariorem oculo fortiori dextro, alteram debiliorem oculo debiliori ſiniſtro, non quidem ſemper, & ſine ullo conatu, ſed certe frequenter, & arte quadam adhibita, ea ferme ratione, qua duplicem vidi in eventu reflexionis a ſpeculo, cum objectum eſt illi vicinum, & prope axem (n. 41.). Deinde lentem collocavi in parva ab acu diſtantia, oculos vero in ſitu aliquantum obliquo, ita ut clauſo dextro fortiori acum ſiniſtro viderem prope oram lentis ſiniſtram oculo eidem propiorem; tum aperto etiam dextro duplex apparuit imago, altera verſus mediam lentem, altera prope oram ſiniſtram; poſtea clauſi ſiniſtrum, & continuo diſparuit imago, quæ medium lentis tenebat, eratque lateri, & oculo dextro propior; clauſi dextrum, & continuo propior lateri ſiniſtro diſparuit. Id quod toties uſuveniebat, quoties alternatim clauderem oculos. Cum lente ad planum oculorum obliqua duæ apparebant erectæ imagines acus, plus uno pollice diſtantes, ſi lentem ita vertebam, ut fieret a plano oculorum æquidiſtans, nihilominus duæ reſtabant imagines, ſed minus diſtantes. Aliis quoque eadem ſucceſſerunt, ſed non omnibus, nec mihi ſemper: contra quam uſuvenit, cum diſtantia lentis ab objecto, & ab oculo eſt hujuſmodi, ut duæ imagines inverſæ appareant. Siquidem illæ, & omnibus & ſemper apparent, ac tantum abeſt ut aliquo artificio ad eas videndas ſit opus, ut nulla ratione fieri queat, quo minus binæ duobus oculis conſpiciantur. Verumtamen cum poſt aliquod tempus acquiſiviſſem lentem magnam diametri pol. 5. & lin 4., cujuſque foci diſtantia foret 13. pol.

cum

cum 1 : 2, rationem inveni duplicis imaginis rectæ ſine ulla difficultate videndæ. Nam poſui forfices ad perpendiculum erectas ad duorum & amplius pedum diſtantiam, oculos vero ex altera parte ad diſtantiam uno pede minorem. Quo factum eſt, ut duplicatam & quidem rectam ſtatim & clare viderem, alteram oculo dextro propiorem lateri dextro lentis, alteram ſiniſtro lateri propiorem oculo ſiniſtro; quæ binæ imagines etiam aliis, quos adhibui, ſine difficultate apparuerunt.

Quibus allata in contrarium ratio penitus refutatur, & confirmantur ea, quæ in ſuperioribus de viſione reflexa diſſeruimus, Siquidem ex narratis experimentis colligitur, radios quidem, qui ad ſingulos oculos poſt refractionem aut reflexionem contendunt, in diverſis pro ſingulis oculis concurrere punctis, ibique ipſos per ſe repræſentare debere ſingulas pro ſingulis imagines, & re ipſa exhibere; ſi hæc puncta non parum diſtantia ſint, ut in magna lente vidimus uſuvenire; at ſi hæc parum diſtantia ſint, ut in exiguæ diametri lentibus accidit, ut plurimum imaginem oculi debilioris referri ad locum imaginis oculi fortioris, itaque fieri, ut una appareat; aliquo vero artificio & conatu, quo diſtorquetur debilior, ne in locum fortioris collineet, obtineri ut duæ duobus in locis diſtincte videantur.

54. Ita ſoluta Alemberti difficultate, quæ eſt refractioni cum reflexione communis, venio ad eas, quas adverſus ſolam refractionem contorquet. Nam articulo 13. hæc ſcribit: alterum vulgare experimentum favere videtur veterum Geometrarum principio ſaltem quod attinet ad refractionem in planis ſuperficiebus. Baculus in aquam uno ſui extremo oblique demerſus, & ex latere obſervatus, fractus apparet, parſque fracta eſſe videtur in eodem plano perpendiculari, in quo eſt pars extans. Quod efficit imaginem videri in catheto. Secundum Barrovii principium pars fracta apparere deberet in alio plano, ac illud eſt, in quo pars exterior reperitur. Articulo vero 12. cum retuliſſet experimentum Barrovii, qui in aqua ſuſpendit filum plumbo onuſtum in parte inferiori, atque ita certior factus eſt, filum eſſe perpendiculare tum quod attinet ad partem ſuperiorem extantem ex aqua tum quod ad partem demerſam inferiorem; hoc autem perfecto imaginem partis inferioris demerſæ, quam radiis refractis videbat, diſtincte percepit diſiunctam ab imagine ſuperioris extantis, quam radiis

diis

diis ab aquæ ſuperficiæ reflexis; deinde hæc literis conſignavit: Hæc partis extantis imago conſtanter eſt in perpendiculari. Ergo imago partis demerſæ ibi non eſt. Igitur, concludit Barrovius, objecta refractione viſa in perpendiculari non apparent. Legitima eſt hæc concluſio, ſi experientia cum vero conſentit; ſed experientiam adverſari ajo Barrovianæ ſententiæ. Revera ut duæ imagines diſtinctæ & ſeparatæ videantur neceſſe eſſe utramque non eſſe in eodem plano perpendiculari, quod per oculum & per objectum tranſeat. Quod ni ita foret, alteram altera tegeret, & experientia ut minimum eſſet valde incerta. Ergo poſita eadem accurata & vera, duæ imagines ſunt in diverſis planis. Sed imago partis reflexione viſæ conſtanter eſt in plano perpendiculari. Ergo altera nequaquam eſt in eodem. Igitur ſecundum hanc experientiam imago objecti refractione viſi, non eſt in plano perpendiculari. Rurſus ſecundum Barrovii principium ibi eſſe debet. Ergo hoc principium minime verum eſt. Ceterum hic pono experientiam eſſe accuratam, quia mihi eamdem comprobaturo maxime incerta viſa eſt, ut vehementer induci me ſentiam in eam opinionem, quod aberret a veritate. Cum aqua & filum quieta ſunt, duæ imagines permiſceri videntur, aut ſaltem altera ab altera abſcondi. Ita fit, ut in hoc eventu experientia nihil efficiat nec pro antiquorum principio, nec pro Barroviano.

Ita Alembertus, qui articulo 14. concludit cum agitur de planis refringentibus ſuperficiebus, a vero antiquorum principium, quod attinet ad ſenſum, non aberrare; ſed ſe dubitare addit, an cum eodem conſentiat in aliis eventibus, & præſertim cum agitur de curvis, & utrum in ſpeculis convexis imago objecti fuerit aliquando viſa extra ſpeculum, quemadmodum fieri debere aliquando in obliqua oculorum, & objecti poſitione ratione habita ſpeculi oſtendit, ſi verum ſit antiquorum principium, nunquam autem, ſi verum ſit Barrovianum.

Ut hanc rem extra omne dubium ponerem, ſic experimenta repetii. Ex filo ſuſpendi corpus aqua gravius, quod demerſi in cyathum aqua plenum, itaut idem corpus primum fundo inſideret, tum alterum fili extremum extra aquam poſitum ita traxi, ut filum in rectam lineam diſtenderetur, oblique tamen extra aquam exiret, verſus ſeptentrionem inclinatum, & in plano meridiano jaceret. Deinde meum oculum

dex-

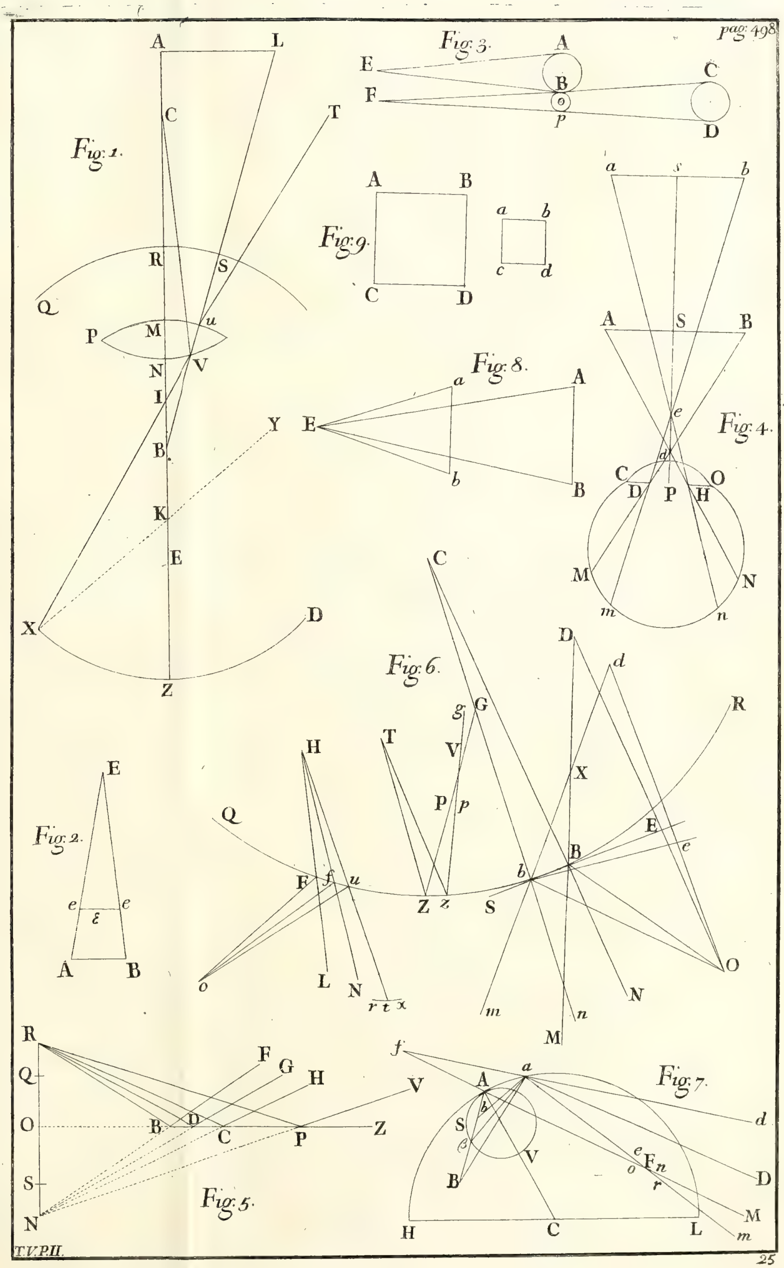
dextrum in æquatore collocavi, vidique filum extantem ſe, ubi incipit aqua, diſpeſcere in duo fila intra aquam deflectentia ab extanti, alterum verſus Boream, quorſum pars extans inclinatur, ſuboſcurius & valde tenue, quod eſt imago partis extantis reflexione viſæ faciens cum aquæ ſuperficie angulum ad ſenſum æqualem illi, quem pars extans cum eadem facit; alterum clarius, & craſſius verſus meridiem, quod eſt imago partis demerſæ refractione viſæ. Duo fila intra aquam viſa & filum extans, quantum oculis obſervari poteſt, non apparent in eodem plano perpendiculari. Quod hiſce experimentis confirmari poteſt.

55. Si filum diſtentum in eodem plano perpendiculari extremo ſuperiori ducatur uſque ad ſitum perpendicularem, duo fila intra aquam ad ſe viciſſim ſemper accedunt, & minorem angulum faciunt, donec in ſitu perpendiculari oculo, qui in æquatore quietus manſit, prorſus diſpareat viſio fili obſcurioris & ſubtilioris reflexione viſi, abſorpta a viſione clarioris & craſſioris refractione conſpecti. Tunc autem filum demerſum radiis refractis viſum non eſt in eodem plano perpendiculari, ſed aliquantum ab eo deflectit in contrariam oculi plagam. Ergo etiam antequam ad ſitum perpendicularem perveniret, ab eodem plano deflectebat ipſius viſio, quia ſimiliter in plano perpendiculari re ipſa reperiebatur. Viſio autem fili extantis reflexione viſi ſemper eſſe debebat in eodem plano perpendiculari, ut colligi poteſt ex iis, quæ n. 28. diſſeruimus. Si poſtquam filum pervenit ad ſitum perpendicularem, in eodem plano perpendiculari ducatur & inclinetur verſus meridiem; tunc duo fila intra aquam rurſus apparent, ſed reflexione viſum verſus meridiem, refractione verſus ſeptentrionem. Si filum in plano inclinato verſus oculum ducatur, a ſeptentrione meridiem verſus, pars reflexione intra aquam viſa declinat a filo extante verſus oculum & ſeptentrionem, pars refractione ab eodem deflectit in contrariam oculo plagam, & verſus meridiem, & poſtquam filum pervenit ad illud planum perpendiculare, quod per oculum & per filum tranſit, pars reflexione viſa utpote obſcurior, & tenuior, abſorbetur a parte craſſiori, & clariori refractione conſpecta, nec amplius videtur; ſed ſolum apparent filum extans, & filum intra aquam deflectens ab extante in contrariam oculi plagam. Inclinato filo verſus meridiem rurſus apparent duo

fila intra aquam ſola mutatione plagæ ſeptentrionalis & meridionalis. Si filum in plano declinante ab oculo ducatur a ſeptentrione verſus meridiem, eadem apparent phœnomena, niſi quod pars reflexione viſa declinat ab oculo, pars refractione verſus oculum propendet.

Ex quibus colligitur, primo falſum eſſe experimentum Barrovii; & revera ſi filum ita ſurſum traherem, ut corpus appenſum ex fundo elevarem, quo in eventu certum eſt illud aquæ ſuperficiei inſiſtere ad perpendiculum, duas intra aquam fili portiones, in quocumque loco ſtatueretur oculus, diſcernere non potuimus nec ego, nec alii, quos ad periculum faciendum adhibui. Unde conſtat, ex hoc experimento nihil poſſe colligi contra Barrovianum principium. Secundo colligitur, radios ex filo oblique demerſo, poſt refractionem ad oculum pervenientes, excitare imaginem partis demerſæ in alio plano ac illud perpendiculare, in quo ſunt pars extans, & partis extantis imago reflexione viſa. Quamvis autem in filo ob ipſius tenuitatem, ea deflexio parum ſenſibilis ſit, adeo ut cum filum eſt perpendiculare, partis demerſæ declinatio vix ſub ſenſus cadat, tamen ſi utamur virga craſſiori, & recta, niſi mei oculi & eorum, quos adhibui, differant ab oculis Alemberti, duo manifeſte vidimus dimidiam immergendo virgam ſive oblique, ſive perpendiculariter ſecundum meridianum oculo fortiori in æquatore collocato, partem demerſam breviorem extante, tametſi re ipſa altera alteri foret æqualis, & declinationem ejuſdem a plano perpendiculari, in quo eſt pars extans: quæ duo cum Barrovii principio mirifice congruunt. Hoc igitur experimento potius confirmatur allatum principium.

56. Quod pertinet ad ultimum eorum, quæ ex Alemberto retulimus, putabam me incidiſſe in experimentum Barrovianæ theoriæ prorſus contrarium. Nam uſus ſpeculo convexo ſimili illius, quod deſcripſi n. 44., ſed diametri valde majoris ad latus ipſius ſiniſtrum oculos valde oblique, & prope ſpeculi ſuperficiem collocavi, & clavem ad dextrum pariter valde oblique & in parva diſtantia; vidique duas clavis imagines, alteram oculo dextro intra ſpeculum clariorem, & oculo ſiniſtro propiorem; alteram vero ſiniſtro obſcuriorem, a prima longe diſtantem, non intra ſpeculum, ſed extra, pollice & amplius recedentem a latere dextro, & antror-



T.V.P.II.

trorſum ſe porrigentem. Verum phœnomeno attentius conſiderato in cognitionem veni, me ita diſtorſiſſe oculos, ut duas etiam pyxides, quæ ſpeculi vicem gerebant, viderem, alteram clariorem oculo dextro, alteram obſcuriorem ſiniſtro, a prima longius diſtantem, & antrorſum quoque ſe projicientem, & intra primam clariorem clavis imaginem, intra vero ſecundam obſcuriorem. Quod non adverſatur theoriæ, quæ vult, ut ſemper intra ſpeculum convexum imago videatur. Et revera cum unum tantum ſpeculum videbam, ſemper imaginem intra illud conſpexi, tametſi me & objectum collocarem in ſitu valde obliquo, & ſpeculis uterer etiam diametri octo & amplius pollicum.

CAPUT QUARTUM.

De aliis principiis tum in viſione reflexa, tum in refracta.

Caput hoc in ſequentem tomum rejicimus, auctore ipſo id concedente; nam & quæ adhuc dicta ſunt, intelligi per ſe ſatis poſſunt, & jam veremur, ne voluminis hujus magnitudo plus juſto creverit. Qua de cauſa eodem etiam rejicimus & Franciſci Mariæ Zanotti commentariolum de methodis in geometriam invectis, & egregium Hieronymi Saladini ſermonem de curvis lineis ſe mutuo oſculantibus, & opuſcula alia permulta.

ALOYSII GALVANI.

De Renibus, atque Ureteribus Volatilium.

ANatomicæ facultati pro munere noſtro, & voluntate addicti, ſæpe in volatilium ſectionibus elaboravimus, ac ſtudium præſertim in renes, atque ureteres contulimus. De his ergo hoc veſpere diſſeremus, eorumque hiſtoriam conficiemus accuratiorem, ut nobis quidem videtur, quam ab aliis hactenus fuerit unquam conſcripta. Primum de renibus.

Volatilium renes duo ſunt oblonga viſcera in abdomine contenta, hinc inde a ſpina dorſi locata, quæ ut quadrupedibus, ſic volatilibus data a natura fuerunt, ut urinam ſecernerent.

Ea ſub pulmonibus proxime conſpiciuntur, deorſum deinde utrinque a memorata ſpina feruntur, deſinuntque in amplam, atque oblongam ilii oſſis cavitatem, in qua non quidem toti, ut Harveus, aliique volunt, ſed præcipua dumtaxat ex parte reconduntur.

Figuram habent diverſam, pro diverſa volatilium ſpecie. Nam in aliis renes agni æmulantur, ut Borikius de aquila narrat, in aliis caninam linguam, ut in anate nos vidimus. In plerisque tamen volatilibus, maximeque granivoris, quamvis unum, idemque corpus ſint, in tres tamen lobos ab auctoribus dividi ſolent. At diſtinguenda eſt in renibus, meo quidem judicio, pars anterior, quæ ventrem, & poſterior, quæ dorſum reſpicit. Nam renibus in parte anteriori inſpectis, eos non in tres tantum, ſed in quatuor lobos dividi clare conſpicitur, quorum primus ſub pulmonibus locatur, atque amygdalam ruditer refert, apicem habentem inferiora reſpicientem, baſim ſuperiora. Secundus oblongus eſt, planus, atque ad iliacam uſque arteriam pertinens. Tertius omnium minimus, rotundus, adhæret quodammodò ſecundo, atque baſim videtur in iliaca arteria habere. Quartus demum aliis major

eſt,

eſt, figuraque irregulari. Singulæ vero hæ lobulorum diviſiones maxime fiunt e foveis ſanguinea vaſa excipientibus, in renibus profunde inciſis. Iliacæ enim venæ primum lobum a ſecundo dividunt, arteria autem iliaca quartum a ſecundo, & tertio.

Quod ſi renes ex parte poſteriori ſpectentur, in duos dumtaxat lobos ſejunguntur, ſuperiorem, & inferiorem; parvum illum, hunc longe majorem. In ſuperiore quatuor profundæ ſectiones ad ejus interiorem marginem apparent, quæ a vertebris dorſi eruuntur; totidem, patentioreſque ſunt a lumbi vertebris in inferiore inſculptæ, atque aliæ, ſed obſcuriores.

Inferior hic, poſteriorque lobus ille eſt, qui latet in magna ilii oſſis cavitate, alter ſuperius conſiſtit.

Duplici membrana ſepiuntur renes, communi una, cellulari, in obeſis volatilibus pinguedine repleta, propria altera, tenui, pellucida. Utramque in renibus Struthii Godofredus deſcripſit; nos vero in omnibus, quæ ſecuimus, volatilibus, quæ multa ſane fuerunt, invenimus. Cum nudis oculis, tum lentibus adjutis præterea inſpeximus, ſed nihil in utriſque peculiare.

Eductis vero membranis diligentius renum ſuperficiem ſpectavimus. Vidimus autem cerebri ſuperficiem ipſam quodammodo æmulari; nam ut illa, ita & hæc in plures parvos anfractus, lobuloſve dividitur, pleroſque oblongos, in ſe convolutos, magnitudine, & forma inæquales. Qui equidem non prominentes, ut in cerebro, ſed plani natura ſunt.

Renes volatilium alii e globulis carneis contextos eſſe opinantur, ut Harveus, alii glanduloſos faciunt, ut Godofredus, atque Wallisnerius, qui glandulas in racemos collectas in Struthio deſcribit. In hujus ſtructuræ diſquiſitionem maxime in gallinaceis pullis, quippe qui magis præ manibus habentur, opus, laboreſque noſtros contulimus.

Atque primo venit in mentem experiri, quid fieret renibus maceratis. Sed nihil nobis peculiare ex maceratione innotuit, quamvis eam & ad multum tempus protraheremus, & diverſis liquoribus perficeremus, acutiſſimiſque lentibus maceratos renes inſpiceremus.

Nudis dumtaxat oculis per aquam fluitantes vidimus tenuiſſimos excretorios ductus, ſeu ureterum ramos, quorum deſcriptionem, cum de excretoriis ductibus ſermo erit, afferemus

mus. Aliam propterea inire viam conſtituimus, atque peculiare, aptiſſimumque, ſi quid judico, injectionis genus experiri.

Devinxi ergo ureteres vivente pullo (id quod in volatilibus acu filo inſtructo poſt anum profunde ex una parte ad alteram trajecto, indeque nodulo quidquid intra fili capita reperitur, arctiſſime devincto haud difficile, & abſque ulla ſectione obtinetur) ea ſpe ductus, ut cum vinculo urinæ cohiberetur ex ureteribus effluxus, urina ipſa alba in volatilibus, atque ad concreſcendum adeo apta, in minimis uſque excretoriis ductibus congeſta, atque concreta, quæſitam renum ſtructuram patefaceret. Paucis poſt diebus pullus periit; qui celer interitus in ſingulis, in quibus deinceps idem periculum cepimus, ſemper evenit.

Ejus cadavere diſſecto alba terreſtris materies conſpicitur, quæ omnes ferme partes coinquinat, atque membranas potiſſimum, inter quas præſertim pericardium, quod gypſeum evaſiſſe videtur, atque extima hepatis membrana.

Renes vix a naturali magnitudine recedunt, at lobos præſeferunt alba materie repletos, quam non eſt dubitandum, urinæ fuiſſe craſſiorem, ſolidioremque partem.

Renes ſic paratos lentibus inſpicimus, atque albam materiam cernimus, non in cavo, quod lobuli habeant, contineri, neque intra eorum ſubſtantiam effundi, ſed propriis vaſis coerceri, eiſque minimis, atque quamplurimis, quæ albæ lineolæ videntur, per lobulorum ſuperficiem reptantes: quæque eo ordine, propemodum miro, procedunt, ut a ſurculis, qui lobos ambiunt, emanent, atque ſuper lobos in orbem flexæ eoſdem complectantur; ea tamen ratione, ut in nonnullis lobulis in eorum medio inoſculentur, in aliis vero circa idem medium veluti deſinant; porro ex iiſdem ſurculis, ſanguineorum vaſorum truncos prodire, qui ramos inde ſibi propinquis lobulis huc, illucque mittant. Hæc extima, quaſi dicam, renum eſt ſtructura, viſu quidem jucundiſſima.

Intimam autem texturam proſecuti, atque renibus tum ſcalpello diverſimode ſectis, tum digitis blande apertis, acutiſque lentibus inſpectis, obſervavimus lobulos illos, anfractuſque, quos exterius conſpeximus, intus quoque propagari, nullaque ratione cavos videri, ſed inteſtinorum more in varias circumvolutiones reflexos, atque complicatos totam renum ſubſtantiam pervadere, atque una cum ſanguineis vaſis, nervis, ductu-

ctuliſque excretoriis cellularis ope junctis, renes conſtruere. Horum autem lobulorum anfractus, inceſſus, atque diſtributio clarius apparet, ſi digitis, ut diximus, ren apprehenſus blande aperiatur, quam ſi cultro ſecetur. Cultro enim lobulorum convexa ſuperficie ſecta, teres ipſorum figura deletur, digitis autem adhibitis ſervatur.

Sed ad alba vaſa, ſeu ad uriniferos ductus redeamus. Horum alios hac illac internos renum lobos, ut externos, circumambire intuiti fuimus, alios vero alias directiones habere; ſed ita inordinati erant, atque obſcuri, ut nihil de eorum origine, aut fine licuerit delibare.

At non idcirco omnis ſpes ſublata id poſſe aliquando detegi, nam cum id latere putaremus, quod pellucido humore ductus turgerent; non equidem contingere aliquando poſſe, deſperavimus, ut denſa illa, albidaque materia per injecta ureteribus vincula, replerentur, atque paterent.

Hinc idem periculum multis aliis in pullis, præſertimque in gallina, macie ferme confecta, aggreſſi, cernimus memorata alba renum vaſa, ex ea parte, qua e lobulorum interſtitiis prodibant, in renum ſubſtantiam in orbem pariter deſcendere, atque inde infra lobulos, in unum faſciculum collectos in communem quemdam truncum confluere, qui in alium majorem derivat, hic vero in ureterem. Communes hi trunci plurimi ſunt ita ut ſingulorum lobulorum alba vaſa excipiant diametro quidem latiores ad eam partem, in quam alba vaſa ingrediuntur, quam ad eam, qua ipſi in majores ramos inſeruntur. Hi autem ſunt veroſimiliter, quos & muneris, & majoris hujus cavitatis ratione pelves Valliſnerius in Struthio appellavit. Hi quoque, ut diximus, maceratione innoteſcunt.

En quo tendant excretorii lobulorum canaliculi; ſed quæ eorum origo? Utinam hanc obſervationes nobis aperuiſſent! ſed vix quidquam certi de hac re compertum habuimus.

Id nobis tantum obſervare licuit, minimos illos ductus, dum ad lobi medium, ut diximus, perveniunt, intimam lobi ſubſtantiam inflexos permeare; accedebat etiam, ut lobulis ſectis multa alba filamenta in eorum ſubſtantia apparerent, ut excretorios ductulos ingredi in lobulos facile intelligas.

Sæpius tamen diverſis renum ſectionibus inſtitutis vidimus nonnullis in lobis punctum rubrum circa medium, quod ſanguinei vaſis orifitium eſſe opinati ſumus, a quo innumera prodire

dire diceres ex tenuiſſimis albis jam dictis vaſis. Hæc autem modo vix ultra punctum finem habebant, modo ad lobi uſque circumferentiam protendebantur, tamquam radii a centro ad peripheriam: in aliis autem rubrum vas juxta lobi longitudinem ducebatur, a quo eadem alba vaſa proficiſci judicares. Erant quidem eodem ordine diſtributa. Alba hæc vaſa, ſeu iſti excretorii ductuli interdum cum iis continui viſi ſunt nobis, quos lobi ſuperficiem reptare diximus.

Verum hæc ulteriores poſtulant diſquiſitiones, maxime in majoribus volatilibus inſtitutas, quæ ſi idipſum comprobaverint, quas natura in volatilium renibus paraverit ad urinæ ſecretionem vias, hactenus, quod ſciam, ignotas, compertum habebimus, atque aliquid inde luminis ipſi urinæ ſecretioni in quadrupedum renibus poterit forte affulgere. Interim quam cæteri nondum, quod audiverimus unquam, aut legerimus, detexere renum volatilium ſtructuram, eam ſeſe noſtræ induſtriæ, diligentiæque viſendam obtuliſſe ſatis nobis eſt.

Quas vero hactenus, Sodales optimi, propoſuimus vobis obſervationes pluries, atque in variis pullorum ſpeciebus ſuſcepimus, eaſque primo una cum ſolertiſſimo Bonacurſio, mox coram doctiſſimo Sodali noſtro Verratio, ejuſque ſapientiſſima Conjuge Laura Baſſia, quæ profecto eſt Academiæ, & civitatis noſtræ ſingulare ornamentum. Id autem monemus, non facile memorata alba vaſa apparere, cum propter nimiam urinæ copiam, quæ ea diſrumpit, tum propter ejuſdem defectum, unde non ſatis replentur, nec non denique propter nimiam ejus tenuitatem, ob quam vaſa, dum pellucent, oculorum aciem effugiunt; clarius tamen in volatilibus macilentioribus conſpici.

Sed jam ad emulgentia vaſa venio, quæ neminem ſatis diligenter vidimus deſcripſiſſe. Hæc diverſa directione, diverſoque ordine in volatilibus, ac in quadrupedibus ad renes pertinent.

Ipſorum progreſſus, atque diviſiones clarius ut aſſequeremur, apta materia ſiphonis ope ea replevimus, atque vidimus primo renum lobulos in ſuperficie eminentes fieri, cum natura, ut audiviſtis, ſint plani, deinde aortam arteriam deſcendentem, utrinque tenuem ramum ad angulum rectum mittere in primum renum lobum, cui ille prætenues impertit ſurculos.

Paulo

Paulo infra alium, diametro longe majorem, qui in ſecundum lobum inſeritur, quique dum ad medium ferme ejuſdem lobi pervenit, in duos alios ad acutum angulum dividitur, quorum alter ſuperiores renum partes, alter inferiores percurrit; deſcendere inde inter renes juxta ſpinam dorſi, atque, dum verſus finem ſecundi lobi properat, in iliacas abire, quæ renum ſuperficiem oblique tranſgrediendo extra ventrem promanant, atque in crurales immutantur. In itinere autem, quod ſuper renes faciunt iliacæ, poſtquam ſub ureteribus tranſierint, alios duos ſibi perpendiculares ramos germinare ſuperiorem unum, inferiorem alterum, quorum poſtremus in tres alios diſpergitur, qui pertinet ad ultimum lobum.

Vena autem cava deſcendens ſupra aortam quidem fertur, ſed non idem iter cum ea ducit, ut in quadrupedibus. Nam ad initium ferme primi lobi eam deſerit, atque multo citius, quam aorta, in iliacas dividitur, quæ juxta marginem primi lobi utrinque deſcendunt, eique tres ut plurimum ramos tribuunt. Dum autem verſus lobi apicem perveniunt, in tres abeunt ramos, quorum duo interni ad renes pertinent, atque emulgentes poſſunt appellari, cum magni ſint, & ad renes dumtaxat ſpectent, alter externus ex abdomine exiens cruralem venam conſtituit.

Emulgentium unus juxta marginem externum ſecundi lobi, alter per ejuſdem lobi ſuperficiem circa medium excurrit. Hic in rene dextero brevior videtur, dum enim ad iliacam arteriam pervenit, ſub eadem tranſit in renum ſubſtantiam. In rene autem ſiniſtro ſupra iliacam arteriam protenditur, ac bifariam ſtatim diviſus in totum poſtremum lobum diſtribuitur.

Hic autem intra renem deſcendit, atque ad ultimi lobi extremitatem dum pervenit, ita flectitur ut in alterum oſtendat eumque ſuperſcandat. Uterque vero ramus diverſos ſurculos, ramoſque hic illic in renis ſubſtantiam derivat. Sed pro diverſitate volatilium emulgentium venarum progreſſus, directiones, atque diviſiones haud parum variant.

Præter emulgentia vaſa, nervos quoque volatilium renes recipiunt. Sed horum alii, & quidem majores ac copioſiores, eorum ſubſtantiam trajiciunt, alii in eadem diſperguntur, ut ipſorum finis attingi non poſſit. Verum ad ureteres.

Sunt ureteres canales membranacei pellucidi, maxime in ea parte, qua renum ſuperficiem pervadunt, in quos, ut in

communes conglomeratarum glandularum ductus plures majores rami urinam exonerant, ex ſingulis innumeris, minimiſque ductulis excretoriis jam dictis acceptam, quam deinde in rectum advehunt inteſtinum.

Ad extremitatem primi lobi tenues oriuntur, deſcendunt inde intra renum ſubſtantiam latiores ſenſim facti, uſque ad angulum ramorum venæ cavæ, quos diximus emulgentes, ad quem cum pervenerint a rene exeunt, atque recto ferme tramite inter memoratos ramos, renum ſuperficiem tranſeunt: hanc ureterum partem pro pelvi Godofredus habuit: e renibus autem egreſſi reliquum abdominis iter conficiunt, atque curvam deſcribentes, in cloacam tandem, ſeu extremitatem recti inteſtini influunt, brevi peracta ſemiarcus circa eamdem inflexione.

In rectum vero inteſtinum oblique inſeruntur, non aliter, quam ureteres quadrupedum in veſicam. Inteſtini autem membranæ circa ureterum orificia laxiores ſunt, atque ceu valvulæ ea claudunt, ne inde urina regurgitet, mira naturæ providentia.

Tribus (ut animadvertimus, & quidem fortaſſe primi) tunicis ureteres conſtant. Extima rarior eſt, tenuvior, cellularis, atque reliquis abdominis viſceribus communis; hanc ſequitur craſſior alia, compactior, cellularis & ipſa, vaſis, inordinatiſque tenuiſſimis filamentis referta. Poſtrema demum aliis longe craſſior ejuſdem coloris eſt, ac muſcularis membrana inteſtinorum.

Hanc atramento maceravimus, tum ſuper vitra expanſam, contra liberum, ac patens lumen lentibus ſedulo inſpeximus. Ac non nulla tenuiſſima filamenta parallelo ordine diſpoſita juxta ureterum longitudinem producta obſervavimus, quæ muſculares eſſe fibras conjecimus.

Hanc membranam alia forte excipit ureteris cavum reſpiciens, ſed cum non ſatis hæc nobis ſe prodiderit, idcirco eam prætermiſimus. Interna ureterum ſuperficies ſulcos habet invicem parallelos juxta ureterum longitudinem ductos. Tranſverſæ rugæ in ea nullæ obſervantur, ut in ureteribus quadrupedum. Muco quidem non ſecus, atque in illis oblinitur, quo ab urinæ acrimonia tueatur. Jam vero fibræ muſculares cum in ureteribus adeſſe nobis viſæ fuerint, ita ſuſpicari cœpimus aliquo motu ureteres gaudere; rati non ſine conſilio ureteribus a natura muſculares fibras datas fuiſſe. Quod

Quod eo facilius arbitramur, quo nos minus latebat a nonnullis auctoribus traditum fuiſſe motu periſtaltico ureteres quadrupedum gaudere, quamvis, ut opinamur, eum nunquam forte conſpexerint.

Itaque vivis pullis, abdomine diſſecto, leniterque remotis inteſtinis, oculos in eorum ureteres illico contulimus. Enimvero ureteres peculiari quadam ratione moveri, non ſine voluptate, ut fit, cum nobis ea ſe ſe offerunt, quæ quærimus, præſertim nova, inſpeximus. Hunc motum una cum doctiſſimis viris, inter quos præſtantiſſimus Sodalis noſter Franciſcus Bibiena, diligenter ſpectavimus; vidimus illum ex progreſſivo, ſeu periſtaltico, & retrogrado, ſeu antiperiſtaltico componi; ire ſcilicet urinam per ureteres ad ani uſque confinia, redire mox ab ano renes verſus, donec ultro, citroque jactata apertis ureterum oſculis in recti inteſtini cavum urina efflueret. Hujuſmodi motus in ſingulis, quæ ſecuimus, volatilibus, quæ multa quidem fuere, atque generis diverſi, apparuit; non ſemper tamen, ut verum fateamur, æquabilis omnino, & ordinatus. At fieri poteſt ut cruciatibus, quibus in hoc periculo animalia vexantur, aereque externo, talia irritamenta nervis, muſcularibuſque ureterum fibris invehantur, ut motus ille ſuapte natura ordinatus perturbetur. Quemadmodum fieri etiam poteſt, ut periſtalticus ille dumtaxat juxta naturam ſit, antiperiſtalticus vero violentiis illis debeatur.

Ceterum neque inutilis antiperiſtalticus, ſi natura adeſſet, videretur. Eo enim motu urina in volatilibus, tam ad concreſcendum proclivis, ut, ſi vel parum quieſcat gypſea, ferme evadat, poſſet fluxilis ſervari, quaſſari veluti, atque fluidarum ſolidarumque partium miſcela perfici. Cui quidem concretioni ſolers natura adeo proſpexit, ut ureteres non in veſicam, qua volatilia deſtituit, ſed immediate in cloacam urinam exonerare voluerit, ut liberrime, & citiſſime e corpore eliminaretur. Cæterum ureterum motus addito ſtimulo reviviſcit, quo nihil clarius ad muſculares eorundem fibras oſtendendas.

Sed omnia jam paucis colligamus. Atque primo volatilium renes non ex glandulis in racemos diſpoſitis, aut ex globulis carneis, ut alii arbitrati ſunt, coaleſcere; ſed ex oblongis lobulis mire circumvolutis, atque invicem complicatis, potius quidem cum canaliculis, ſi pervii eſſent, quam cum folliculis comparandis.

Deinde qui ſingulos lobulos reptant, permeantque excretorii ductus, eos quamplurimos eſſe. Hos forte ex ſanguineis vaſis eiſque veroſimiliter arterioſis (ex arteriis enim ductus excretorii procedunt) emanare ratione non videri alienum.

Compertum autem illud eſt, ductulos hoſce excretorios in lobulorum ſubſtantia, & multos quidem reperiri, & ex eadem exeuntes ipſorum lobulorum ſuperficiem reptare; ſenſim deinde in faſciculum infra lobos colligi, atque in ureteris ramos deſinere. Unde lobuli eo conſilio a natura volatilium renibus dati viderentur, ut fulcimento, atque adminiculo eſſent excretoriis ductulis; atque ut plurimi in lobulis, fuſius, commodiuſve diſtributi, parvo ſpatio continerentur. Item volatilium renes ad conglomeratas glandulas, propter excretorios ductus omnes in unum confluentes, poſſe referri; ureteres præterea motum habere periſtalticum, atque forte etiam antiperiſtalticum.

Demum quamvis nec unam pelvim habeant, ea ratione conſtructam, ac renes quadrupedum, neque ſubſtantiam, ut illi, in corticalem, & tubularem diſtinctam, eorum tamen ductus excretorios in faſciculos colligi in ureterum ramis, ut in renibus quadrupedum in faſciculos colliguntur in renalibus papillis, atque quemadmodum papillæ in illis in communem cavum, ſeu in pelvim, ſic in ipſis in communem ureterem urinam deponere, atque propterea cum illis non modo propter uſum, qui idem in utriſque eſt, ſed propter aliquam etiam ſtructuræ ſimilitudinem convenire.

An vero obſervationes hæ noſtræ aliquod lumen afferre poſſint renum quadrupedum corticali ſubſtantiæ, aut fabricæ aliarum conglomeratarum glandularum, an ad Ruiſchianum ſyſtema fulciendum quidquam valeant, veſtrum eſto, Sodales optimi, judicium. Nos interim & eas iterum aggredi, & novas iis addere ſtudebimus, atque ſuſcepta de urinæ volatilium natura pericula proſequi, eaque vobis, favente Deo, proximo anno referre pollicemur.

FRAN-

EXPLICATIO FIGURARUM.

Fig. 1.

EXhibet renes in ſitu, ureteres, & vaſa emulgentia pulli gallinacei: Renis autem ſiniſtri ſubſtantia ablata eſt, ut vaſa emulgentia venoſa in ſitu conſpiciantur.

a. Vena Cava.
bb. Venæ Iliacæ.
cc. Quatuor rami venoſi emulgentes majores, utrinque duo.
d. Aorta deſcendens.
ee. Arteriæ Iliacæ.
ff. Ureteres.
gg. Rami Iliaci venoſi diſſecti, a quibus venæ crurales oriuntur.
hh. Duo aortæ rami, qui ſecundum renum lobum ingreſſi, aliquot ramos renum ſubſtantiæ impertiuntur.
ii. Rami venoſi emulgentes minores.
l. Inteſtinum rectum ſectum, ſupra podicem reflexum, ut ureterum inſertiones in eodem inſpici queant.
m. Arteria ſacra.
nn. Ejus rami ad ureteres ſpectantes.
1. Primus Lobus.
2. Secundus.
3. Tertius.
4. Quartus.

Fig. 2.

EXhibet diviſionem, atque diſtributionem cum vaſorum emulgentium, tum Ureterum in renibus Galli Gallinacei poſt injectionem obſervatam, quæ quamvis eadem in omnibus volatilibus non ſit, ab hac tamen haud longe differt.

a. Vena Cava deſcendens, quæ ramum utrinque unum KK lobulo renum ſuperiori tribuit.
bb. Venæ Iliacæ, a quibus tres ut plurimum rami diſcedunt ad ſuperiorem renum lobum pertinentes, qui in hac figura abſciſſi ſunt, quo ureterum diramatio clarius inſpici queat.
cc. Duo utrinque emulgentes rami, in quos Iliacæ venæ dividuntur: hique in inferiores renum lobos diſtribuuntur.
dd. Duo alii earumdem venarum rami, qui in crurales venas abeunt.
e. Aorta deſcendens.
ff. Tenues ejuſdem rami diſſecti ad ſuperiorem renum lobum ſpectantes.
gg. Rami alii majores, qui ſecundo renum lobo inſeruntur, atque renum ſubſtantiæ ſurculos aliquot emulgentes tribuunt, poſtea extra renes promanant; ii autem ſurculi delineari in hac figura non potuerunt, cum ſub Iliacis venis lateant.
hh. Arteriæ Iliacæ.
ii. Ureteres ſecti.
l. Arteria ſacra.
mm. Extrema ramorum ureterum, quæ ipſis ramis latiora ſunt, & in quæ deſinunt faſciculi ductulorum uriniferorum:
nn. Emulgentes rami ex venis dd ſurſum intra renes reflexi.
oo. Arteriæ crurales reſectæ.
pp. Propagines arteriæ l ad Ureteres pertinentes.

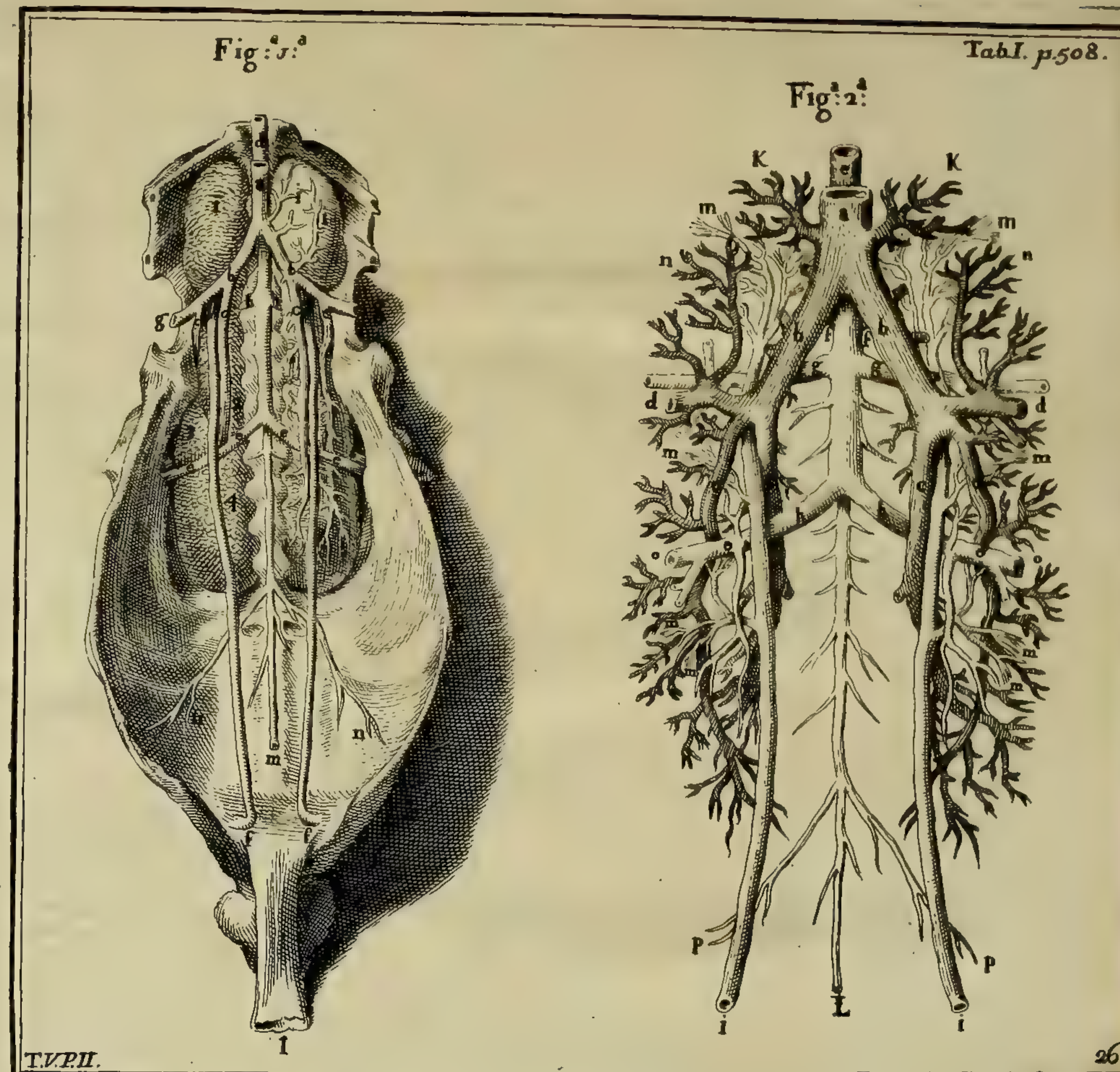


Fig. 3., & 4.

INdicant ſuperiorem renis lobum diſſectum, vitrea lente auctum, prout obſervatum fuit in pullo, cui dum viveret ureteres fuerunt vinculo devincti.

Fig. 3.

OStendit ejuſdem lobi ſuperficiem, in qua tum lobuli oblongi apparent, inteſtinorum more convoluti, tum ductuli albi uriniferi eoſdem lobulos ſuperſcandentes, & amplexantes. Lobuli tamen nonnihil eminentiores in figura delineati ſunt, quam re prodierint.

aa. Lobuli oblongi.

bb. Medium lobulorum, in quo uriniferi ductus ſe ſe mutuo offendunt, atque partim intra lobi ſubſtantiam reflectuntur, partim invicem inoſculantur.

Fig. 4.

VIſui offert internam ſubſtantiam ejuſdem lobi diſſecti.

aa. Lobi peripheria.

bb. Puncta rubra, e quibus oriri videntur albi ductuli uriniferi ea ratione, qua in figura ſunt delineati.

cc. Lineæ rubræ, e quibus ſimiles ductus prodire videntur.

dd. Duo ureteris rami ſimiles infundibuliformibus tubulis renum hominis, & plurimorum animalium quadrupedum, in quos deſinunt uriniferorum ductuum faſciculi.

ee. Ureteris rami.

Fig. 5.

OStendit aggregatum nonnullorum lobulorum ejuſdem renis, una cum propriis ductibus uriniferis lobulos reptantibus in faſciculos collectis, atque in ureteris ramos deſinentibus.

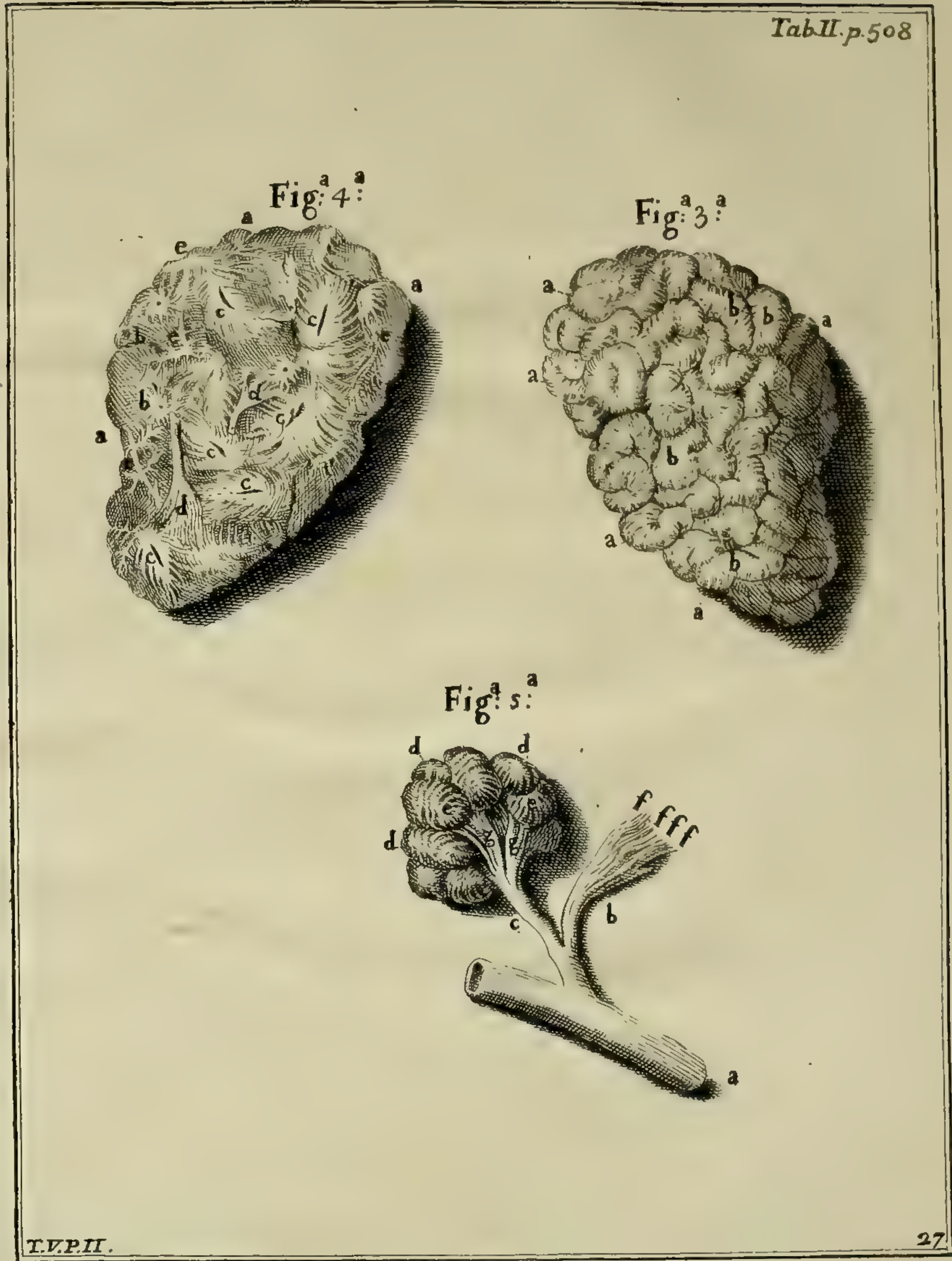
a. Portio ureteris ſecti.

b. Ejuſdem ramus, in cujus extremum latius confluunt uriniferi ductus fff ad varios diſſectos lobulos pertinentes.

c. Alter ureteris ramus, qui in duos dividitur gg., in quos colliguntur uriniferi ductuli ſpectantes ad omnes lobulos, in hac figura delineatos.

ddd. } Lobuli.
ee. }

fff. Uriniferi ductuli ad varios diſſectos lobulos pertinentes.



FRANCISCI MARIÆ ZANOTTI.

SERMO

Obſervationem novam exhibens, qua Mathematicus longe præſtantiſſimus DE LA LANDE mirabilem quamdam in Saturni motu inæqualitatem demonſtrat.

Neque libentius umquam ad dicendum acceſſi, Sodales optimi, quam hoc veſpere, neque alacrius; non enim dubito, quin mea oratio gratiſſima vobis futura ſit, quæ non mea, ſed mathematici erit cujuſdam ſummi, totaque Europa clariſſimi, collegæ noſtri DE LA LANDE. Is ſcriptum ad nos miſit, vel ad Academiam potius, quo novam quamdam ac prorſus mirabilem in Saturni converſionibus inæqualitatem oſtendit. Hanc ille negat per hypotheſim ullam, ut multas excuſſerit, explicare ſe potuiſſe; ne attractionem quidem ad id ſibi valuiſſe. Clariſſimi viri ſcriptum, ut conſuetudini noſtræ accommodarem, volui latinum facere. Sententias retinere ſtudui; utinam perſpicuitatem quoque, verborumque elegantiam retinere potuiſſem. Sed noſtis, quæ ſint interpretationum incommoda. Id ergo vobis, ut fieri per me potuit, latine redditum hoc veſpere recitabo. Ceterum ſi qui ipſum, ut eſt a Gallo homine miſſum, legere maluerint, nemini poteſtas non fiet. Ad rem venio. Vos gallum more noſtro loqui putabitis.

Cognitum perſpectumque plane eſt (idque jam inde a Kepleri temporibus) planetas primarios ſex circa ſolem per ellipticos orbes volvi, velocitate unumquemque inæquali, ut quæ major cuique in perihelio eſt, minor in aphelio. Neque alia in planetæ cujuſvis curſu ad longum deinde tempus cognita eſt inæqualitas, præter hanc unam, quæ etiam æquatio centri dicitur.

Poſt deinde cum attractionem communem, qua trahuntur planetæ inter ſe, anno circiter 1680 Nevtonus compererit, magnus minorum quarumdam inæqualitatum numerus in uno-

unoquoque planeta ſe prodidit, quas inæqualitates jamdudum ipſe per calculos definire ſtudui, & obſervationibus confirmare. (*Mem. de l' Ac. des Sc.* 1755. 1756. 1757.)

Viſus eſt autem hujuſmodi inæqualitates Saturnus maxime ex attractione Jovis recipere. Itaque Academia hæc regia anno 1748 præmium ei poſuit, ſi qui illarum explicationem proferret, & calculum. Atqui nihil eorum, quæ vel per id tempus, vel poſtea, in hoc argumento prodierunt, ſatis fuit aut ad Saturni loca erroreſque indicandos, aut ad tabulas accuratiores condendas. Mihi, cum explicare ipſe hæc vellem, contra accidit, ut aliud quoddam inæqualitatis genus, idque inter omnia, quotquot novimus, inſigne maxime, in Saturni motu repererim, quod neque Jovis, neque planetarum aliorum quatuor attractioni tribui omnino non poteſt.

Ut novæ hujus inæqualitatis modus cognoſcatur, ſeponendæ ſunt in primis inæqualitates aliæ duæ. Quod ut exſequar, ante omnia animadverto, inæqualitatem, quam planeta quiſque habet in ſua orbita, nihil officere, quo minus revolutionis mediæ tempus exactiſſime conſtitui poſſit, ſi planeta modo in diſtantiis mediis obſervetur. Id enim ſi fiat, motus medius, quæque inde ducitur, media revolutio, perinde ſe habent, ut ſi inæqualitas plane nulla eſſet. Ad hunc ergo modum revolutionem Saturni determinare volui.

Neque vero deeſt methodus determinandæ revolutionis mediæ in Saturno, nulla attrahentis Jovis ratione habita. Quæ methodus eo ſpectat, ut obſervatio ſemel atque iterum ineatur in eadem diſtantia, atque in Saturni poſitu plane ſimili. Etenim ſi in altera obſervatione idem erit planetarum amborum poſitus, eadem quoque attractionis ratio erit, eædemque ſequentur inæqualitates, ut in prima. Sic minime variabit revolutionis tempus. Sicque revolutio media in Saturno ſe prodet, ideſt tempus illud, quod Saturnus inſumit, ad idem cæli punctum rediens; neque attendendæ erunt inæqualitates, quas aut ellipticus motus affert, aut Jovis attractio.

Jam vero ſi hoc modo revolutiones mediæ in planetis aliis inquirantur, apparebunt in unoquoque ſeculo eædem. Sit nobis tellus, ut communis fert hypotheſis, planetæ loco. Inſumit hæc nunc etiam, ut alias, $365^d\ 5^h\ 48'\ \frac{3}{4}$ in revolutione una abſolvenda; neque in eo variatio apparet ulla, ſi modo recte attendantur inæqualitates illæ, quæ in converſionibus ſingulis redeunt. Inæ-

Inæqualitates quidem nonnullæ in planetis quibuſdam innotuerant, quæ ſeculares dictæ ſunt, quod in ſingula fere ſe produnt ſecula. Keplerus primum, tum qui illum ſecuti ſunt, Maraldus, Caſſinus, Hallejus, omnes denique Aſtronomi, quotcumque Saturni motum obſervationibus diligentiſſimis ſunt perſecuti, compertum habent, retardari illum in ſeculo quovis, ejuſque revolutionem videri jam longiorem, quam antea. Hanc ego rem tractavi alibi fuſius; (*Mem. de l' Ac. des Sc.* 1757) at quod nemo ante compererat: ne ſuſpicatus quidem fuerat: id me docuit obſervatio, revolutionem ſcilicet Saturni mediam pro variis obſervationis circumſtantiis variare, eamque variationem eſſe, quam nulla ex attractionibus, quas quidem novimus, poſſit efficere. Neque vero obſervationes, quæ id oſtendant, e longa ſeculorum ſerie petendæ ſunt. Illæ ſatis ſunt, quæ abhinc annis 75 ſunt habitæ, quæ ſi cum noſtris conferantur, plane demonſtrant Saturni revolutiones tota ipſa fere hebdomada inter ſe differre, nulla ex iis inæqualitatibus, quas adhuc novimus, huc pertinente, obſervationibuſque per id tempus initis, quo illæ mutare nihil poſſunt. Neque vero inæqualitatem hanc tantam, ut idem iterum dicam, cauſa ulla efficere poteſt, ex iis quidem, quas novimus.

Anni	*Errores Tabul. Hallei*	*Anomalia media* ♄	*Differentia inter longitudines* ♃, & ♄.
	min. *ſec.*	*Sig. grad.*	*Sig. grad.*
1686	— 3. 30	···· 8. 22	···· 1. 17
1701	— 8. 30	···· 3. 1	··· 11. 11
1745	— 3. 40	···· 8. 22	···· 1. 8
1760	— 21. 30	···· 3. 1	··· 11. 0

Anno 1686 atque anno 1745 ſuam Saturnus habuit mediam diſtantiam, ab Jove diſtans 45° circiter. Utroque pariter tempore Hallei tabulæ aberrarunt $3' \frac{1}{2}$ in defectu. Sic in illo annorum 59 ſpatio fuit Saturni motus $12^{gr.}\ 13'\ 21''$, $\frac{45}{100}$ in annos ſingulos item, uti ferebant tabulæ, quoniam Saturnus utroque in caſu eamdem habebat anomaliam (8. 22°), idemque

que orbitæ ſuæ punctum obſidebat. Quam rationem elementa alia, ut incerta ſint, mutare non poſſunt; & quoniam configuratio Saturni cum Jove eadem fere fuit (nempe $9^{gr.}$ circiter) ne unius quidem minuti error ex attractionis, ſi qua fuit, differentia, metui poteſt.

E contrario ex anno 1701 ad annum 1760 tabularum error increverat ad minuta 13, quo patet Saturni motum eodem 59 annorum ſpatio concitatiorem fuiſſe 13′ unius gradus, unde ſequitur revolutiones ejus diebus 6.½ breviores fuiſſe, quam fuerint ex anno 1686 ad annum 1745.

Neque vero id efficiunt obſervationes illæ tantum, quæ annis his quatuor ſunt habitæ; quas quidem non niſi ut exemplo ſint, depromſimus; at aliæ etiam omnes, quæcumque vel præcedunt, vel conſecuntur, quamvis nec uno in loco, & inſtrumentis longe diverſis ſint habitæ. Reditus Saturni omnes ad æquinoctium vernum numquam non mihi celeriores ſunt, quam ejuſdem reditus ad æquinoctium autumnale; idque per ſeculum totum. Obſervationes quoque, quas modo habui in Saturni oppoſitione, quæ accidit die 27 octobris, eamdem oſtenderunt accelerationem.

Ac mihi quidem id ita eſſe perſuaderi ab initio non poterat; nam quamvis obſervationes omnes, quotcumque ex annis 180 duxeram, apprime convenirent, eodemque, vel me nolente, redirent ſemper, adduci tamen vix poteram, ut rei aſſentirer, cujus rei cauſam in univerſa cæleſti phyſica reperirem nullam.

Vicit tandem obſervationum conſtantia; eſtque profecto in Saturno manifeſta inæqualitas, quæ ab Jovis aliorumve planetarum quatuor primariorum attractione nequaquam pendet. Cujus inæqualitatis cauſa longe alia eſt, in eademque Jovis diſtantia multo plus valet, multoque plus efficit, quam varietas quæque maxima ex illis, quæ in Saturni poſitionem cadunt. Cauſam hanc perquirere non aggrediar. Difficilis ſane inventu eſſe videtur. Quis ſcit, an generalis ea ſit, & conſtans, an una ex iis, quas caſus interdum affert, puta cometæ cujuſpiam attractionem? Obſervationes veterum nihil mihi hac in re luminis attulerunt; quæ in poſterum ſequentur, an perpetua res ſit, oſtendent, an variet, & quo modo; ac tum cauſa ſine dubio manifeſtabitur.

Vi-

Videtur ergo Saturnus, ut nunc res habet, planeta is eſſe, quem minime omnium novimus. Nihil credebatur theoriæ & calculis repugnare magis, quam Luna; cujus tamen inæqualitates omnes ſic jam ex una Solis attractione exprimuntur, ut non niſi unius aut ad ſummum duorum minutorum error ſit metuendus. Dicebantur autem inæqualitates Lunæ inſignes adeo multæque eſſe, quod Luna ipſa quamproxime a terra diſtet. Licet jam contra de Saturno dicere, inæqualitates in eum cadere adeo notabiles, quod is longiſſime omnium diſtet a Sole; quippe ignoramus, in remota adeo regione quid accidat. Sic lente incedit Saturnus, ut levi quavis de cauſa abduci queat. Et ſane ob tantam illam diſtantiam uſque adeo extenuatur vis Solis Saturnum in ſuo orbe continens, ut vinci ſe facile viribus aliis vel mediocribus patiatur aut ſibi modum imponi. Quæ vires in planetis aliis Soli propioribus vix quidquam valeant; planetæ hi quippe magno rapiuntur impetu, impreſſioneſque alias, ſi quæ forte incidant, quodammodo effugiunt: ſic eos ſuas ſervare orbitas centralis Solis vis cogit, longe præpotens.

Hactenus, ut interpretari ipſe potui, vir ille ſummus DE LA LANDE.

PAULLI FRISII CLERIC. REGUL. S. PAULLI
AD
FRANCISCUM MARIAM ZANOTTUM
EPISTOLA

Qua Operis de gravitatis legibus a ſe edendi formam rationemque deſcribit.

PAULLUS FRISIUS FRANCISCO M. ZANOTTO S. S. P. D.

PErcunctanti tibi iterum, Zanotte ſuaviſſime, quid id ſit, quod poſtremis hiſce annis elucubravi, quodque brevi in publicam prodibit lucem, longiori epiſtola volui reſpondere, ut ampliorem habeas proſpectum operis, & qua es in rebus mathematicis eruditione, ac perſpicacia, erga me vero amore, & familiaritate, monere poſſis quid emendari, aut addi debeat. Cum ergo in diſſertatione de figura Terræ ab ineunte uſque ætate de gravitate corporum cæpiſſem agere, & præcipuam hanc partem mixtæ, ut vocant, Matheſeos poſtmodum excoluiſſem in diſſertationibus aliis, quæ a Pariſienſi, & Berolinenſi Academia præmium retulerunt, quæ Luccæ editæ ſunt, & Commentariis his Bononienſibus inſertæ, & cum plura deinde adjunxiſſem, quæ nec omnino vulgaria, nec inelegantia videbantur; animum ſubiit integram gravitatis tractationem conſcribere, eamque ita a primis Mechanicæ principiis exordiri, ut unum opus plurium loco eſſet omnibus, qui ſolis Geometriæ, atque elementaris calculi, & ſectionum conicarum ſubſidiis ad ſummum Phyſicæ cæleſtis apicem perduci vellent. Sic enim habui: Galilæi, Hugenii, Torricelli &c. præclara inventa de motu gravium, pendulorum, & projectilium expediri poſſe paucioribus: Divinum Newtoni opus ab octoginta jam annis editum nonnulla habere, quæ corrigi, plura quæ addi, plura etiam quæ alia methodo, atque ordine, quo perſpicua ſint, tradi poſtulent: poſterioribus autem inventis Mathematicorum celeberrimorum adhuc aliquam lucem fortaſſe, & nitorem geometricum affundi poſſe.

Ope-

Operis ergo titulum poſui *De legibus gravitatis libri tres*: diviſionem librorum ex ipſa natura gravitatis duxi. Nam & gravia ſunt omnia corpora, & gravitant in ſe invicem omnia, & in omnes omnium particulas. Itaque liber primus inſcribitur, *De gravitate omnium corporum;* iſque omnia exhibet, quæcumque æquilibrium, & motum gravium cadentium, projectilium, pendulorum, ſe ſe invicem percutientium, rotantium circa axem aliquem, & circa centrum ſe ſe volventium reſpiciunt, phœnomena ſcilicet, quæ in corporibus terreſtribus, ac cæleſtibus ex ſola gravitate in centrum proficiſcuntur. Secundus eſt, *De gravitate omnium particularum*, & phœnomena omnia complectitur variationis terreſtrium ponderum pro varia ab æquatore, aut a ſuperficie Terræ diſtantia, figuræ totius terreſtris ſuperficiei, fluxus, & refluxus maris, & atmoſphæræ, præceſſionis æquinoctiorum, nutationis terreſtris axis, & librationis Lunæ. Eſt demum tertius, *De gravitate in omnia corpora*, atque univerſim agit de inæqualitatibus motus Lunæ, Planetarumque, ac Satellitum aliorum omnium ſuperiorum, atque inferiorum, ut ſunt variationes velocitatis, & inclinationis orbitæ, motus nodorum, & apogæi, æquationes periodici temporis &c. Liber quiſque definitiones, obſervationes, lemmata, ac decem deinde capita, & ſcholia totidem, ac propoſitiones quinquagintaquinque complectitur.

Ne autem quidpiam omitteretur, quod ad pleniorem naturæ interpretationem faceret, exordiendum fuit a notiſſimis Mechanicæ axiomatis, ut ſunt: 1. quod corpus omne ſibi relictum aut quieſcit, aut æquabiliter movetur per lineam rectam: 2. quod mutatio ſtatus corporis proportionalis eſt vi motrici impreſſæ: 3. quod mutatio ſtatus corporis fit juxta directionem vis motricis: 4. quod in colliſione corporum æquales utrobique ſunt mutationes ſtatus: 5. quod ſi corpora dura ſint, ſumma, aut differentia quantitatum motus ante, & poſt ictum eſt eadem. Ex 1. axiomate ad modum corollarii profluunt leges motus æquabilis: ex 2. leges motus accelerati, aut retardati: ex 3. leges compoſitionis & reſolutionis motus ubi angulus directionis virium eſt rectus: ex 4. primariæ leges reſiſtentiæ fluidorum: ex 5. leges conflictus durorum corporum, atque elaſticorum.

Quæ leges hujuſmodi excipiunt lemmata. Duodecim partem illam differentialis, atque integralis calculi, ſeu directæ,

& inverſæ fluxionum methodi enucleant, quæ ad naturalium phœnomenorum explicationem conducit maxime. Omiſſis ſcilicet conſiderationibus omnibus metaphyſicis quantitatum infinite parvarum, & fluentium, ex eo veteri axiomate quod quantitates omnes variabiles, quæ creſcendo, aut decreſcendo ad æqualitatem accedunt propius quam pro data qualibet differentia, fiunt ultimo inter ſe æquales, veterum more colligitur, quæ propoſitis quantitatibus elementa, & quæ elementis propoſitis quantitates geometricæ reſpondeant: & lemmatum poſtremum eſt, quod ſi radius ad peripheriam ſe habeat ut $1 : p$, & circuli radius ſit R, & ſinus arcus cujuſpiam vocetur x ſumma omnium $x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$ &c. in toto circulo erit $p R + \frac{1}{2} p R^3 + \frac{3}{8} p R^5 + \frac{5}{16} p R^7 + \frac{35}{128} p R^9$ &c., ſive $p R + \frac{1}{2} R^2 A + \frac{3}{4} R^2 B + \frac{5}{6} p R^2 C + \frac{7}{8} p R^2 D$ &c., ſi ſcilicet primus, ſecundus, tertius &c. ſeriei terminus ſit A, B, C &c.

Capita decem, quæ ſubſequuntur, hæc ſunt: 1. *de corporum æquilibrio*: 2. *de aſcenſu, & deſcenſu corporum*: 3. *de motu corporum projectorum*: 4. *de motu pendulorum*: 5. *de centro oſcillationis, percuſſionis, & rotationis*: 6. *de rotationis momento, & velocitate*: 7. *de compoſitione motuum projectionis, & rotationis*: 8 *de corporum vi centripeta*: 9. *de motu corporum in orbitis circularibus*: 10. *de motu corporum in ſectionibus conicis*.

Ut vero cujuſque capitis rationem teneas, Zanotte Ornatiſſime, percurram breviſſime ſingula. In primis cum reſolutio, & compoſitio motuum ex tertio axiomate colligatur manifeſtiſſime ubi angulus directionis virium eſt rectus, initio prioris capitis oſtendi caſus alios anguli acuti, obtuſique ad caſum anguli recti geometrice reduci, atque inde collegi cætera, quæ ad machinarum omnium vim, & rationem, ad æquilibrii leges, & gravitatis cujuſque corporis centrum pertinent. Principii ejuſdem a Galilæo antea inventi, tum a Newtono ad difficillima quæque traducti Mechanicæ, & Staticæ problemata, peculiarem etiam uſum attigi in ſupputanda reſiſtentia, ac vi fornicum, & reſiſtentiæ totius calculum ſingillatim explicare volui ut vulgare præjudicium convellerem, quo opinantur nonnulli acutiores fornices ſuſtinendis magnis ponderibus ſemper aptiores eſſe. Licet enim pondera ſuperimpoſita

mi-

minus ad fulcri everſionem agant, ipſos tamen acutiores arcus ad tertiam a fulcro partem & circa medium graviori periculo objiciunt, ubi ſcilicet arcus & fornices plerumque frangi a Belidoro & Hireo obſervatum eſt.

De præcipuis legibus motus gravium cadentium, & aſcendentium, ſolidorum, fluidorumque capite altero acturus, priora ſeptem Galilæi theoremata de motu accelerato, & duo alia Torricellii de velocitate fluidorum ex apertis vaſis proſilientium alia ratione breviter demonſtravi, iiſque nonnulla addidi de proportione quantitatis aquæ ex luminibus quadratis, circularibus, triangularibus dato tempore erumpentis. Addidi etiam peculiarem ſolutionem problematis, quo ſi vas aliquod conſtanter plenum communicet cum tubo aliquo, & a latere tubi foramen fiat, inquiritur ad quamnam ſupra apertum foramen altitudinem in tubo fluidum poſſit aſſurgere. Denique cum Hydraulica omnis incerta undique, ac vagis hypotheſibus implexa ſit, nihil omittendum cenſui quod ad prima motus fluidorum, & preſſionis principia illuſtranda poſſet conducere.

Capite tertio poſt ea omnia, quæ amplitudinem, altitudinem, & conſtructionem ſemitæ parabolicæ, & projectionis velocitatem, ac directionem reſpiciunt, ubi projectio ex ipſa fiat horizontali linea, in qua eſt ſcopus; problema aliud aggredi volui per partes ſingulas, quod Simpſonius, aliique plures aliis rationibus ſolverunt. Data ſcilicet amplitudine maxima, quæ dato impetu projectionis, dato videlicet tormento, dataque pulveris pyrii quantitate, in plano horizontali, ſemirecto directionis angulo attingi poteſt, & data inſuper horizontali diſtantia ſcopi, & elevatione ipſius ſupra horizontem, ex iis theorematis trigonometricis, quæ pro ſinu, & coſinu ſummæ, vel differentiæ duorum arcuum tradi ſolent, collegi qua inclinatione tormenti ad ſcopum feriendum opus ſit, & inverſo etiam problemati, ac problematis omnibus analogis breviter ſatisfeci. Et quidem formulæ inde erutæ ad Balliſticæ praxim, & conſtructionem tabularum Simpſonianis videntur ſimpliciores. Nam ſi ſit amplitudo maxima in plano horizontali A, horizontalis diſtantia ſcopi B, angulus elevationis ſcopi C, tormenti autem x, erit $B\ \text{ſin.}\ C = A.\ \text{ſin.}\ \overline{2x \mp C} \mp A.\ \text{ſin.}\ C$.

Quarto autem capite poſt emendatum Galilæi principium de

de velocitate corporum ex uno in aliud inclinatum planum tranſeuntium, & poſt expoſitas leges pendulorum in circulari arcu oſcillantium, novam exhibui demonſtrationem theorematis elegantiſſimi ab Hugenio primum propoſiti, quod ſcilicet tempus deſcenſus in omnibus cycloidis arcubus ſemper ſit idem, & ad tempus deſcenſus per diametrum circuli genitoris conſtantem rationem habeat ſemiperipheriæ circuli ad diametrum. Inde etiam collegi, quibus temporibus elementa quævis æque alta circuli, & cycloidis abſolvi poſſint, atque idem pariter eſſe oſtendi tempus deſcenſus, atque oſcillationis in minimis omnibus circuli ejuſdem arcubus. Demum geometrice & more veterum aliam expoſui non minus elegantem cycloidis proprietatem, quam Joannes Bernoullius primum, ac deinde Jacobus frater, Newtonus, Leibnitius, Hugenius, Hopitalius, Grandius, aliique attigerant, & qua fit ut a puncto ad punctum datum per cycloidalem arcum habeatur breviſſimus deſcenſus.

Ad determinationem geometricam centri oſcillationis, percuſſionis, & rotationis obſcurioribus aliis vivarum virium, aut fictitiæ ſubſtitutionis principiis, principia duo per ſe evidentia ſubſtituenda eſſe cenſui: quod ſcilicet æquales vires æqualibus radiis perpendiculariter in adverſas partes applicatæ ſint invicem in æquilibrio: quodque eadem vis ſecundum datæ rectæ directionem agat eodem modo in quovis demum rectæ ipſius puncto applicari intelligatur. Ex principiis iiſdem theorema aliud conſequitur, quod ad ſolutionem problematis præceſſionis æquinoctiorum, & nutationis terreſtris axis conducit maxime, quod ſcilicet in particulis omnibus circa datum axem rotantibus non motus quantitas, ut Newtonus exiſtimaverat, ſed quantitas momentorum, quæ habentur multiplicando inter ſe maſſam particulæ uniuſcujuſque, velocitatem, & diſtantiam ab axe motus, conſtanter eadem permaneat.

Ope hujus theorematis facile admodum inveniri poſſet, qui rotationis motus ex qualibet vi impreſſa debeat primum exurgere, ſi datum eſſet momentum vis, quæ corpori imprimitur, & momentum corporis data angulari velocitate circa axem aliquem revoluti. Quæ duo ut capite ſexto enuclearem, quantum ad phyſicam cæleſtem ſufficit, inveni primum quod eſſe debeat momentum omne ſphæroidis oblatæ, vel oblongæ, ſive oblatæ ſimul, oblongæque, cujus particulæ ſingulæ urgeantur

tur

tur viribus proportionalibus diſtantiæ a plano per ſphæroidis centrum tranſeunte: deinde comparavi inter ſe invicem momenta ſphæræ, & ſphæroidis utriuſque oblatæ, vel oblongæ, quæ circa figuræ axem, vel circa diametrum æquatoris aliquam data velocitate angulari revolvatur.

Iiſdem etiam ſubſidiis capite ſeptimo exponitur, quomodo ex unica vi, cujus directio primum extra gravitatis centrum tranſierit, duplex ſimul motus emerſerit projectionis, & rotationis, & quibuſdam Joannis Bernoullii locis emendatis oſtenditur ad quam diſtantiam a centro Terræ, Lunæ, Martis, & Jovis applicanda fuerit vis prior, ut is diurnus, & periodicus motus prodierit, quem ferunt obſervationes. His additur theorema elegans quod projectionis, & rotationis motus eadem vi ſimul geniti iidem ſint ac ſi alteruter tantum haberetur, nimirum ſi aut fixum maneret centrum gravitatis, & ſolus haberetur motus rotationis, aut vis omnis imprimeretur in centro ipſo, & ſolus projectionis motus exurgeret. Denique poſt indicatam methodum, qua variationes axis rotationis ob momenta inæqualia centrifugarum virium genitæ ſupputari poſſunt, additur etiam geometrica demonſtratio theorematis, quod ſi cuicumque corpori binæ vires ſimul imprimantur, quarum una circa axem unum, altera circa axem alterum ſeorſim rotari poſſit, corpus circa axem tertium rotabitur, & ſinus deviationis axis compoſitæ rotationis a duobus aliis prioribus erunt reciproce proportionales velocitatibus angularibus, quæ ſeorſim circa axes ipſos conciperentur.

Capite octavo ad vis centripetæ conſiderationem fit tranſitus, & Newtoni, ac Machinii theorema latius ad hunc ſenſum traducitur: quod ſi corpus aliquod ſecundum datam rectam projectum urgeatur viribus quibuſcumque tendentibus ad puncta quælibet ipſius rectæ, radiis ad duo quælibet puncta rectæ ejuſdem ductis, corpus deſcribet ſolida proportionalia temporibus, & viciſſim ſi hæc ſolida ſint proportionalia temporibus, vires corporis ad eamdem rectam dirigentur. Generale etiam principium rectilinei deſcenſus corporum, quod vis acceleratrix ducta in elementum ſpatii æquetur velocitati ductæ in elementum ſuum, ad curvilineos motus transfertur, atque inde & formula vis centripetæ, & nonnulla Newtoni theoremata colliguntur, ut illud eſt, quod ſi in caſu aliquo æqualium diſtantiarum velocitates corporum aſcendentium,

aut

aut deſcendentium æquales ſint, eæ erunt etiam in alio quolibet æqualium altitudinum caſu æquales.

De motu corporum in orbitis circularibus capite nono cum ſit agendum, & cum velocitates ac tempora circularis motus ac corporum recta aſcendentium, aut deſcendentium comparari debeant inter ſe invicem, omiſſis vagis aliis hypotheſibus, tres potiſſimum explicantur, quæ in natura habent locum, gravitatis conſtantis, & gravitatis creſcentis aut in ratione directa ſimplici, aut in ratione duplicata reciproca diſtantiarum. Primus eſt caſus corporum prope terreſtrem ſuperficiem, alter ad centrum propius accedendo haberetur, tertius vero in corporibus cœleſtibus late obtinet. Singuli ita expendi poſſunt, ut ex lege corporum recta aſcendentium, aut deſcendentium breviſſime eruantur theoremata, quæ Newtonus ex lege corporum circa focum ſectiones conicas deſcribentium collegerat.

Poſtremo capite invenies, Zanotte ornatiſſime, theoremata alia Newtoni, Bernoullii, Moivræi, Hermanni de motu corporum in iiſdem ſectionibus; quædam etiam invenies e tuis, ut illud eſt, quod explicas ad calcem capitis tertii *De viribus centralibus*. Ad hæc autem diverſo tramite bini proceſſimus: nam cum tu eo principio cum Newtono uſus ſis, quod in ellipſi & hyperbola parallelogrammum, circa diametros quaslibet conjugatas deſcriptum, ſit conſtans, quodque in parabola perpendiculum ex umbilico in tangentem demiſſum ſit medium proportionale inter diſtantias umbilici a vertice, & a puncto contactus; ipſe principio alio cum Hermanno, & Simpſonio uti malui, quod conſtans ſit rectangulum duarum perpendicularium a focis in tangentem demiſſarum, atque inde ſimul collegi, quibus legibus corpora in eadem ſectione conica, & in circulo ad eamdem diſtantiam deſcripto, & in diverſis conicis ſectionibus circa eumdem, aut circa diverſos focos moveri poſſint.

His abſolutis, quæ ad gravitatem corporum omnium pertinent, ut ad gravitatem omnium particularum expendendam fiat tranſitus, initio ſecundi libri habebis ordine expoſitas phyſicas omnes, atque aſtronomicas obſervationes longitudinis pendulorum eodem tempore oſcillantium, graduum meridiani, & parallelorum, fluxus, & refluxus maris, præceſſionis æquinoctiorum, nutationis axis, & librationis illius Lunæ,

quæ

quæ in longum, ac latum ſit. Deinde lemmatis decem reperies expoſitas proprietates plures ſectionum conicarum, quæ cum in elementis Grandii, Hopitalii, aliorumque minime occurrant, ſunt tamen ad gravitatis theoriam explanandam maxime neceſſariæ. Titulos autem decem capitum libri ſecundi hos leges: 1. *de æquilibrio particularum ſe ſe trahentium*: 2. *de attractione corporum ſphæroidicorum*: 3. *de figura Terræ*: 4. *de legibus terreſtrium ponderum*: 5. *de æſtu maris, & atmoſphæræ*: 6. *de variationibus fluxus, & refluxus*: 7. *de præceſſione æquinoctiorum*: 8. *de præceſſionis mediæ æquatione*: 9. *de nutatione terreſtris axis*: 10 *de libratione Lunæ*.

Primo igitur a celeberrimo Mac-Laurini, & Simpſonii theoremate exordiendum fuit, quod ſi ſingulæ fluidi particulæ ſe attrahant in ratione duplicata reciproca diſtantiarum, & revolvantur circa centrum, totum fluidum induet naturam ſphæroidis alicujus compreſſæ, cujus minor axis erit ipſe axis rotationis: quodque ſi ſingulæ particulæ a corpore alio maxime diſſito attrahantur eadem lege, fluidum induet figuram ſphæroidis oblongæ, cujus major axis per corpus illud attrahens, tranſibit, atque erunt in caſu utroque bini ſemiaxes inter ſe in ratione reciproca virium in extremis punctis agentium. Hunc autem æquilibrii caſum ut facilius demonſtrarem eo deduxi rem omnem ut oſtenderem, quod viribus ut antea agentibus, traducto per centrum plano, neque in plano ipſo, neque ſecundum lineas plano perpendiculares motus aliquis eſſe poſſit. Denique, quod a Simpſonio, & Mac-Laurino præſtitum non fuerat, binas ſimul hypotheſes compoſui, atque oſtendi, quod ſi particulæ ut antea ſe attrahant, attrahanturque a corpore alio, ac volvantur ſimul circa centrum, fluidum induet figuram ſphæroidis oblatæ ſimul, & oblongæ, quæ ſcilicet gigni poſſet ſi ellipſis circa minorem axem ita vertatur, ut vertex axis majoris ellipſim aliam deſcribat.

Calculum omnem variis rationibus a Newtono, Mac-Laurino, Simpſonio, Bernoullio, Clairautio jam inſtitutum attractionis ſphærarum, ac ſphæroidum oblatarum, oblongarumque, proxime ad ſphæras accedentium, in corpuſculum quodlibet extra, aut intra ſuperficiem poſitum, capitæ ſecundo ſimpliciorem efficere conatus ſum. Oſtendi inſuper attractiones in polo ſphæroidis oblongæ, & in æquatore oblatæ ſphæroidis iiſdem ſemiaxibus deſcriptæ, & in ſuperficie ſphæræ

circumſcriptæ exercitas eſſe quidem in ratione continua, ſed non in ea, quam materiæ quantitates in tribus hiſce corporibus continuant, quod Newtonus aſſerere viſus eſt in Propoſ. 19. lib. 3. Omnino autem eſt falſum, quod ipſe aſſumpſit in Propoſ. 38., differentiam ſemiaxium Lunæ fluidæ, quæ ob attractionem Terræ haberetur, ad differentiam ſemiaxium Terræ ob vim Lunæ eſſe in ratione ſimplici gravitatis acceleratricis Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, & diametri Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim, cum eſſe debeat in duplicata ratione virium earumdem acceleratricium, & diametrorum quadruplicata.

Inde ad quæſtionem phyſicam de telluris figura jam licet progredi. Newtonus, Hugenius, & Hermannus inquiſiverunt figuram illam quam Terra haberet, ſi aut canalibus aqua plenis, & ad centrum continuatis conſtaret, aut tota ejus maſſa in aquam reſoluta foret, aut in primordiis rerum materia fluida & gravi coaluiſſet, & circa ſe ipſam cœpiſſet converti. In qua hypotheſi cum facile ex theorematis antecedentibus conſequatur figuram Terræ ſphæroidem oblatam eſſe, & ſphæroidis ſemiaxes eſſe inter ſe ut 230:231; videtur tamen hypotheſis conficta prorſus, & naturæ phænomenis parum conſona. Quod ſi ex obſervationibus terreſtrium graduum de figura Terræ judicium ferendum ſit, paralleli & meridiani gradus prope Pyrenæos montes in Galliis, & Lapponicus etiam, atque Africanus, & Americanus gradus non magis a proportione illa 230:231 diſcrepant, quam ut in errores exiguos obſervationum diligentiſſimarum differentia omnis refundi poſſit. Italicus vero, & Pariſienſis gradus non magis inde recedunt, quam pro aliqua obſervationum incertitudine, & texturæ terreſtris irregularitate.

Corporum pondera, & longitudines pendulorum eodem tempore oſcillantium ab æquatore pergendo ad polos augentur fere in duplicata ratione ſinuum latitudinis, ut in hypotheſi quavis ſphæræ, aut ſphæroidis homogeneæ, aut ex ſtratis ſphæroidicis diverſæ denſitatis compoſitæ, aut nucleum ſphæricum denſiorem in centro habentis eſſe debet: magis tamen augentur, quam pro eadem terreſtrium axium proportione. Cumque hypotheſes varias capite quarto expenderem, quibus & proportioni ſimul, & quantitati creſcentium ponderum ſatisfieret, ea ſimpliciſſima omnium viſa eſt, qua interior nucleus

quin-

quinta ſui parte denſior ſtatueretur materia omni, quæ circa æquatorem Terræ, atque extra inſcriptam ſphæram redundat. Capite autem nono patebit quod ſi ſolida omnis materies extra inſcriptam ſphæram redundans exæquaret duas tertias partes materiæ, quæ redundaret ſimiliter in hypotheſi Terræ totius ſolidæ, & ubique ejuſdem cum nucleo denſitatis, ſatisfieret etiam aliis phœnomenis nutationis axis, & præceſſionis æquinoctiorum. Hujuſmodi hypotheſes obſervationibus affuſorum marium conformes videri poſſent, & recedendo a terreſtri ſuperficie gravitatem adhuc exhiberent quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionalem. Hoc dato, ſi aeris denſitas ſtatueretur proportionalis ponderibus comprimentibus, differentia altitudinum ſupra terreſtrem ſuperficiem eſſet logarithmus rationis imminutæ aeris denſitatis, & aliis omnibus altitudinis barometricæ experimentis undique ſatisfieret, quantum fert varia ratio denſitatum aeris, & mercurii, quæ ob variam caloris vim in inſtituendis experimentis haberi poteſt.

Rationem, & cauſſam phyſicam æſtus maris capite quinto explicaturus alium æquilibrii caſum evolvi, quo inquiritur figura fluidi quod ad modicam altitudinem circumambiat ſphæram diverſæ denſitatis, & cum ipſa ſimul volvatur circa centrum. Primo autem ex quo totius compoſitæ vis directio eſſe debeat in punctis ſingulis ſuperficiei fluidi perpendicularis, eduxi breviter eaſdem formulas differentiæ ſemiaxium, quas Clariſſimi Clairaut, & Alembertius tradiderant, & calculum omnem expoſui differentiæ altitudinum maris, & atmoſphæræ, & exiguæ variationis illius, quæ in barometris ob attractionem Solis, & Lunæ haberi debet. Oſtendi deinde quibus gradibus, ſive ob impreſſum diurnum motum, ſive ob perturbatrices Solis, & Lunæ vires, maria, & atmoſphæra in æquilibrio ſe ſe componant, & formulas alias ſimiliter ſum aſſecutus, quas Clariſſimus Alembertius invenerat in diſſertatione de generali ventorum cauſſa. Ex his denique omnibus collegi orientalis venti, qui intra tropicos continue ſpirat, eas eſſe leges, indolem, ac phœnomena, ut ex calore Solis, & aeris rarefactione potius, quam ex attractricibus Solis, & Lunæ viribus debeat repeti.

De variationibus fluxus, & refluxus acturus capite ſexto novam exhibui ſolutionem geometricam problematum a Daniele Bernoullio propoſitorum, quibus data diſtantia Solis, &

Lunæ ab invicem, & proportione virium inquiritur, quæ maxima fluxus altitudo, & maximi fluxus diſtantia a Sole, & Luna eſſe debeat. Atque eo quidem formulas perduxi, ut ſi Lunæ & Solis vires ſint inter ſe ut 5 : 2, & ſit M ſinus, & N coſinus ipſorum diſtantiæ ab invicem, ſinus diſtantiæ fluxus maximi a Luna prodierit quam proxime $\frac{1}{49} MN\overline{22 - 8N^2}$: quæ formula ad ſupputandas retardationes fluxus & altitudinis variationes commodior viſa eſt. Ab hiſce omnibus variationibus, quæ pendent ex varia Solis, & Lunæ diſtantia ab invicem, ad alias ordine enumerandas progredi volui, quæ pendent ex varia ipſorum diſtantia a Terra, & declinatione ab æquatore. Attigi etiam quam bene ſingula theoremata, & attractionis leges cum obſervationibus marini æſtus conſentiant.

Solutionem problematis difficillimi præceſſionis æquinoctiorum a Newtono primum tentatam, & ab Alembertio primum exhibitam, capite ſeptimo derivavi ex quibuſdam prioris libri theorematis. Oſtendi ſcilicet quod accedentibus Solis, & Lunæ viribus alius fiat axis rotationis, alius æquator Terræ, alia interſectio eclipticæ, & æquatoris: & cum, ſive ob ipſas vires perturbatrices, ſive ob vires centrifugas rotationis axis ab axe figuræ parum admodum recedat, poſito quod Sol, & Luna in eodem ſint plano eclipticæ, facile inveni quæ annua interſectionis ipſius varietas, & varietatis lex eſſe debeat. Duplicem inſuper Newtonianæ ſolutionis defectum, quem non adhuc fortaſſe alii attigerant, indigitavi: 1. quod in communicatione motus corporum ſimul rotantium, & oſcillantium, quantitatem motus, ut in corporibus libere impulſis, manere eamdem cenſuerit Newtonus, non vero eamdem quantitatem momentorum: 2. quod eumdem eſſe cenſuerit motum medium nodorum annuli, & Lunæ alicujus in ipſo annuli plano circa Terram diurno motu revolutæ, cum motus nodorum annuli duplo ſit major.

Quia vero planum lunaris orbitæ exiguo angulo ad eclipticam inclinatur, aliæ inde inæqualitates oriuntur, & regreſſionis punctorum æquinoctialium, & inclinationis eclipticæ ad æquatorem, quas ſingillatim capite octavo, & nono examinavi. Et quidem pars illa utriuſque inæqualitatis, quæ ſingulis nodi aſcendentis lunaris orbitæ ſemirevolutionibus revertitur, nutationem axis terreſtris exhibet, & æquationem mediæ

præ-

præceſſionis æquinoctiorum. Æquationis hujus, ac nutationis axis periodum, quantitatem, ac leges omnes cum nitide, ac breviter, quam fieri potuit, exponerem, theoremata nonnulla attigi plane elegantia, quæ mecum cum Piſis eſſet Clariſſimus Walmeslejus humaniſſime communicavit, quæque ipſe deinde publici juris fecit in Tranſactionibus Philoſophicis.

Poſtremo libri ſecundi capite librationem Lunæ, ſive quæ ex paralleliſmo lunaris axis, ſive quæ ex æquabili motu Lunæ circa axem oritur, cum phœnomenis ſic comparavi ut omnibus Galilæi, Grimaldi, Bullialdi, Hevelii macularum obſervationibus ſatisfacerem. Eaſdem etiam nutationis axis, & præceſſionis formulas a Terra ad Lunam tranſtuli ut viderem, quæ librationes aliæ in hypotheſi Lunæ oblatæ, ſive oblongatæ ob attractionem Terræ haberi debeant. Et cum Lunæ olim fluidæ hypotheſis penitus conficta ſit, & hypotheſis Lunæ oblongatæ recedat inſuper a planetarum aliorum analogia, obiter monui ex legibus æquilibrii nonniſi figuram Atmoſphæræ Lunæ, & fluidorum Planetas alios circumambientium recte colligi, atque hac occaſione data in ultimo libri ſcholio de Atmoſphæræ phœnomenis, eorumque rationibus, ac cauſis phyſicis fuſius diſſerui.

Denique in libro tertio mutuæ omnium corporum gravitatis, & inæqualitatum motus cœleſtium corporum tractationem ab Aſtronomicis obſervationibus ſimiliter exorſus ſum, atque ut inæqualitates ipſas diſtinguerem primo eas attigi, quæ ſunt apparentes, & opticæ dumtaxat, ut aberratio, quæ ex ſucceſſiva lucis propagatione oritur, & directionis, ſtationis, ac retrogradationis phœnomena, quæ oriuntur ex motu Terræ: deinde inæqualitates motus enumeravi, quæ habentur in plano orbitæ, ut ſunt variationes velocitatis, ellipticitatis, excentricitatis, & apogæi Lunæ, Satellitum, & Planetarum ſuperiorum, inferiorumque: addidi inſuper, quæ ſint variationes plani ipſius orbitæ, motus videlicet nodorum, & incrementum, aut decrementum inclinationis orbitarum omnium inter ſe, & ad planum eclipticæ, & æquatoris: ac demum æquationes omnes recenſui mediorum motuum, & periodici temporis Planetarum omnium, ac potiſſimum Terræ, Jovis, ac Saturni.

Inde autem is profluit ordo capitum: 1. *de inæqualitatibus opticis Planetarum*: 2. *de acceleratione Planetarum in orbitis*

tis circularibus: 3. *de variatione*, *&* *evectione Lunæ*: 4. *de motu apſidum*: 5. *de motu nodorum Lunæ*: 6. *de nodis aliorum Planetarum*: 7. *de variatione inclinationis orbitæ*: 8. *de æquationibus annuis motuum lunarium*: 9. *de acceleratione Planetarum in orbitis ellipticis*: 10. *de æquatione periodici temporis Planetarum*.

Et quidem opticæ omnes inæqualitates facile admodum revocari poſſunt ad calculum. Primo enim ſinus apparentis aberrationis Planetæ cujuſcumque e Terra viſi proportionalis eſt ſummæ vel differentiæ productorum velocitatis Planetæ in coſinum parallaxeos, & velocitatis Terræ in coſinum elongationis Planetæ a Sole per diſtantiam Planetæ, & Terræ diviſorum: & facile ex hoc theoremate conſequuntur, quæ ad Planetarum directionem, ſtationem, & retrogradationem pertinent. Deinde ut leges omnes aberrationis lucis in ſtellis fixis explicentur eo dumtaxat Mechanicæ principio opus eſt, quod communis motus non turbet apparentes ac relativos motus corporum inter ſe: ut vero ſupputentur omnes aberrationes, quæ in ſingulis Planetis habentur ob ipſam lucem, duobus aliis adhuc theorematis eſt opus: 1. quod ſi ſpectatoris oculus in ſectione aliqua conica moveatur, ſemita apparens fixæ cujuſcumque erit circulus, & centrum apparentis motus aut intra, aut extra, aut in ipſa erit peripheria circuli, prout ſectio conica erit ellipſis, vel hyperbola, vel parabola: 2. quod celeritas luminis erit ad Planetæ cujuſque celeritatem, ut coſinus anguli parallactici ad ſinum differentiæ aberrationis Planetæ, & Stellæ fixæ, ad quam Planeta e Terra referri poteſt.

Ut ſupputentur aliæ inæqualitates motus cœleſtium corporum opus eſt aliis Geometriæ, atque Algebræ ſubſidiis. Formulas virium perturbatricium Geometræ celeberrimi in hanc paſſim ſeriem reſolvunt $A + B.\,\mathrm{coſ}.\,z + C.\,\mathrm{coſ}.\,2z + D.\,\mathrm{coſ}.\,3z$ &c., quæ integratione habita citiſſime convergit. Utar ipſe in ſequentibus alia ſerie $A + B.\,\mathrm{coſ}.\,z + \overline{C.\,\mathrm{coſ}.\,z}^{2} + \overline{D.\,\mathrm{coſ}.\,z}^{3}$ &c., & cum non vires ipſæ perturbatrices, ſed aut vires dumtaxat mediæ, aut ſumma omnium virium definienda erit pro ſingulis revolutionibus, negligendo potentias omnes exponentis cujuſque imparis, quæ ambiguis ſignis in integro ſemicirculo compenſant ſe ſe invicem ac deſtruunt, utar dum-

taxat

taxat ſerie $A + \overline{C . \text{coſ.} z}^2 + \overline{F . \text{coſ.} z}^4 + \overline{H . \text{coſ.} z}^6$ &c., ut ſcilicet acceptis ſummis terminorum omnium, iiſdemque per circularem peripheriam diviſis ſit medius ſeriei valor $A + C . \frac{1}{2} R^2 + F \frac{3}{8} R^4 + H . \frac{5}{16} R^6$ &c. Hanc quantitatum mediarum methodum ſingillatim quibuſdam lemmatis explicare volui, quod ex binomii theoremate nullo negotio eruatur ſeries, & ſatis etiam convergat pro caſu quolibet Satellitum Planetarumque, tum ſuperiorum qui ab inferioribus, cum inferiorum, qui a ſuperioribus perturbentur.

His poſitis capite altero primum dumtaxat ſeriei terminum ſupputando inveni, quæ acceleratio Lunæ, & aliorum Satellitum ob vim Solis haberi debeat in tranſitu a quadraturis ad conjunctionem, vel oppoſitionem, atque ex data acceleratione Lunæ collegi breviter, quæ eſſe debeat differentia ſemiaxium lunaris orbitæ. Deinde alios ſeriei terminos ſupputando accelerationem, & retardationem omnem exhibui Planetarum ſuperiorum, & inferiorum, quæ ex attractione mutua oriri poteſt: & cum in hypotheſi motus ad immobile centrum virium relati eamdem fere in conjunctionibus Jovis eruiſſem differentiam longitudinis Saturni, quam alia methodo invenerat Eulerus, Caſſini obſervationes recenſui, quibus cum calculus ſatis convenit. Variationes velocitatis in ſingulis Satellitibus ex mutua actione ortæ ſimiliter innoteſcerent ſi data in ſingulis eſſet materiæ quantitas.

Ut variationem Lunæ, & inæqualitates alias hujuſmodi definiret Machinius celebri theoremate uſus eſt, quo binos ſimul motus conſiderans, uniformem unum, atque alterum proportionalem quadrato ſinus diſtantiæ a loco dato, ſtatuit area ellipſeos, cujus radii ſint inter ſe reciproce in ratione ſubduplicata motus horarii circa centrum, exhiberi poſſe uniformem motum, & motum variabilem exhiberi area circuli circumſcripti, & ſummam ſemiaxium ellipſeos ad ſemiaxium differentiam ſe habere ut ſinus totus ad ſinum æquationis maximæ. Ipſe motum illum, qui vere augetur in duplicata ratione ſinus diſtantiæ a loco dato, ſegmento circuli, & motum medium ſectore exhibui, & peripheriæ ad duplam diametrum inveni eamdem rationem eſſe, quæ motus totius medii in octantibus ad maximam differentiam medii, & veri mo-

motus. Theoremate hujuſmodi ad definiendam variationem Lunæ uti cœpi capite tertio, atque illud in Newtoniana ſolutione problematis reprehendi, quod variationem augendam, & minuendam cenſuerit in duplicata ratione temporis ſynodici, cum in ratione ſimplici tantum augeri, & minui debeat.

Monuit etiam Machinius inveſtigationes omnes variationis excentricitatis, & apogæi inde exordiendas eſſe, ut datis viribus perturbatricibus quæratur motus acceſſus, aut receſſus corporis a puncto dato, nulla habita ratione angularis motus circa punctum ipſum concepti. Methodum, quam Machinius indicaverat, aſſequi, & explicare aggreſſus eſt Walmeslejus in opuſculo de motu Apſidum, & in theoria motuum Lunarium. At cum plura Simpſonius, aliique objecerint Walmeslejo, ut quod vires dumtaxat medias conſideraverit, quæ juxta radium vectorem agunt, neglectis aliis, quæ ſunt eidem radio perpendiculares, curavi ipſe ſolutionem problematis ſic tradere, ut difficultatibus hiſce omnibus ultro occurrerem. Deinde ex data velocitate juxta vectorem radium concepta facile ex notis legibus corporum recta ad centrum deſcendentium collegi rationem temporum revolutionis integræ, & reverſionis ad ſummam apſidem. Atque id inſuper pro caſu quolibet virium in quavis ratione agentium præſtare volui, ut uno ſimul calculo aſſequerer qui motus apogæi Lunæ, & Planetarum omnium ſuperiorum, inferiorumque eſſe debeat.

Inveni igitur quod ſi in diſtantia mediocri, quæ exprimatur unitate, vis gravitatis ad vim perturbatricem ſe habeat ut $1 : \tfrac{1}{2} P$, & in diſtantia quavis x vis perturbatrix ſit $\tfrac{1}{2} P . x^m$, erit variatio excentricitatis $\dfrac{-\tfrac{1}{2} P . x^{m+2}}{1 - \overline{2 + \tfrac{1}{2} m} . P . x^{m+1}}$, & quod ſi orbita accedat proxime ad circulum erit tempus revolutionis corporis ad tempus reverſionis ad ſummam apſidem proxime ut $1 : 1 + \overline{\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4} m} . P$. Ex priore formula capite tertio erui æquationes omnes excentricitatis lunaris orbitæ, ſeu variationem æquationis centri, quam paſſim evectionem vocant. Capite autem quarto ope formulæ alterius, & motum medium apogæi Lunæ, & motus medii æquationes ſupputavi, eoſdemque fere numeros obtinui, quos Clariſſimus Alembertius ex generali ſolutione problematis trium corporum ingenioſiſſime

me derivaverat. Addidi etiam qui motus apſidum in Planetis omnibus ſuperioribus, & inferioribus, quique in ſingulis Satellitibus, ſive ob attractionem mutuam, ſive ob ſphæroidicam Primariorum figuram haberi debeat.

Capite quinto oſtendi Lunæ, aut Solis motum, motum medium a nodo, & motum maximum in quadraturis Lunæ, aut Solis cum nodo ipſo eſſe in progreſſione arithmetica, & ob ſeriem tardius convergentem minus accuratum deprehendi theorema Machinii alterum, quod motus Solis medius a nodo ſit medius Geometrice proportionalis inter motum Solis ipſius medium, & motum illum mediocrem, quo Sol celerrime recedit a nodo in quadraturis. Series autem, qua motus medius nodorum Lunaris orbitæ exprimitur, ea eſt, ex qua facile, & annui motus quantitas, & correctiones aliæ colligantur, quæ ſive ob inclinationem, & ellipticitatem orbitæ, ſive ob accelerationem areæ circa Terram deſcriptæ addendæ ſunt. Falſum eſt enim, quod aſſeruerat Newtonus, accelerari inſuper ob excentricitatem orbitæ nodorum motum, cum idem prorſus in orbita elliptica, & in circulo ad diſtantiam mediam deſcripto haberi debeat.

Iiſdem ſeriebus, & eadem ſemper quantitatum mediarum methodo capite ſexto nodorum motum in orbitis omnibus Satellitum, ac Primariorum ex mutua actione ortum determinavi, ac deinde capite ſeptimo omnia ſimul complecti volui, quæ variationes inclinationis lunaris orbitæ, & orbium aliorum omnium ad eclipticam, & eclipticæ ipſius ad æquatorem, variationumque periodum reſpiciunt. Obliquitatis eclipticæ phœnomena præcipua hæc ſunt: obliquitatem ipſam tribus fere quadrantibus unius minuti ſingulis ſæculis imminui: variationis hujuſmodi duas eſſe potiores partes, quæ pendent ex Jove, & Venere, atque eſſe proportionales ſinui diſtantiæ nodi aſcendentis Planetæ utriuſque a linea æquinoctiorum: imminutionis totius periodum eamdem eſſe, qua revolutio nodi complectitur, ut nodo a ſignis Borealibus ad ſigna Auſtralia tranſeunte obliquitas eclipticæ contraria ratione augeri debeat: limites denique imminutæ, auctæque obliquitatis intra $1\frac{1}{4}°$ contineri.

Tribus capitibus poſterioribus habebis, Zanotte Clariſſime, æquationes omnes mediorum motuum, quæ pendent ex vario loco Planetarum in orbitis ellipticis, atque ex varia

orbitarum poſitione inter ſe. In primis autem invenies theorema illud, quod ſeptem fere ab hinc annis, ad Euſtachium ſuaviſſimum fratris tui filium cum ſcriberem, commemoravi. Scilicet ſi ſumma apſis orbitæ ſuperioris ex plaga illa reperiatur, in qua inferior Planeta ab aphelio ſuæ orbitæ ad perihelium proficiſcitur, Planeta ipſe inferior ſuperioris actione retardabitur in motu ſuo, & actione inferioris ſuperior accelerabitur: & contra retardabitur ſuperior, & inferior accelerabitur in adverſa orbitarum poſitione, in qua inferior Planeta digreſſus e plaga ſummæ apſidis Planetæ ſuperioris ad aphelium orbitæ ſuæ progreditur: ex quo theoremate phœnomenon præcipuum conſequitur, poſitis orbitis ut modo ſunt, imminui ſemper velocitatem projectionis Jovis, & coarctari orbitam, ac periodicum tempus brevius evadere, & contra augeri ſemper velocitatem, & tempus periodicum Saturni. Singula, cum nondum ordine digeſta habeam, minime recenſebo. Habebis tamen omnia, Zanotte mi, ut primum in lucem prodibunt. Interim vale, & me, ut facis, amare perge.

Dabam Mediolani X. Kal. Apr. MDCCLXVI.

INDEX

OPUSCULORUM.

BAciallii Joannis. *De fluminibus in mare influentibus*. 99.
Benvenuti Joſephi. *De Lucenſium Thermarum atmosphæra*. 395.
Blancani Jacobi. *Iter per montana quædam agri bononienſis loca. Pars prima*. 151. *Pars altera*. 159.
Boſcovich Rogerii Joſephi. *De unione colorum aliorum poſt alios per binas ſubſtantias, ac unione multo majore per tres*. 265.
Brunelli Joannis. *De Pororoca*. 249.
De Mannioca. 334.
Canterzani Sebaſtiani. *De attractione ſphæræ*. 66.
Epiſtola, qua Euſtachii Zanotti obſervatio Veneris Solem trajicientis ab omni erroris ſuſpicione liberatur. 241.
Caſalii Gregorii. *De machinula quadam ad projectilium theorias per experimenta probandas*. 71.
De quorumdam vitrorum fracturis ſermo alter, quo diluuntur objecta nonnulla, quæ Clariſſimus Joannes Baptiſta Scarella protulerat adverſus ſermonem primum de eodem argumento conſcriptum. 169.
De vi pulveris pyrii per machinas dimetienda. 345.
De ictu pulveris pyrii. 357.
Caſtelvetri Joannis Antonii. *De proprietate numerorum diviſibilium per* II, III, IIII, I.... *&c.* 108.
a Covolo Joannis Baptiſtæ. *De Metamorphoſi duorum oſſium pedis in quadrupedibus aliquot*. 59.
Fabri Hyacinthi. *De humano quodam Monſtro*. 226.
Friſii Paulli. *De inæqualitatibus motus terræ & lunæ circa axem ex Aſtronomorum hypotheſibus*. 11.
Epiſtola, qua operis de gravitatis legibus a ſe edendi formam rationemque deſcribit. 514.
Galeatii Guſmani. *Hiſtoriæ duæ mirabiles calculorum in ureteribus exſiſtentium*. 139.

De cortice peruviano. 216.

Galvani Aloyſii. *De renibus, atque ureteribus volatilium*. 500.

Martini Joannis Baptiſtæ. *De uſu progreſſionis geometricæ in muſica*. 372.

Molinellii Petri Paulli. *Obſervationes aliquot medicæ*. 1.

Riccati Vincentii. *De æquivalentia potentiarum per principia metaphyſica demonſtrata*. 186.

Epiſtolæ tres, quibus utilitas calculi ſinuum & coſinuum in infiniteſimorum analyſi demonſtratur. 198.

Additamentum ad opuſculum de termino generali ſerierum recurrentium cum appendice, quod editum eſt in hujus tomi parte prima. 415.

De corpore projecto, cui præter potentiam ſervantem rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum a centro, applicatæ ſunt aliæ potentiæ duæ, quarum una dirigitur ad idem centrum, altera eſt huic perpendicularis. 421.

De quadratura curvarum tradita per ſummas generales ſerierum. 432.

Saladini Hieronymi. *Methodus Bernulliana de reducendis quadraturis tranſcendentibus ad longitudinem curvarum algebraicarum, a quibus inutilis ſæpe redditur, imaginariis quantitatibus liberatur, atque ejuſdem reductionis innumeræ aliæ viæ indigitantur*. 120.

Scarellæ Joannis Baptiſtæ. *De principiis viſionis directæ, reflexæ, & refractæ*. 446.

Tacconii Cajetani. *De Rachitide*. 81.

Zanotti Euſtachii. *De ſupputandis æquationibus in orbitis planetarum*. 236.

De angulo poſitionis & ejus uſu in determinanda telluris figura. 256.

Zanotti Franciſci Mariæ. *Sermo obſervationem novam exhibens, qua Mathematicus longe præſtantiſſimus DE LA LANDE mirabilem quamdam in Saturni motu inæqualitatem demonſtrat*. 509.

ERroribus, qui in editionem irrepſerunt plures ſane quam vellem, ſpero fore, ut qui animo ſunt æquiore, præſertim ſi quid ipſi umquam ediderunt, facile ignoſcant. Non nullos tamen hic emendare volui, ne ignoſcentibus inter legendum moram afferant; ii quippe ſunt, quos ipſe per ſe corrigere lector quiſquam vix poſſit. Occurrunt autem in opuſculis duobus, quæ edere oportuit, cum auctores longe abeſſent, nos autem exemplaria in manibus haberemus nec ſatis ubique nitida nec ſatis emendata. His de erroribus auctores ipſi confecta jam editione me monuerunt.

IN FRISII OPUSCULO.

De inæqualitatibus &c.

pag.	*lin.*			
20.	10.	perpendiculares.	*lege*	perpendiculares pedibus 280.
36.	18.	N N''		N N'
39.	13.	*9127*		*9172*
40.	5. 6.	50, *6' 6'*		50, *66''*
41.	3.	æquator		ecliptica
54.	21.	ſolſtitialibus.		æquinoctialibus
56.	25.	$\frac{\varphi a.}{A}\ \frac{360^{\circ}}{n-m}$		$\frac{\varphi a.}{A}\ \frac{525969.}{39343}\ \frac{360}{n-m}$
	30.	$n - m\ 694$		$n - m = 694$

IN BOSCOVICHI OPUSCULO.

pag.	*lin.*			
270.	32.	poſſint, ac	*lege*	poſſint
	39.	ſpectro		inſtrumento
271.	8.	marginis		marginis imaginis
272.	40.	poſitione		poſitione quacumque
273.	35.	marginis		marginis imi
274.	3.	majorem		minorem
	23.	in *e*		in *f*
	24.	in *f*		in *g*
	28.	violaceo		viridi
	30.	viridi		violaceo

pag.	*lin.*			
278.	22.	applicatum	*lege*	applicato
279.	27.	186 ad radium 500		176 ad radium 250
282.	8.	ſunt		ſunt bini
	18.	naturalem		ſuperiorem
		ea		ea ante ipſos
284.	1.	55′ ante initium diviſionis		ad 0.55′
291.	22.	$23^\circ.31' = 1411'$		$22^\circ.31' = 1351'$
	24.	1.79....1.73		1.72....1.70
292.	11.	1.79		1.72
	18.	0.97		1.02
	19.	1.64 1.39		1.69 1.47
294.	7.	44		47
	30.	OQS		OQR
	36. 37.	$a - b$		$b - a$
295.	27.	$a = o$		$x = o$
	28.	$b + r$		$\overline{b + r}$
297.	2.	$\frac{ſin.\ a}{m\ ſin.\ x}$		$\frac{m\ ſin.\ x}{ſin.\ a}$
	34.	79		86
298.	17. 18.	$\frac{ſin.\ b - x}{coſ.\ b - x} \times dx$		$\frac{ſin.\ \overline{b - x}}{coſ.\ \overline{b - x}}$
300.	15.	$\frac{dM}{dm}$		$\frac{M - 1}{m - 1}$
306.	16.	ad m		ad dm
	18.	: pro		, & $EO = (m - 1) KF$: pro
	19.	$\frac{OP}{mLG}$		$\frac{mOP}{LG}$
	20. 21.	$m\,dm$		$\frac{dm}{m}$
	23.	ubi		ibi
	25.	$m\,dm$		$\frac{dm}{m}$
309.	17.	unius		unicus
311.	11.	DC		BC

pag.	*lin.*		*lege*
312.	17.	H L	H K
318.	8.	$+x$	$+1$
320.	27.	A M	O M
323.	12.	$=0$	&c. $=0$
324.	26.	159	169
	28.	$h' - k''$	$h'' - k''$
	30.	$h'' - k'$	$h'' - k''$
325.	4.	$=b$	$=-b$
326.	7.	$\frac{1}{a} - l$	$\frac{1}{a} - 1$
325. 326.		litterulis, ubicumque ad dexteram ſuperpoſitum eſt ', ſuperpone '	
327.	9.	$\frac{m^3}{f^2}$	$\frac{m'^3}{f'^3}$
		ubique pro ς	ρ

Vidit D. Johannes Maria Vidarius Clericus Regularis S. Pauli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentiſſimo, & Reverendiſſimo Domino D. Vincentio Cardinali Malvetio Archiepiſcopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

Die 25. *Junii* 1766.

IMPRIMATUR.

Fr. Joſephus Maria Pettoni Vicarius Generalis Sancti Officii Bononiæ.